

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -Résoudre sur I les équations différentielles suivantes :

- $(x^2 + 1)y' - xy = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ avec $I = \mathbb{R}$.
- $x^2y' + xy = x^2 + \ln x$ avec $I =]0; +\infty[$.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction]

On considère l'équation

$$(x - 1)y' + y = \cos(x - 1) \quad (E)$$

sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$.

- Montrer qu'une solution particulière de l'équation est $y_p : x \in I \mapsto \frac{\sin(x - 1)}{x - 1}$
- En déduire l'ensemble de toutes les solutions de (E)

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - Chercher - Raisonner -L'équation $\tan(x)y' + xy = \cos(x)e^x$ admet-elle une solution sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$?**EXERCICE 4:** [Indications] [Correction] - Calculer -

On considère l'équation

$$y' - 3y = x + 1$$

- Montrer qu'il existe une solution particulière polynomiale et la déterminer.
- En déduire la forme générale des solutions.

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] Les conditions initiales - Calculer - Raisonner -

- Soit $a \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe une unique solution φ à l'équation

$$y' - 3y = x + 1$$

sur $I = \mathbb{R}$ telle que $\varphi(1) = a$ et la déterminer.

- Déterminer l'ensemble des solutions de

$$(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$$

sur $I =]-1; +\infty[$ dont la courbe passe par le point $(0, 0)$ **EXERCICE 6:** [Indications] [Correction] - Calculer - Des équations supplémentairesRésoudre sur l'intervalle I donné les équations proposées

- $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$ où $I =]0; +\infty[$
- $(x - 1)y' + (y + 1)x = 0$ où $I =]1; +\infty[$
- $xy' - y = x^3 e^{x^2}$ où $I =]0; +\infty[$

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] Changement de fonction - Calculer - Raisonner -

- On considère l'équation (E) :

$$z' = z^2 + 2z$$

- Posons $w = 1/z$ définie sur un ensemble J où z ne s'annule pas.
Montrer que z ne s'annule jamais et que :
 z est solution de (E) ssi w vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 notée (U) que l'on déterminera.
 - En déduire l'ensemble des fonctions z solutions de (E) , définie sur l'intervalle le plus grand possible telles qu'elles ne s'annulent jamais.
- On considère maintenant l'équation

$$y' = (y - x)^2 \quad (E_2)$$

- Trouver une solution polynomiale P de cette équation.
- En posant $y = P + z$, vérifier que y est solution de (E_2) ssi z est solution de (E) puis résoudre alors (E_2) sur les intervalles où z ne s'annule pas.

Indications

Exercice 3 [Correction]

On pourra s'intéresser à la validité de l'équation en $x = 0$.

Exercice 5 [Correction]

- Ce sont la/les solutions φ telles que $\varphi(0) = 0$.

Exercice 1

1. $(x^2 + 1)y' - xy = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$:

- Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto C\sqrt{x^2 + 1} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière : La MVC donne une solution particulière y_P telle que

$$y_P(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$$

- Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{(C + x)\sqrt{x^2 + 1}} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

2. • Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto \frac{C}{x} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière de $x^2 y' + xy = x^2$:

Une solution polynômiale est $x \mapsto \frac{x}{2}$.

- Solution particulière de $x^2 y' + xy = \ln x$:

La MVC donne une solution particulière y_P telle que

$$y_P(x) = \frac{1}{2x} (\ln x)^2$$

D'où l'ensemble de solutions

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto \boxed{\frac{1}{x} \left(C + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right) + \frac{1}{2x}} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2

1. On réinjecte et on vérifie qu'on a bien

$$(x - 1)y'_p + y_p = \cos(x - 1)$$

2. $(x - 1)y' + y = \cos(x - 1)$:

- Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{C}{x - 1} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

- Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]1; +\infty[\mapsto \boxed{\frac{C - \sin(x - 1)}{x - 1}} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3

L'équation en $x = 0$ n'admet pas de solution car elle s'écrit $0 = 1$.

Il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Solution particulière de $y' - 3y = x + 1$: On trouve une solution polynômiale

$$y_P(x) = -\frac{x}{3} - \frac{4}{9}$$

2. • Solutions de l'équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{3x} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

- Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{Ce^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{4}{9}} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 5

1. L'ensemble des solutions générales de l'équation (déjà fait) est

$$\mathcal{S} = \{y : x \mapsto Ce^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{4}{9} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Soit $y : x \mapsto Ce^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$ une solution

$$\begin{aligned} y(1) = a &\Leftrightarrow Ce^3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{9} = a \\ &\Leftrightarrow C = e^{-3}\left(a + \frac{7}{9}\right) \end{aligned}$$

Étant donné qu'il s'agit d'une équivalence, on sait qu'il existe (sens $\Leftrightarrow$) une unique ($\Rightarrow$) fonction φ vérifiant la condition initiale $\varphi(1) = a$ demandée :

$$\boxed{\varphi : x \mapsto \left(a + \frac{7}{9}\right)e^{3x-3} - \frac{x}{3} - \frac{4}{9}}$$

2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x) :$

- Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]-1; +\infty[\mapsto \frac{\lambda}{1+x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière : La MVC donne une solution particulière y_0 telle que

$$y_P(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x}$$

- Conclusion générale : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]-1; +\infty[\mapsto \boxed{\frac{C}{1+x} + \ln(1+x)} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière : Soit $y \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{C}{1+0} + \ln(1+0) = 0 \\ &\Leftrightarrow C = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, il n'y a qu'une seule solution passant par le point $(0, 0)$:

$$\boxed{y : x \in]-1; +\infty[\mapsto \ln(1+x)}$$

Exercice 6

1. $(e^x - 1)y' + e^x y = 1 :$

- Résolution sur $]0; +\infty[$:

- ★ Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto \frac{C}{e^x - 1} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

- ★ Solution particulière : La MVC donne une solution particulière y_0 telle que

$$y_0(x) = x \frac{C}{e^x - 1}$$

- ★ Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_+ = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto \frac{C+x}{e^x - 1} \mid C \in \mathbb{R}\}}$$

2. $(x-1)y' + (y+1)x = 0 :$

L'équation s'écrit en fait

$$(x-1)y' + xy = -x$$

• Résolution sur $]1; +\infty[:$

★ Équation homogène :

Une primitive de $x \mapsto -\frac{x}{x-1}$ est $x \mapsto -x - \ln|x-1|$. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]1; +\infty[\mapsto C \frac{e^{-x}}{x-1} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

★ Solution particulière :

On pose $y_0 = \frac{e^{-x}}{x-1}$. La MVC donne une solution particulière $y_P = Cy_0$ telle que

$$C' = \frac{-x}{(x-1)y_0} = -xe^x$$

dont une primitive est

$$C = -e^x(x-1)$$

D'où la solution particulière

$$y_P(x) = -1$$

★ Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_{1+} = \{y : x \in]1; +\infty[\mapsto C \frac{e^{-x}}{x-1} - 1 \mid C \in \mathbb{R}\}$$

3. $xy' - y = x^3e^{x^2} :$

• Résolution sur $]0; +\infty[:$

★ Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto Cx \mid C \in \mathbb{R}\}$$

★ Solution particulière :

La MVC donne une solution particulière

$$y_P(x) = \frac{1}{2}xe^{x^2}$$

★ Conclusion :

$$\mathcal{S}_+ = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto x \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C \right) \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 7

1. a) Supposons que z ne s'annule pas. Par définition, $w = \frac{1}{z}$ ne peut s'annuler que si son numérateur vaut 0, ce qui ne peut pas être le cas. Donc

$$w \text{ ne s'annule jamais}$$

En dérivant $w = 1/z$, w on obtient

$$z' = w'/w^2$$

En réinjectant dans l'équation, on obtient y solution de (E) ssi z solution de

$$-w' = 1 + 2w$$

i.e.

$$(U) : w' + 2w = -1$$

- b) Les solutions de (U) étant

$$w = \lambda e^{-2x} - \frac{1}{2}$$

Ne devant pas s'annuler, on observe qu'on doit avoir

$$e^{-2x} \neq \frac{1}{2\lambda}$$

C'est-à-dire : ou bien $\lambda \leq 0$, ou bien

$$x \neq \frac{1}{2} \ln(2\lambda)$$

On obtient les solutions :

$$z = \frac{1}{\lambda e^{-2x} - \frac{1}{2}} \begin{cases} \text{définie sur } \mathbb{R} & \text{si } \lambda \leq 0 \\ \text{définir sur }]-\infty; \frac{1}{2} \ln(2\lambda)[\text{ ou }]\frac{1}{2} \ln(2\lambda); +\infty[& \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

Pour information : pour trouver les solutions qui s'annulent, il faut plus de théorie...

2. $y' = (y-x)^2 :$

a) Après résolution, on trouve $P = x + 1$.

b) z vérifiant (E) , et z ne s'annulant pas, d'après la question précédente, on en déduit que les solutions sont les fonctions :

$$y = 1 + x + \frac{1}{-\frac{1}{2} + \lambda e^{-2x}} \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & \text{avec } \lambda < 0 \\ \forall x \in]-\infty; \frac{1}{2} \ln(2\lambda)[\text{ ou }]\frac{1}{2} \ln(2\lambda); +\infty[& \text{avec } \lambda > 0 \end{cases}$$