

# Mathématiques – Centrale/Mines – DS<sub>4</sub>

*Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).  
Numérotez chaque page de votre devoir.  
La calculatrice est interdite.*

## Exercice

Soit une matrice  $A \in \text{GL}_6(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$  et  $\text{tr}(A) = 8$ .

- Q1.** Montrer que  $A$  est diagonalisable.  
**Q2.** Déterminer une matrice  $D$  semblable à  $A$ .  
**Q3.** Donner un polynôme annulateur de degré 2 de  $A$ .  
**Q4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $A^n$  en fonction de  $A$  et  $I_6$ .

### Réponse

- Q1.** Le polynôme  $P = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$  est scindé à racines simples et est annulateur de  $A$ .  
Par théorème,

$A$  est diagonalisable.

- Q2.** On a montré dans la question précédente que  $A$  est semblable à une matrice  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$  diagonale dont les coefficients diagonaux sont 0, 1 ou 2.

Comme  $A$  est inversible,  $D$  est aussi inversible et les  $\lambda_i$  sont non nuls.

De plus,  $A$  et  $D$  sont semblables, donc ces matrices ont la même trace.

Or,  $\text{tr}(A) = 8$ , donc,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_6 = 8$ .

La seule possibilité est qu'il y ait 2 fois la valeur propre 2 et 4 fois la valeur propre 1 sur la diagonale de  $D$ .

Donc,  $A$  est semblable à

$$D = \text{diag}(2, 2, 1, 1, 1, 1).$$

- Q3.** Par la question précédente,  $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$ .  
Comme  $A$  est diagonalisable,

$$Q = (X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2 \text{ est annulateur de } A.$$

- Q4.** On écrit la division euclidienne de  $X^n$  par  $Q$  :

$$X^n = QT + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(Q).$$

Donc,  $R = aX + b$ .

On évalue la division euclidienne par 1 et par 2 :

$$1 = a + b \quad \text{et} \quad 2^n = 2a + b.$$

Donc,  $a = 2^n - 1$  et  $b = 2 - 2^n$ .

D'où,  $A^n = Q(A)T(A) + R(A)$ . Comme  $Q$  est annulateur de  $A$ ,

$$A^n = (2^n - 1).A + (2 - 2^n).I - 6.$$

# Problème 1 : Approximation uniforme des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques (Centrale 2025 PC)

## Notations

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers tels que  $a \leq b$  on note  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'ensemble des entiers  $k$  tels que  $a \leq k \leq b$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à  $n$  toute fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme

$$x \longmapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

où, pour tout  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ . On note  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $n$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note  $\mathcal{C}_{2\pi}^0$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{C}_{2\pi}^1$  le sous-espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$   $2\pi$ -périodiques. Pour  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $h > 0$ , on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

## Partie A – Préliminaires

**Q5.** Montrer que si  $g$  est la fonction sinus, alors, pour tout  $h > 0$ ,  $\omega_g(h) \leq h$ .

**Q6.** Montrer que, pour tous  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $h > 0$ ,  $\omega_g(h)$  est un réel bien défini.

**Q7.** On suppose que  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ . Montrer que, pour tout  $h > 0$ ,  $\omega_g(h) \leq h \|g'\|_\infty$ . En déduire que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ .

On admet que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$  est vrai pour tout  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

Soit  $h$  et  $h'$  deux réels strictement positifs et soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ .

**Q8.** Montrer que, si  $h \leq h'$ , alors  $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$ .

**Q9.** Montrer que  $\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$ .

**Q10.** En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 et pour tout réel  $\lambda$  strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leq n \omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda) \omega_g(h).$$

**Q11.** Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

**Q12.** Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $p \in \mathcal{T}_n$ , on note  $\Delta(p)$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que  $\Delta$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{T}_n$ .

**Réponse**

**Q5.** La fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|g'(t)| = |\cos(t)| \leq 1$ .

Par inégalité des accroissements finis, pour tous  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $|g(t) - g(s)| \leq |t - s|$ .

Soit  $h > 0$ , alors pour tous  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|t - s| \leq h$  on a  $|g(s) - g(t)| \leq h$ .

Ainsi,

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)| \leq h.$$

**Q6.** Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

Comme  $g$  est continue sur le segment  $[0, 2\pi]$ , par théorème des bornes atteintes,  $g$  est bornée sur  $[0, 2\pi]$ .

Par  $2\pi$ -périodicité, on en déduit que  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  : il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|g(t)| \leq M$ .

Pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $|g(s) - g(t)| \leq 2M$ .

Soit  $h > 0$  fixé, l'ensemble  $A = \{|g(s) - g(t)|, (t, s) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } |t - s| \leq h\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée, donc, par théorème de la borne supérieure,  $A$  possède une borne supérieure.

Donc,

$\omega_g(h)$  est bien défini.

**Q7.** On sait que  $g' \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ . Par **Q6**,  $g'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, par inégalité des accroissement fini, pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|g(t) - g(s)| \leq \|g'\|_{\infty} |t - s|.$$

Soit  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|t - s| \leq h$ . On a :

$$|g(t) - g(s)| \leq h \|g'\|_{\infty}.$$

Ainsi,

$$\omega_g(h) \leq h \|g'\|_{\infty}.$$

On a :

$$0 \leq \omega_g(h) \leq h \|g'\|_{\infty}.$$

Par théorème d'encadrement,

$$\omega_g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

**Q8.** Soit  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|t - s| \leq h$ .

On a  $|t - s| \leq h'$ , donc,

$$|g(t) - g(s)| \leq \omega_g(h').$$

Donc, par définition de borne supérieure,

$$\omega_g(h) \leq \omega_g(h').$$

**Q9.** Soient  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $|s - t| \leq h + h'$ . On note  $u = \frac{h'}{h + h'}s + \frac{h}{h + h'}t$ .

On a :

$$|s - u| = \left| s - \frac{h'}{h + h'}s - \frac{h}{h + h'}t \right| = \left| \frac{h}{h + h'}(s - t) \right| \leq \frac{h}{h + h'}(h + h') = h,$$

donc,  $|g(s) - g(u)| \leq \omega_g(h)$ .

De même, on montre que  $|u - t| \leq h'$ , donc,  $|g(u) - g(t)| \leq \omega_g(h')$ .

Par inégalité triangulaire,

$$|g(s) - g(t)| = |g(s) - g(u) - (g(t) - g(u))| \leq |g(s) - g(u)| + |g(u) - g(t)| \leq \omega_g(h) + \omega_g(h').$$

Ceci est vrai pour tout  $(s, t)$  tel que  $|s - t| \leq h + h'$ . Donc,

$$\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h').$$

**Q10.** On raisonne par récurrence.

**Initialisation.** pour  $n = 1$ , l'inégalité est une égalité.

**Hérédité.** Soit  $n \geq 1$ . On suppose que  $\omega_g(nh) \leq n \omega_g(h)$ .

Par la question précédente,

$$\omega_g((n+1)h) = \omega_g(nh + h) \leq \omega_g(nh) + \omega_g(h).$$

Par hypothèse de récurrence

$$\omega_g((n+1)h) \leq n \omega_g(h) + \omega_g(h) \leq (n+1) \omega_g(h).$$

Ainsi,

$$\text{pour tout } n \geq 1, \omega_g(nh) \leq n \omega_g(h).$$

Soit  $\lambda > 0$ . On a  $\lambda \leq 1 + [\lambda]$ . Par **Q8**,

$$\omega_g(\lambda h) \leq \omega_g((1 + [\lambda])h).$$

De plus,  $1 + [\lambda] \in \mathbb{N}^*$ , donc,

$$\omega_g(\lambda h) \leq \omega_g((1 + [\lambda])h) \leq (1 + [\lambda]) \omega_g(h).$$

Comme  $[\lambda] \leq \lambda$  et  $\omega_g(h) \geq 0$ , on a :

$$\omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda) \omega_g(h).$$

**Q11.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par relation de Chasles,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt + \int_{\pi}^{\pi+x} g(t) dt.$$

On applique le changement de variable  $u = t - 2\pi$  :  $du = dt$  et  $\frac{t}{u} \left| \begin{array}{c} \pi \\ -\pi \end{array} \right. \frac{\pi+x}{-\pi+x}$ . Donc,

$$\int_{\pi}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{-\pi+x} g(u + 2\pi) du.$$

Comme  $g$  est  $2\pi$ -périodique :

$$\int_{\pi}^{\pi+x} g(t) dt = - \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(u) du.$$

Donc,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

**Q12.** Soit  $p \in \mathcal{T}_n$ . La fonction  $p$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $t \mapsto p(x-t)g(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc en particulier sur le segment  $[-\pi, \pi]$ . On en déduit que

$$\Delta(p)(x) \text{ est bien défini.}$$

Soit  $(p, q) \in \mathcal{T}_n^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Par linéarité de l'intégrale, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Delta(\lambda p + \mu q)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda p + \mu q)(x-t)g(t) dt = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt + \mu \int_{-\pi}^{\pi} q(x-t)g(t) dt = \lambda \Delta(p)(x) + \mu \Delta(q)(x).$$

Donc,

$$\Delta \text{ est linéaire.}$$

On note  $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  avec  $c_k \in \mathbb{C}$  pour tout  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ . D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik(x-t)} \right) g(t) dt = \sum_{k=-n}^n c_k \underbrace{\left( \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt \right)}_{=d_k \in \mathbb{C}} e^{ikx}.$$

Donc,  $\Delta(p) \in \mathcal{T}_n$ . Ainsi,

$\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathcal{T}_n$ .

## Partie B –

### I – La fonction $J_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $\varphi_n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  en posant, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q13.** Montrer que pour tout réel  $t$  n'appartenant pas à  $2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left( \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^4.$$

**Q14.** Montrer que  $\varphi_n^2$  appartient à  $\mathcal{T}_n$ , puis que  $f_n$  appartient à  $\mathcal{T}_{2n}$ .

**Q15.** Montrer qu'il existe un réel strictement positif  $c_n$  tel que  $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose désormais  $J_n = c_n f_n$ , de sorte que  $J_n$  est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1.$$

### Réponse

**Q13.** Soit  $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ . On sait alors que  $e^{it} \neq 1$ , donc par somme de termes en progression géométrique,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n (e^{it})^k = e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t} (-2i) \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{e^{i\frac{1}{2}t} (-2i) \sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Donc, par formule d'Euler,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}.$$

D'où,

$$f_n(t) = \varphi_n(t)^4 = \left( \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4.$$

**Q14.** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$(\varphi_n(t))^2 = e^{-nit} \left( \sum_{k=0}^n e^{ikt} \right)^2 = e^{-nit} \left( \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n e^{ikt} e^{i\ell t} \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n e^{i(k+\ell-n)t}.$$

Or pour tout  $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  on a  $k + \ell - n \in \llbracket -n, n \rrbracket$  donc  $\varphi_n^2$  est une combinaison linéaire des fonctions  $t \mapsto e^{ikt}$  avec  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ . Donc,

$$\varphi_n^2 \mathcal{T}_n.$$

Donc, il existe  $(c_k)_{-n \leq k \leq n}$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_n^2(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$ .

Donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(\varphi_n(t))^4 = \left( \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \right)^2 = \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n c_k c_\ell e^{i(k+\ell)t}.$$

De plus, pour tout  $(k, \ell) \in \llbracket -n, n \rrbracket^2$ , on a  $k + \ell \in \llbracket -2n, 2n \rrbracket$ , donc,

$$\varphi_n^4 \in \mathcal{T}_{2n}.$$

**Q15.** La fonction  $f_n$  est continue et positive sur  $[-\pi, \pi]$ , et n'est pas identiquement nulle, donc  $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt > 0$ .

$$\text{En notant } c_n = \left( \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt \right)^{-1} > 0, \text{ on a bien } \int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1.$$

## II – Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q16.** Montrer que  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}$ .

**Q17.** Montrer que pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$ .

**Q18.** En déduire  $\int_0^{\pi} t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^3} du$ .

**Q19.** En déduire également que  $\int_0^{\pi} f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^4} du$ .

**Q20.** Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}$ .

### Réponse

**Q16.** Par **Q15**, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |t| f_n(t) dt}{\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt}.$$

De plus, les fonctions  $t \mapsto f_n(t)$  et  $t \mapsto |t| f_n(t)$  sont paires, donc,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| f_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} t f_n(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} f_n(t) dt.$$

Ainsi,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}.$$

**Q17.** La fonction  $\sin$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et, pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin''(t) = -\sin(t) \leq 0$ .

Donc,  $\sin$  est concave sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

On en déduit que sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , le graphe  $\sin$  est sous sa tangente en  $(0,0)$ . Cette tangente a pour équation  $y = \sin'(0)(t-0) + \sin(0)$ , autrement dit  $y = t$ . Donc,

$$\sin(t) \leq t.$$

De plus, par concavité, le graphe de  $\sin$  est au dessus de sa corde reliant les points de coordonnées  $(0, \sin(0)) = (0,0)$  et  $\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

Cette corde a pour équation :  $y = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \times (t-0) + \sin(0)$ , autrement dit,  $y = \frac{2}{\pi} t$ .

Donc,

$$\frac{2}{\pi} t \leq \sin(t).$$

**Q18.** Soit  $t \in ]0, \pi]$ . On a  $\frac{t}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Donc, par la question précédente,

$$\frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2}} \leq \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{\pi}}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^{\pi} t f_n(t) dt = \int_0^{\pi} t \left( \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 dt \leq \pi^4 \int_0^{\pi} \frac{\left(\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)\right)^4}{t^3} dt.$$

En utilisant le changement de variable  $u = \frac{n+1}{2} t$ , il vient :

$$\pi^4 \int_0^{\pi} \frac{\left(\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)\right)^4}{t^3} dt = \pi^4 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{\left(\frac{2u}{(n+1)}\right)^3} \frac{2 du}{n+1} = \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^3} du.$$

**Q19.** De même, pour tout  $t \in ]0, \pi]$ , on a :  $\sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}$ .

En utilisant le changement de variable  $u = \frac{n+1}{2} t$ , il vient :

$$\int_0^{\pi} f_n(t) dt \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^4} dt = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{\left(\frac{2u}{(n+1)}\right)^4} \frac{2 du}{n+1} = 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^4} du.$$

**Q20.** La fonction  $\theta : u \mapsto \frac{(\sin(u))^4}{u^3}$  est continue  $]0, +\infty[$ . De plus,

- $\theta(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \underset{u \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ . Donc,  $\theta$  est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0.
- $\theta(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^3}\right)$  où  $u \mapsto \frac{1}{u^3}$  est intégrable en  $+\infty$  (intégrale de Riemann avec  $3 > 1$ ). Donc, par théorème de comparaison,  $\theta$  est intégrable en  $+\infty$ .

Donc,  $\theta$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , et comme  $\theta$  est positive, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^3} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{(\sin(u))^4}{u^3} du.$$

De même, la fonction  $u \mapsto \frac{(\sin(u))^4}{u^4}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , et est positive, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^4} du \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^4} du \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit ainsi que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt} \leq \frac{\pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^3} du}{2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^4} du} \leq \frac{\pi^4}{8(n+1)} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(u))^4}{u^3} du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^4} du}.$$

En notant  $a = \frac{\pi^4}{8} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(u))^4}{u^3} du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^4} du} > 0$  (les intégrales sont bien strictement positives car les intégrandes sont positives continues et différentes de la fonction nulle), on a bien, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}.$$

### III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $T_n g$  en posant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t) dt.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q21.** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t) dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x) dt.$$

$$\text{En déduire que } |T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt.$$

**Le cas  $\mathcal{C}^1$**

On suppose, seulement dans cette question, que  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ .

**Q22.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T_n g - g\|_{\infty} \leq \frac{a \|g'\|_{\infty}}{n+1},$$

où le réel  $a$  a été défini à la question ??

**Q23.** Conclure que  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Le cas  $\mathcal{C}^0$**

Dans cette question, on ne suppose plus que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On rappelle le résultat admis à la question ?? :  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ .

**Q24.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous réels  $t$  et  $x$ ,

$$|g(x-t) - g(x)| \leq (1+n|t|)\omega_g(1/n).$$

**Q25.** En déduire qu'il existe  $b > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n).$$

**Q26.** Conclure que la suite  $(T_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Réponse

**Q21.** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On applique le changement de variable  $u = x - t$  :

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t)g(t)dt = \int_{x-\pi}^{x-\pi} J_n(u)g(x-u)(-du) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} J_n(u)g(x-u)du.$$

Les fonctions  $J_n$  et  $g$  étant  $2\pi$ -périodiques, la fonction  $u \mapsto J_n(u)g(x-u)$  l'est également et d'après ??

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)g(x-t)dt.$$

On sait que  $\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)dt = 1$ , donc en multipliant par  $g(x)$  (constante vis à vis de  $t$ ), on a :

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)g(x)dt.$$

Par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire, on a :

$$|T_n g(x) - g(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)(g(x-t) - g(x))dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)|g(x-t) - g(x)|dt.$$

**Q22.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ , on a  $|(x-t) - x| = |t| \leq |t|$ . Donc, d'après ??,  $|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|) \leq |t| \|g'\|_\infty$ .

Donc, par ??,

$$|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)|t| \|g'\|_\infty dt \leq \frac{\alpha \|g'\|_\infty}{n+1}.$$

Ceci est vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq \frac{\alpha \|g'\|_\infty}{n+1}.$$

**Q23.** Par théorème d'encadrement, la question précédente donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n g - g\|_\infty = 0$ .

Autrement dit, la suite de fonctions  $(T_n g)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

On sait que  $J_n \in \mathcal{T}_{2n}$ . Donc, d'après ?? que  $T_n g \in \mathcal{T}_{2n}$ .

Ainsi,

$(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q24.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ . Comme dans le cas  $\mathcal{C}^1$ , on a :  $|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|)$ .

Par ?? avec  $\lambda = n|t|$  et  $h = \frac{1}{n}$ , on a :

$$|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g\left(n|t| \cdot \frac{1}{n}\right) \leq (1+n|t|)\omega_g(1/n).$$

**Q25.** On en déduit alors que, pour  $n$  et  $x$  fixés,

$$|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)(1+n|t|)\omega_g(1/n)dt = \left(1+n \int_{-\pi}^{\pi} |t|J_n(t)dt\right)\omega_g(1/n).$$

D'où, par ??, on a :

$$|T_n g(x) - g(x)| \leq \left(1 + \frac{an}{n+1}\right) \omega_g(1/n) \leq \underbrace{(1+a)}_{=b} \omega_g(1/n).$$

Ceci étant vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n).$$

**Q26.** On a admis que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_g(1/n) = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n g - g\|_\infty = 0$ .

la suite  $(T_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Problème 2 : Théorème de Perron-Frobenius (X-ENS 2017 PC)

Dans le problème,  $n$  est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $\llbracket 1, n \rrbracket$  désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et  $n$ .

$\mathbb{C}$  désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe  $z$  est noté  $|z|$ .

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ) désigne l'espace des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (resp. dans  $\mathbb{R}$ ).

La matrice transposée d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  est notée  $M^\top$ .

$\mathbb{C}^n$  est identifié à l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  des matrices colonnes à  $n$  lignes et à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Les coefficients d'un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  sont notés  $x_1, \dots, x_n$ . Dans tout le problème,  $\mathbb{C}^n$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Pour tous  $x \in \mathbb{C}^n$  et  $y \in \mathbb{C}^n$ , la matrice  $x^\top y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  est identifiée au nombre complexe  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  engendré par un vecteur  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  est noté  $\mathbb{C}v$ .

Lorsque  $m = n$ , on utilisera la notation  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) pour  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ).

La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On note  $I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \quad (1)$$

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sera en général identifiée à l'endomorphisme  $\varphi_M$  de  $\mathbb{C}^n$  représenté par  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  : pour  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\varphi_M(x) = Mx$ . On appelle spectre d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et on note  $\text{Sp}(M)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $M$ . Le rayon spectral de  $M$ , noté  $\rho(M)$ , est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de  $M$  :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(M)\}.$$

### Première partie

**Q27.** Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et tout nombre réel  $C \geq 0$ , montrer l'équivalence

$$\|M\| \leq C \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

**Q28.** Montrer que l'application  $M \mapsto \|M\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Q29.** Montrer que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Q30.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $a_{i,j}$  le coefficient de  $A$  d'indice de ligne  $i$  et d'indice de colonne  $j$ . Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

**Q31.** On dit qu'une suite  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  converge vers une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  lorsque

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite  $(A^{(k)})$  converge vers  $B$  si et seulement si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - B\| = 0$ .

On considère dans cette question une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel  $b > 0$ , on pose  $P_b = \text{diag}(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q32.** Calculer  $P_b^{-1} A P_b$ . Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre  $b$  vers 0 ?

**Q33.** Montrer qu'il existe  $b > 0$  tel que

$$\|P_b^{-1} A P_b\| < 1.$$

**Q34.** En déduire que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

### Réponse

**Q27.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $C > 0$ .

( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $\|M\| \leq C$ , autrement dit,  $\sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$ .

Par définition de la borne supérieure, pour tout  $x$  non nul de  $\mathbb{C}^n$ , on a la majoration  $\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$ .

En multipliant par  $\|x\|_1 \geq 0$ , on a :  $\|Mx\|_1 \leq C \|x\|_1$ .

L'inégalité est encore vraie pour  $x = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) On suppose que  $\forall x \in \mathbb{C}^n, \|Mx\|_1 \leq C \|x\|_1$ .

Pour  $x \in \mathbb{C}^n$  non nul, on a  $\|x\|_1 > 0$ , donc,  $\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$ .

Par définition de la borne supérieure, on a

$$\|M\| \leq C.$$

Ainsi,

$$\|M\| \leq C \iff \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C \|x\|_1.$$

**Q28.** Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- On commence par justifier que  $\|M\|$  existe. En notant  $K = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$  et  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\|x\|_1 = 1$ .

Le coefficient de la ligne  $i$  de  $Mx$  est  $\sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j$ .

De plus,

$$\left| \sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n K |x_j| \leq K \|x\|_1 \leq K.$$

Donc,  $\{\|Mx\|_1 \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1 = 1\}$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ , donc,  $\|M\|$  existe.

- De plus,  $\|M\| \geq 0$ .
- Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $\|M\| = 0$ .  
Pour tout  $x \in \mathbb{C}^n$  non nul,  $0 \leq \|Mx\|_1 \leq 0$ , donc,  $\|Mx\|_1 = 0$ .  
Donc,  $Mx = 0$ .

En prenant  $x = e_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique,  $Me_i$  est la  $i$ -ème colonne de  $M$ , cette colonne est nulle.

Donc,  $M = 0$ .

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\|\lambda.M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|\lambda.Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} |\lambda| \|Mx\|_1.$$

Comme  $|\lambda| \geq 0$ ,

$$\|\lambda.M\| = |\lambda| \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = |\lambda| \|M\|.$$

- Soient  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . L'inégalité triangulaire pour la norme  $\|\cdot\|_1$  donne

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|(M+N)x\|_1 \leq \|Mx\|_1 + \|Nx\|_1 \leq \|M\| \times \|x\|_1 + \|N\| \times \|x\|_1.$$

Par **Q27**, on a  $\|M+N\| \leq \|M\| + \|N\|$ .

Ainsi,

$\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Q29.** Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On applique **Q27** avec  $C = \|A\|$ , puis  $C = \|B\|$  :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|(AB)x\|_1 \leq \|A\| \times \|Bx\|_1 \leq \|A\| \times \|B\| \times \|x\|_1.$$

Donc, par **Q27**,

$$\|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

**Q30.** Posons  $K = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$ . On note  $j_0$  un indice qui réalise ce maximum.

On note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . On a :

$$Ae_{j_0} = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \|Ae_{j_0}\|_1.$$

Or,  $\|e_{j_0}\|_1 = 1$  donc,  $\boxed{K = \frac{\|Ae_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} \leq \|A\|}.$

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ . On a :

$$Ax = A \times \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n x_j \times Ae_j$$

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \times \|Ae_k\|_1$$

Or,  $\|Ae_j\|_1 \leq \|A\| \|e_j\|_1$ .

Donc,

$$\|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq K.$$

Donc,

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \times K = K \times \|x\|_1$$

Par **Q27**,  $\|A\| \leq K$ .

Ainsi,

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

**Q31.** On suppose que la suite  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice  $B$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on remarque l'encadrement

$$0 \leq \|A^{(k)} - B\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}|.$$

Chaque terme du membre de droite tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$  donc, par théorème d'encadrement,

$$\|A^{(k)} - B\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Réciproquement, on suppose que  $\|A^{(k)} - B\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$0 \leq |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}| \leq \sum_{s=1}^n |a_{s,j}^{(k)} - b_{s,j}| \leq \|A^{(k)} - B\|.$$

Donc, par théorème d'encadrement,  $a_{i,j}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} b_{i,j}$ .

Donc, la suite  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice  $B$ .

**Q32.** Le calcul donne

$$P_b^{-1}AP_b = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ba_{1,2} & b^2a_{1,3} & \cdots & b^{n-1}a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & ba_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b^2a_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ba_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$P_b^{-1}AP_b \xrightarrow{b \rightarrow 0} \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}).$$

**Q33.** D'après l'inégalité triangulaire, pour tout  $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$|\|M\| - \|N\|| \leq \|M - N\|.$$

Donc,  $\|\cdot\|$  est une fonction 1-lipschitzienne, donc est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Donc,  $\|P_b^{-1}AP_b\| \xrightarrow{b \rightarrow 0} \|\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})\|$ .

Or,  $\|\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})\| = \max_{1 \leq j \leq n} (|a_{j,j}|) < 1$ .

Donc, par définition de limite, il existe  $b > 0$  tel que,

$$\|P_{b_0}^{-1}AP_{b_0}\| < 1.$$

**Q34.** On a :

$$0 \leq \|A^k\| = \|P_b P_b^{-1} A^k P_b P_b^{-1}\|.$$

Par **Q29**,

$$0 \leq \|A^k\| = \|P_b P_b^{-1} A^k P_b P_b^{-1}\| \leq \|P_b\| \|P_b^{-1} A^k P_b\| \|P_b^{-1}\|.$$

Or,

$$\|P_b^{-1} A^k P_b\| = \|(P_b^{-1} A P_b)^k\|.$$

Par récurrence et **Q29**, on a :

$$0 \leq \|P_b^{-1} A^k P_b\| \leq (\|P_b^{-1} A P_b\|)^k.$$

Comme  $0 \leq \|P_b^{-1} A P_b\| < 1$ , on a :  $(\|P_b^{-1} A P_b\|)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc, par théorème d'encadrement,

$$\|P_b^{-1} A^k P_b\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \|A^k\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par **Q31**,

la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

## Deuxième partie

**Q35.** Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Q36.** Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ .

i)  $\rho(\mu A) = |\mu| \rho(A)$

ii)  $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ .

iii)  $\rho(AB) \leq \rho(A) \rho(B)$ .

iv) Pour  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible,  $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$ .

v)  $\rho(A^\top) = \rho(A)$ .

**Q37.** Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Dans les questions ?? à ??, on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Q38.** Montrer que si  $\rho(A) < 1$ , alors la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

**Q39.** Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|A^k\| \geq \rho(A)^k$ .

**Q40.** On définit la partie de  $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \left\{ \alpha > 0 \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{A}{\alpha} \right)^k = 0 \right\}.$$

Montrer que  $E_A = ]\rho(A), +\infty[$ .

**Q41.** Montrer la formule

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A).$$

**Q42.** Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de coefficients  $a_{i,j}$ , on pose  $A_+ = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , où  $b_{i,j} = |a_{i,j}|$ . Montrer l'inégalité

$$\rho(A) \leq \rho(A_+).$$

### Réponse

**Q35.** Pour la matrice  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_1) = \{0; 1\}$  donc  $\rho(A_1) = 1$ .

Pour la matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_2) = \{0\}$  donc  $\rho(A_2) = 0$ .

Pour la matrice  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_3) = \{0; 1\}$  donc  $\rho(A_3) = 1$ .

Pour la matrice  $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_4) = \{i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\}$  donc  $\rho(A_4) = \sqrt{2}$ .

Pour la matrice  $A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , on trouve  $\text{Sp}(A_5) = \{1; 4\}$  donc  $\rho(A_5) = 4$ .

**Q36.** Montrons (i)

- Cas 1 :  $\mu = 0$ . On a  $\text{Sp}(0 \times A) = \text{Sp}(0) = \{0\} = \{\mu x; x \in \text{Sp}(A)\}$ .
- Cas 2 :  $\mu \neq 0$ .

$$\chi_{\mu A}(\lambda) = \det(\lambda I_n - \mu A) = \mu^n \det\left(\frac{\lambda}{\mu} I_n - A\right) = \mu^n \chi_A\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Donc,  $\lambda \in \text{Sp}(\mu A)$  si, et seulement si,  $\frac{\lambda}{\mu} \in \text{Sp}(A)$ .

Donc,

$$\text{Sp}(\mu A) = \{\mu x; x \in \text{Sp}(A)\}.$$

Donc, comme  $|\mu| \geq 0$ ,

$$\rho(\mu A) = \max\{|\mu \lambda|; \lambda \in \text{Sp}(A)\} = |\mu| \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(A)\} = |\mu| = |\mu| \rho(A).$$

$$\text{Sp}(\mu A) = \{\mu x; x \in \text{Sp}(A)\}.$$

L'assertion (ii) est fausse. On peut prendre  $A = A_2$  et  $B = A_2^\top$ , ce qui donne  $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dans ce cas, on a donc  $\rho(A + B) = 1$  et  $\rho(A) + \rho(B) = 0$  donc  $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$ .

L'assertion (iii) est fausse. On peut prendre  $A = A_2$  et  $B = A_2^\top$ , ce qui donne  $AB = A_1$ .

Dans ce cas, on a donc  $\rho(AB) = 1$  et  $\rho(A)\rho(B) = 0$  donc  $\rho(AB) > \rho(A)\rho(B)$ .

Montrons (iv).

Les matrices  $A$  et  $P^{-1}AP$  sont semblables, donc ont le même polynôme caractéristique, donc  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(P^{-1}AP)$ .

Donc,  $\rho(A) = \rho(P^{-1}AP)$ .

Montrons (v).

On a  $\chi_{A^\top} = \det(X I_n - A^\top) = \det((X I_n - A^\top)^\top) = \det(X I_n - A) = \chi_A$ .

Donc,  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A^\top)$ . Donc,  $\rho(A) = \rho(A^\top)$ .

**Q37.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$ . Soit  $x$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Les relations  $Ax = \lambda x$  et  $x \neq 0$  donnent

$$|\lambda| = \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Donc, par définition de la borne supérieur,

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

**Q38.** On fait l'hypothèse  $\rho(A) < 1$ . Comme  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

Donc, par théorème, la matrice  $A$  est trigonalisable : il existe une matrice  $P$  inversible  $T$  une matrice triangulaire supérieure telles que la matrice  $A = PTP^{-1}$ .

De plus, les coefficients diagonaux de  $T$  sont les valeurs propres de  $A$ , donc leurs modules sont strictement inférieurs à 1.

Par **Q34**,  $T^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

De plus, l'application  $f : M \mapsto PMP^{-1}$  est linéaire en dimension finie, donc par théorème,  $f$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  
Donc,  $f(T^k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} f(0) = 0$ .

Or,  $f(T^k) = PT^kP^{-1} = (PTP^{-1})^k = A^k$ .

Ainsi,

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Q39.** Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$ . Soit  $x$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .  
Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On trouve

$$A^k x = A^{k-1} \lambda x = A^{k-2} \lambda^2 x = \dots = \lambda^k x.$$

Comme  $x \neq 0$ , on a :  $|\lambda^k| = \|A^k x\|_1 / \|x\|_1$  donc

$$\rho(A)^k \leq \|A^k\|.$$

**Q40.** Soit  $\alpha \in ]0, \rho(A)]$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\left\| \left( \frac{A}{\alpha} \right)^k \right\| = \frac{\|A^k\|}{\alpha^k} \geq \left( \frac{\rho(A)}{\alpha} \right)^k \geq 1.$$

Donc,  $\|(A/\alpha)^k\|$  ne tend vers pas 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , donc  $\alpha \notin E_A$ .

Soit  $\alpha \in ]\rho(A), +\infty[$ . Par **Q36**,  $\rho(A/\alpha) = \rho(A)/\alpha < 1$ .

Donc, par **Q38**,  $(A/\alpha)^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Donc,  $\alpha \in E_A$ .

Ainsi,

$$E_A = ]\rho(A), +\infty[.$$

**Q41.** Par **Q39**, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après **Q40**, la suite de matrices de terme général  $\left( \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon} \right)^k$  tend vers la matrice nulle. Il existe donc un entier  $N \geq 1$  tel que

$$\forall k \geq N, \quad \left\| \frac{A^k}{(\rho(A) + \varepsilon)^k} \right\| \leq 1,$$

donc,  $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ .

On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geq k_\varepsilon, \quad \rho(A) - \varepsilon \leq \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

**Q42.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$A^k = \left( a_{i,j}^{(k)} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{et} \quad A_+^k = \left( b_{i,j}^{(k)} \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , notons  $\mathcal{H}_k$

$$\llcorner \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \left| a_{i,j}^{(k)} \right| \leq b_{i,j}^{(k)}. \gg$$

**Initialisation.**  $k = 1$ . Il n'y a rien à faire.

**Hérédité.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $\mathcal{H}_k$  et on montre  $\mathcal{H}_{k+1}$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Par définition du produit matriciel,

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^n a_{i,l} a_{l,j}^{(k)}.$$

Par inégalité triangulaire puis hypothèse de récurrence,

$$\left| a_{i,j}^{(k+1)} \right| \leq \sum_{l=1}^n \underbrace{\left| a_{i,l} \right|}_{=b_{i,l}} \underbrace{\left| a_{l,j}^{(k)} \right|}_{\leq b_{l,j}^{(k)}} \leq \sum_{l=1}^n b_{i,l} b_{l,j}^{(k)} = b_{i,j}^{(k+1)}.$$

Donc,  $\mathcal{H}_{k+1}$ .

Ce qui achève la récurrence. On a : pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\sum_{i=1}^n \left| a_{i,j}^{(k)} \right| \leq \sum_{i=1}^n b_{i,j}^{(k)} \leq \|A_+^k\|.$$

Donc,

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n \left| a_{i,j}^{(k)} \right| \leq \|A_+^k\|.$$

D'où,

$$\|A^k\|^{1/k} \leq \|A_+^k\|^{1/k}$$

Donc, en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , on a

$$\rho(A) \leq \rho(A_+).$$

– Fin du sujet –