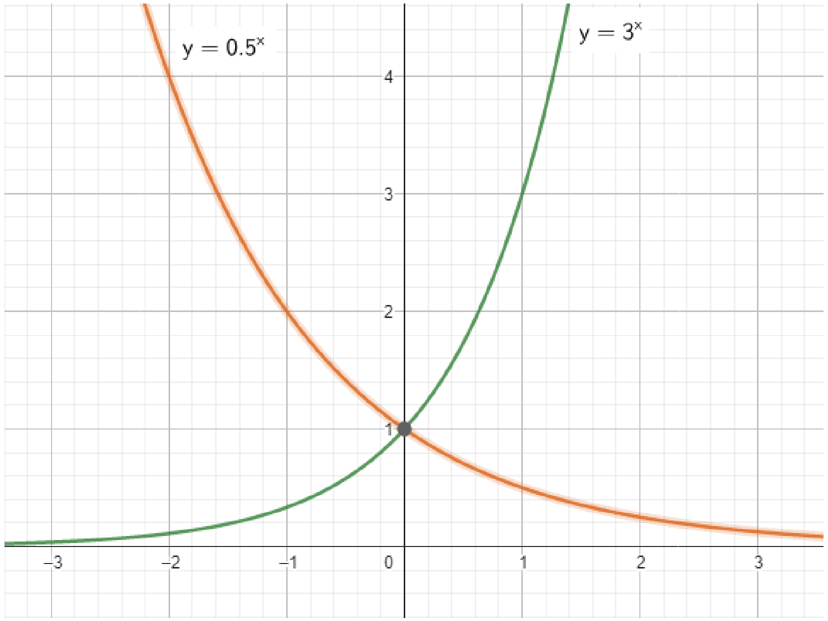
Fonctions exponentielles – Fiche de cours

1. Définition

Pour $a>0$ on définit la fonction exponentielle de base a, par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=a^x \quad \text{avec} \quad a^0=1$$



2. Sens de variation

Pour $0<a<1$: $f(x)=a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Pour $a=1$: $f(x)=1$ est constante sur $\mathbb{R}$

Pour $a>1$: $f(x)=a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

Si $k>0$ a^x et $k\cdot a^x$ ont les mêmes variations

Si $k<0$ a^x et $k\cdot a^x$ ont les variations contraires

3. Propriétés algébriques

a. Exponentielles de base a

$a^0=1 \qquad \forall x\in\mathbb{R} \quad a^x>0$

b. Equations et inéquations

$a^x\geq a^y \Leftrightarrow x\geq y \qquad a^x=a^y\Leftrightarrow x=y \qquad a^x\leq a^y\Leftrightarrow x\leq y$

c. Autres propriétés

$a^{-x}=\dfrac{1}{a^x} \qquad a^x\cdot a^y=a^{x+y} \qquad \dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \qquad (a^x)^n=a^{n\cdot x}$

4. Taux d'évolution moyen

a. Puissance 1/n

Pour x, a et n positifs alors la solution de l'équation $x^n=a$ est $x=a^{1/n}$

b. Evolutions successives

Lors de n évolutions successives, le coefficient multiplicateur vaut :

$$CM=CM_1\times CM_2\times\ldots CM_n$$

Si les évolutions sont toutes identiques lors de n évolutions (augmentation ou baisse de t% appelé taux moyen) alors : $CM=\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^n$

Le taux d'évolution global T% lors de n évolutions est défini par :

$$CM=1+\frac{T}{100} \quad \text{avec} \quad t=100\cdot\left(\left(1+\frac{T}{100}\right)^{1/n}-1\right)$$

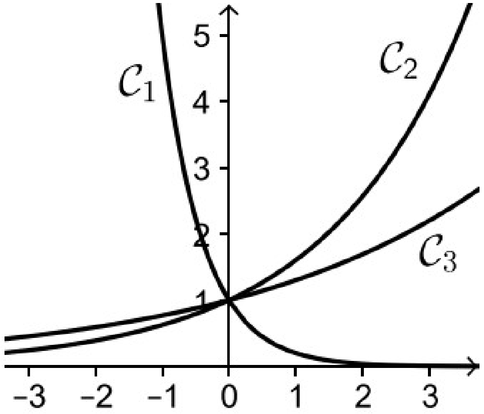
Fonctions exponentielles – Exercices – Devoirs

Exercice 1

On a représenté ci-contre les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par

- $f_1(x) = 0{,}2^x$
- $f_2(x) = 1{,}3^x$
- $f_3(x) = 1{,}6^x$

Associer en justifiant chaque fonction à sa courbe.



Exercice 2

Donner les variations des fonctions f_1, f_2, f_3 définies par $f_1(x) = \left(\frac{7}{9}\right)^x$, $f_2(x) = 1{,}21^x$ et $f_3(x) = 0{,}98^x$.

Exercice 3

Vrai ou faux ? Justifier. Pour tout réel x,

a. $4 \times 2^x = 2^{x+2}$

b. $\dfrac{5^{x+3}}{2^x} = 125 \times 2{,}5^x$

c. $\dfrac{8^x}{2^{x-2}} = 4^{x+1}$

d. $\dfrac{(2^x)^3}{4^{x+1}} = 2^{x-2}$

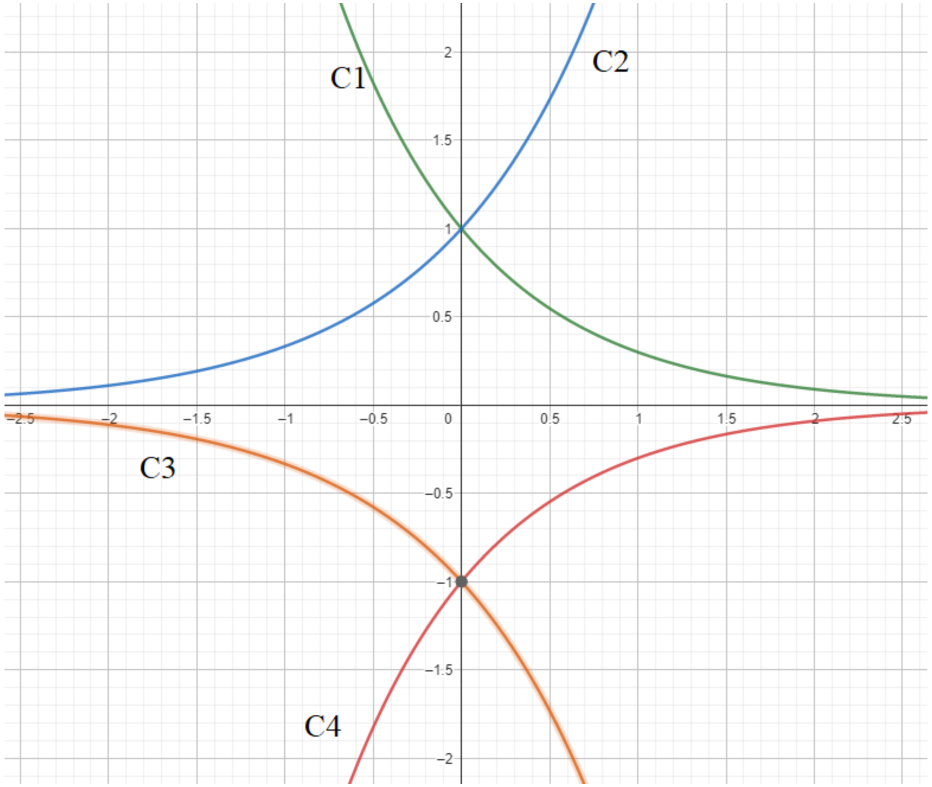
Exercice 4

Simplifier l'écriture du nombre suivant $\dfrac{3^{2x+2}}{3^{2x+1}} \cdot 3^x$

Exercice 5

Associer les 4 courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 aux fonctions suivantes :

$f_1(x) = 3^x \quad f_2(x) = -3^x \quad f_3(x) = 0{,}3^x \quad f_4(x) = -0{,}3^x$



Exercice 6

Calculer : a) $\frac{(2^3)^2}{2^6}$ b) $0{,}7^{-1}\times 0{,}7$ c) $a^2\times a^{-2}$ d) $(2^2+1)^2$

Exercice 7

Le gérant d'une piscine s'intéresse à la présence de bactéries dans l'eau. Il effectue un prélèvement. Ce prélèvement montre que la concentration de bactéries est égale à 1000 bactéries par millilitre. Le seuil maximal autorisé est égal à 1500 bactéries par millilitre. On admet que la concentration de bactéries est modélisée par la fonction $f(t)$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=1000\cdot 1{,}1^t$ désignant la concentration, en milliers de bactéries par millilitre, et t désigne la durée, en heure, écoulée depuis que le prélèvement a été effectué.

Question 1 : La fonction $f(t)$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Question 2 : La concentration de bactéries deux heures après le prélèvement est inférieure au seuil maximal autorisé.

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes.

a. $a^x = a^{2x}$ **b.** $a^{2x+3} = 1$ **c.** $a^{-x^3+x} = 0$

d. $a^{4x-1} = a^{x+5}$ **e.** $a^x - a^{-x} = 0$ **f.** $a^{4x} = \frac{1}{a}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a) $1{,}25^{x-1}<1{,}25$ b) $4{,}1^{3x}<4{,}1^{x+1}$ c) $0{,}72^x\leqslant 0{,}72$ d) $0{,}72^{3x}<0{,}72^{x+1}$

e) $2^{3x}<4^{2x+1}$ f) $27^{-x}\geq 3^{x+2}$ g) $(0{,}25^x+1)^2>1$ h) $(0{,}25^x+1)(0{,}25^x-1)\leqslant 0$

Exercice 10

1. Déterminer le sens de variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $t \mapsto -2\times 1{,}4^t$ **b.** $t\mapsto 9{,}85\times 0{,}85^t$ **c.** $t\mapsto 0{,}8\times 2{,}25^t$

2. Déterminer le sens de variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $x\mapsto \frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{5}\right)^x$ **b.** $x\mapsto 2\times\left(\frac{5}{4}\right)^x$ **c.** $x\mapsto -\frac{7}{12}\times\left(\frac{2\,020}{2\,019}\right)^x$

Exercice 11

Simplifier les expressions suivantes :

a) $(10^x\times 100^x)^{-1}$

b) $(10^x)^2\times(10^x)^{-3}$

c) $10^x\times 100^x\times 1000^x$

d) $1000^x\times 0{,}1^x\times 0{,}001^x$

e) $10^x\times 10^{2x+1}\ 10^x\times 0{,}01^x$

f) $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n$

Exercice 12

1. Résoudre les équations :

a) $10^x = 1$

b) $10^{x+1} = 10^{2x}$

c) $10^x + 20^x = 40^x$

d) $10^x = x^2$

e) $2^x + 3^x = 4^x$

f) $4^x - 6^x = 2\times 9^x$

2. Un prix augmente de 15% puis baisse de 10% puis réaugmente de 20 %.

a. De quel pourcentage global ce prix a-t-il évolué ?

b. Déterminer le taux d'évolution moyen.