

Formulaire – Alphabet grec

Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	A
beta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	E
zéta	ζ	Z
éta	η	H
théta	θ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M
nu	ν	N
xi	ξ	Ξ
omicron	o	O
pi	π	Π
rho	ρ	P
sigma	σ	Σ
tau	τ	T
upsilon	υ	Υ
phi	φ (ou ϕ)	Φ
khi	χ	X
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

Formulaire – Puissances

Définitions

x	α	Définition	Exemple
$\mathbb{C}$	$\mathbb{N}$	$x^\alpha = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$	$(1+i)^3 = (1+i) \times (1+i) \times (1+i)$
$\mathbb{C}^\star$	$\mathbb{Z}_-^\star$	$x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}_{-\alpha \text{ fois}}$	$(1+i)^{-3} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1}{1+i} \times \frac{1}{1+i}$
$\mathbb{R}_+^\star$	$\mathbb{R}$	$x^\alpha = e^{\alpha \times \ln(x)}$	$3^\pi = e^{\pi \times \ln(3)}$

Par convention, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$ et $0^0 = 1$.

Remarque : On pourrait étendre la notation x^α avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}_+^\star$ en posant $x^\alpha = e^{\alpha \times \ln(x)}$.

Opérations

Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Sous réserve d'existence des expressions suivantes, on a :

$$\begin{aligned}
 (x \times y)^\alpha &= x^\alpha \times y^\alpha, & x^\alpha \times x^\beta &= x^{\alpha+\beta}, \\
 x^{-\alpha} &= \frac{1}{x^\alpha}, & \frac{x^\alpha}{x^\beta} &= x^{\alpha-\beta}, \\
 \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, & (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha \times \beta}.
 \end{aligned}$$

Formulaire – Trigonométrie

Angles associés

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta) \\ \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

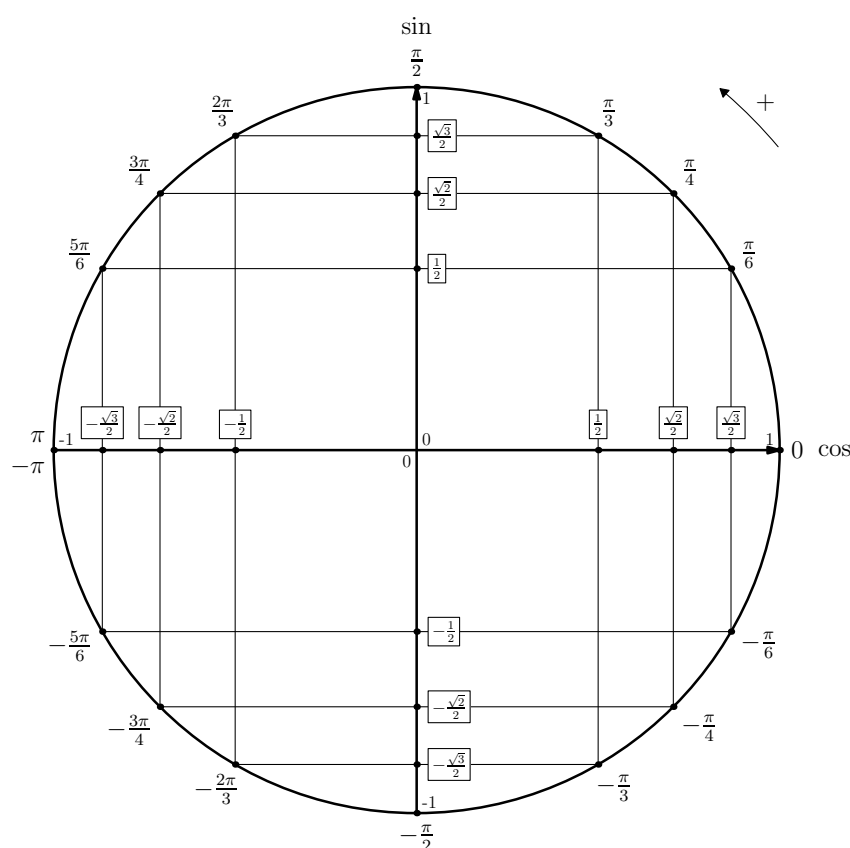
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \end{cases}$$

Remarque : Il faut savoir retrouver ces formules à l'aide du cercle trigonométrique.

Valeurs usuelles

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0



Relations entre cos, sin et tan

$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$$

$$\text{Si } x \notin \frac{\pi}{2}[\pi], \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad 1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos(a) \times \cos(b) - \sin(a) \times \sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a) \times \cos(b) + \cos(a) \times \sin(b)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \times \tan(b)}$$

$$\cos(a-b) = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a) \times \cos(b) - \cos(a) \times \sin(b)$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \times \tan(b)}$$

Formules de duplication (se déduisent des formule d'addition)

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2 \\ &= 2(\cos(a))^2 - 1 \\ &= 1 - 2(\sin(a))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \times \cos(a) \\ \tan(2a) &= \frac{2 \tan(a)}{1 - (\tan(a))^2} \end{aligned}$$

Formules de linéarisation (se déduisent des formules d'addition et de linéarisation)

$$\begin{aligned} \sin(a) \times \cos(b) &= \frac{1}{2} \times (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos(a) \times \cos(b) &= \frac{1}{2} \times (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \end{aligned}$$

$$\sin(a) \times \sin(b) = -\frac{1}{2} \times (\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

Cas particulier :

$$(\cos(a))^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$(\sin(a))^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$(\tan(a))^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

Formules de factorisation (se déduisent des formules d'addition)

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Formules de l'angle moitié

Si $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, alors :

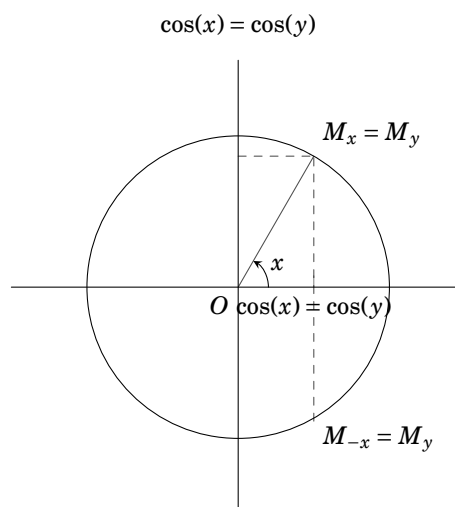
$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

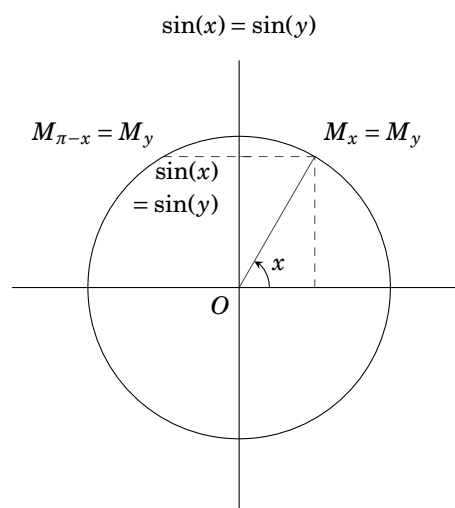
$$\tan(\theta) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Équations trigonométriques

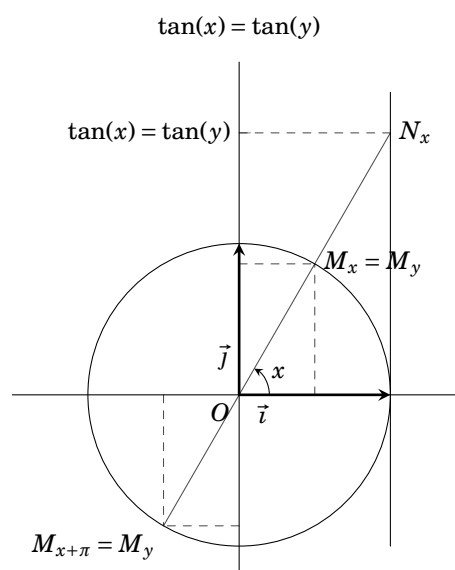
$$\cos(x) = \cos(y) \iff x \equiv y[2\pi] \text{ ou } x \equiv -y[2\pi]$$



$$\sin(x) = \sin(y) \iff x \equiv y[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y[2\pi]$$



$$\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y[\pi]$$



Formulaire – Dérivation

Dérivées usuelles

Dans le tableau suivant, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I

$f(x)$	I	$f'(x)$
$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$n \times x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$] -\infty, 0[\quad \text{ou} \quad]0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$] -\infty, 0[\quad \text{ou} \quad]0, +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$]0, +\infty[$	$\alpha \times x^{\alpha-1}$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$] -\frac{\pi}{2} + k \times \pi, \frac{\pi}{2} + k \times \pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$
$\text{Arcsin}(x)$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arccos}(x)$	$] -1, 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$
$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$

Opérations et dérivation

► Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u' + v' \\ (u \times v)' &= u' \times v + u \times v' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} \quad (\text{on suppose que } v \text{ ne s'annule pas sur } I)\end{aligned}$$

► Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur l'intervalle $u(I)$.

$$\begin{aligned}(v \circ u)' &= (v' \circ u) \times u' \\ (\ln(u))' &= \frac{u'}{u} \quad (\text{on suppose que } u \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^*) \\ (e^u)' &= u' \times e^u \\ (\cos(u))' &= -u' \times \sin(u) \\ (\sin(u))' &= u' \times \cos(u) \\ (\text{ch}(u))' &= u' \times \text{sh}(u) \\ (\text{sh}(u))' &= u' \times \text{ch}(u) \\ (\text{Arcsin}(u))' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad (\text{on suppose que } u \text{ est à valeurs dans }]-1, 1[) \\ (\text{Arccos}(u))' &= -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad (\text{on suppose que } u \text{ est à valeurs dans }]-1, 1[) \\ (\text{Arctan}(u))' &= \frac{u'}{1+u^2} \\ (u^\alpha)' &= \alpha \cdot u' \times u^{\alpha-1} \quad (\text{on suppose que } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } u \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^*) \\ (u^n)' &= n \cdot u' \times u^{n-1} \quad (\text{on suppose que } n \in \mathbb{N}) \\ \left(\frac{1}{u^n}\right)' &= -n \times \frac{u'}{u^{n+1}} \quad (\text{on suppose que } n \in \mathbb{N}^* \text{ et que } u \text{ ne s'annule pas sur } I)\end{aligned}$$

► Pour dériver une fonction de la forme u^v , on passe sous forme exponentielle $e^{v \times \ln u}$.

Théorème de la bijection

Soit f une fonction **strictement monotone**, **continue** et **dérivable** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

- l'image de l'intervalle I par f est un intervalle noté $f(I)$.
- f réalise une bijection de I sur $f(I)$. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
- f^{-1} est continue sur $f(I)$.
- f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et de même sens de variation que f .

De plus, pour tout $x \in f(I)$, f^{-1} est dérivable en x si, et seulement si, $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarque : pour déterminer l'intervalle $f(I)$, on peut dresser le tableau de variations de f et « suivre la flèche ».

Formulaire – Primitives

Primitives usuelles

Dans le tableau suivant, F désigne une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et $C \in \mathbb{K}$ est une constante ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

$f(x)$	I	$F(x) + C$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$	$] -\infty, 0[\quad \text{ou} \quad]0, +\infty[$	$\frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{x}$	$] -\infty, 0[\quad \text{ou} \quad]0, +\infty[$	$\ln(x) + C$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$]0, +\infty[$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$e^{a \times x} \quad (a \in \mathbb{C}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^{a \times x}}{a} + C$
$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x) + C$
$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x) + C$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k \times \pi, \frac{\pi}{2} + k \times \pi \right[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$-\ln(\cos(x)) + C$
$\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k \times \pi, \frac{\pi}{2} + k \times \pi \right[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$\text{Arcsin}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$-\text{Arccos}(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\text{Arctan}(x) + C$
$\frac{1}{x^2+a^2} \quad (a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} \times \text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a > 0)$	$] -a, a[$	$\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \times \ln(x) - x + C$

Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I .

Opérations et primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une primitive de $u' \times u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On suppose que u ne s'annule pas sur I . Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$.
- On suppose que u ne s'annule pas sur I . Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln(|u|)$.
- On suppose que u est strictement positive sur I . Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On suppose que u est strictement positive sur I . Une primitive de $u' \times u^\alpha$ sur I est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
- Une primitive de $u' \times e^u$ sur I est e^u .

Théorème fondamental de l'analyse

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

► Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I . Pour tout $(a, b) \in I^2$ et F primitive de f sur I , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \stackrel{\text{notation}}{=} [F(t)]_a^b$$

En particulier, pour tout $a \in I$, la fonction

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

► Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Pour tout $(a, b) \in I$, on a :

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Intégration par parties

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in I^2$ et u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On a :

$$\int_a^b u(t) \times v'(t) dt = [u(t) \times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) \times v(t) dt$$

Changement de variable

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I .

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et à valeurs dans I .

Pour tout $(a, b) \in J^2$, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \times \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

Primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{a \times x^2 + b \times x + c}$ avec a, b, c des réels et $a \neq 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4a \times c$. Il y a alors trois cas :

► **Cas 1** : $\Delta > 0$. Dans ce cas, il existe $r_1 < r_2$ **réels** distincts tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}$,

$$\frac{1}{a \times x^2 + b \times x + c} = \frac{1}{a \times (x - r_1) \times (x - r_2)}.$$

On cherche alors α et β réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}$,

$$\frac{1}{a \times x^2 + b \times x + c} = \frac{1}{a} \times \left(\frac{\alpha}{x - r_1} + \frac{\beta}{x - r_2} \right).$$

Remarque : on trouve $\alpha = -\beta = \frac{1}{r_1 - r_2}$.

Les primitives de f sur chacun des intervalles $]-\infty, r_1[$, $]r_1, r_2[$ et $]r_2, +\infty[$ sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{a} \times (\alpha \times \ln(|x - r_1|) + \beta \times \ln(|x - r_2|)) + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Remarque : ne pas oublier les valeurs absolues !

► **Cas 2** : $\Delta = 0$. Dans ce cas, il existe r **réel** tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$,

$$\frac{1}{a \times x^2 + b \times x + c} = \frac{1}{a \times (x - r)^2}.$$

Donc, les primitives de f sur chacun des intervalles $]-\infty, r[$ et $]r, +\infty[$ sont de la forme :

$$x \mapsto -\frac{1}{a} \times \frac{1}{x - r} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

► **Cas 3** : $\Delta < 0$. Dans ce cas, on écrit le trinôme sous **forme canonique** : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{a \times x^2 + b \times x + c} = \frac{1}{a \times \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right)} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\frac{-\Delta}{4a^2}} \times \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}} \right)^2 + 1}.$$

Notez bien que $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{a} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}} \times \operatorname{Arctan} \left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \operatorname{Arctan} \left(\frac{2a \times x + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Remarque : il est bien entendu hors de question d'apprendre ces formules par cœur. Il suffit de refaire ce raisonnement à chaque fois.

Formulaire – Relations de comparaison

Définitions : relations de comparaison

► *Cas des suites* : soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que les termes de la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0 .

- La suite (u_n) est dominée par (v_n) et on note $u_n = O(v_n)$ lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.
- la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- On dit que la suite (u_n) est équivalente à (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

► *Cas des fonctions* : soient f et g deux fonctions définies sur I ou $I \setminus \{a\}$ (avec a un point ou une extrémité de l'intervalle I). On suppose que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a .

- La fonction f est dominée par g au voisinage de a et on note $f = O_a(g)$ lorsque la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .
- La fonction f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f = o_a(g)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- La fonction f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f \sim_a g$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

Équivalents usuels

$\sin(x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} x$	$\operatorname{sh}(x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} x$
$\tan(x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} x$	$1 - \operatorname{ch}(x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}$
$\cos(x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} 1$	$e^x - 1$	$\sim_{x \rightarrow 0} x$
$1 - \cos(x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$	$\ln(1+x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} x$
$\operatorname{Arcsin}(x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} x$	$\ln(x)$	$\sim_{x \rightarrow 1} x - 1$
$\operatorname{Arctan}(x)$	$\sim_{x \rightarrow 0} x$	$(1+x)^\alpha - 1$	$\sim_{x \rightarrow 0} \alpha \times x$ où $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$.

Formule générale : Soit f une fonction dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$, alors,

$$f(x) - f(a) \sim_{x \rightarrow a} f'(a) \times (x - a).$$

► Soit f une *fonction polynomiale* définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = a_p \times x^p + a_{p+1} \times x^{p+1} + \dots + a_n \times x^n$ avec $a_p \neq 0$, $a_n \neq 0$ et $p \leq n$. Alors :

$$f(x) \sim_{x \rightarrow 0} a_p \times x^p, \quad f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} a_n \times x^n \quad \text{et} \quad f(x) \sim_{x \rightarrow -\infty} a_n \times x^n.$$

► Soit f une *fonction rationnelle* définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{a_p \times x^p + a_{p+1} \times x^{p+1} + \dots + a_n \times x^n}{b_q \times x^q + b_{q+1} \times x^{q+1} + \dots + b_m \times x^m}$ avec $a_p \neq 0$, $a_n \neq 0$, $p \leq n$, $b_q \neq 0$, $b_m \neq 0$ et $q \leq m$. Alors :

$$f(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{a_p}{b_q} \times x^{p-q}, \quad f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_m} \times x^{n-m} \quad \text{et} \quad f(x) \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_m} \times x^{n-m}.$$

Croissances comparées

► *Cas des suites* : Soit $q > 1$, $\beta > 0$ et $\alpha > 0$ des réels.

• Version « limites » :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

• Version « relations de comparaison » :

$$(\ln(n))^\beta = o_{n \rightarrow +\infty}(n^\alpha), \quad n^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n) \quad \text{et} \quad q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!).$$

► *Cas des fonctions* : Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ des réels.

• Version « limites » :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha \times x}}{x^\beta} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta \times e^{\alpha \times x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \times |\ln(x)|^\beta = 0$$

• Version « relations de comparaison » :

$$x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha \times x}), \quad x^\beta = o_{x \rightarrow -\infty}(e^{-\alpha \times x}), \quad (\ln(x))^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha) \quad \text{et} \quad (\ln(x))^\beta = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right).$$

Opérations sur les relations de comparaison

Relations de domination et de négligeabilité

► *Cas des suites* :

$$\begin{array}{llll} u_n = o(v_n) & \implies & u_n = O(v_n) & \\ u_n = O(v_n) \text{ et } w_n = O(x_n) & \implies & u_n \times w_n = O(v_n \times x_n) & \\ u_n = O(v_n) \text{ et } w_n = o(x_n) & \implies & u_n \times w_n = o(v_n \times x_n) & \\ u_n = o(v_n) \text{ et } w_n = O(x_n) & \implies & u_n \times w_n = o(v_n \times x_n) & \\ u_n = o(v_n) \text{ et } w_n = o(x_n) & \implies & u_n \times w_n = o(v_n \times x_n) & \\ u_n = O(w_n) \text{ et } v_n = O(w_n) & \implies & u_n + v_n = O(w_n) & \\ u_n = o(w_n) \text{ et } v_n = o(w_n) & \implies & u_n + v_n = o(w_n) & \\ u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = O(w_n) & \implies & u_n = O(w_n) & \\ u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = o(w_n) & \implies & u_n = o(w_n) & \\ u_n = o(v_n) \text{ et } v_n = O(w_n) & \implies & u_n = o(w_n) & \\ u_n = o(v_n) \text{ et } v_n = o(w_n) & \implies & u_n = o(w_n) & \end{array}$$

► *Cas des fonctions* :

$$\begin{array}{llll} f = o_a(g) & \implies & f = O_a(g) & \\ f = O_a(g) \text{ et } h = O_a(\varphi) & \implies & f \times h = O_a(g \times \varphi) & \\ f = O_a(g) \text{ et } h = o_a(\varphi) & \implies & f \times h = o_a(g \times \varphi) & \\ f = o_a(g) \text{ et } h = O_a(\varphi) & \implies & f \times h = o_a(g \times \varphi) & \\ f = o_a(g) \text{ et } h = o_a(\varphi) & \implies & f \times h = o_a(g \times \varphi) & \\ f = O_a(h) \text{ et } g = O_a(h) & \implies & f + g = O_a(h) & \\ f = o_a(h) \text{ et } g = o_a(h) & \implies & f + g = o_a(h) & \\ f = O_a(g) \text{ et } g = O_a(h) & \implies & f = O_a(h) & \\ f = O_a(g) \text{ et } g = o_a(h) & \implies & f = o_a(h) & \\ f = o_a(g) \text{ et } g = O_a(h) & \implies & f = o_a(h) & \\ f = o_a(g) \text{ et } g = o_a(h) & \implies & f = o_a(h) & \\ f = o_a(g) \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow b]{} a & \implies & f(\varphi(t)) = O_{t \rightarrow b}(g(\varphi(t))) & \\ f = O_a(g) \text{ et } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a & \implies & f(u_n) = O(g(u_n)) & \\ f = o_a(g) \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow b]{} a & \implies & f(\varphi(t)) = o_{t \rightarrow b}(g(\varphi(t))) & \\ f = o_a(g) \text{ et } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a & \implies & f(u_n) = o(g(u_n)) & \end{array}$$

Relation d'équivalence

► Cas des suites :

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff u_n = v_n + o(v_n) \\ u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n &\implies u_n \sim w_n \\ u_n \sim v_n \text{ et } w_n \sim x_n &\implies u_n \times w_n \sim v_n \times x_n \\ u_n \sim v_n \text{ et } w_n \sim x_n &\implies \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{x_n} \end{aligned}$$

► Cas des fonctions :

$$\begin{aligned} f \sim_a g &\iff f =_a g + o(g) \\ f \sim_a g \text{ et } g \sim_a h &\implies f \sim_a h \\ f \sim_a g \text{ et } h \sim_a \varphi &\implies f \times h \sim_a g \times \varphi \\ f \sim_a g \text{ et } h \sim_a \varphi &\implies \frac{f}{h} \sim_a \frac{g}{\varphi} \\ f \sim_a g \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow b]{} a &\implies f(\varphi(t)) \sim_{t \rightarrow b} g(\varphi(t)) \\ f \sim_a g \text{ et } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a &\implies f(u_n) \sim g(u_n) \end{aligned}$$

Attention !!!

- On ne somme pas les équivalents. Contre-exemple : $n+1 \sim n+2$ et $-n \sim -n$ mais $1 \not\sim 2$.
- On ne compose pas les équivalents. Contre-exemple : $n \sim n+1$ mais $e^n \not\sim e^{n+1}$.
- Quand on met à la puissance un équivalent, l'exposant doit être *constant*.

Contre-exemple : $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1$.

Formulaire – Développement limités usuels

► « Cœur ! » « Cœur ! » « Cœur ! »

$$\begin{aligned}
 e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
 \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
 \operatorname{ch}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
 \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
 \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
 \ln(1-x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
 \frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n \times x^n + o(x^n) \\
 \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \times \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
 \operatorname{Arctan}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
 (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha \times x + \frac{\alpha \times (\alpha-1)}{2!} \times x^2 + \cdots + \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-n+1)}{n!} \times x^n + o(x^n) \\
 \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3} \times x^3 + \frac{2}{15} \times x^5 + o(x^6)
 \end{aligned}$$

► *Formule de Taylor-Young* : soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}$, sur un intervalle I et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n en a et, de plus :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \times (x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} \times (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ou encore :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \times h + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} \times h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times h^n + o(h^n).$$

Formulaire – Développement en série entière usuels

► « Cœur ! » « Cœur ! » « Cœur ! »

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| < 1, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \times \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-n+1)}{n!} \times x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$