

Systemes lineaires

Table des matieres

1	Définitions	2
1.1	Généralités	2
1.2	Systèmes particuliers	2
2	Opérations sur les lignes d'un système	4
2.1	Opérations élémentaires sur les lignes	4
2.2	Méthode du pivot de Gauss	6
3	Matrices et systèmes	7
3.1	Lien entre matrices et systèmes	7
3.2	Systèmes carrés	7
3.3	Utilisation de Python	8

1 Définitions

1.1 Généralités

Définition 1.1 : Système linéaire

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux familles de réels. On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ de coefficients $(a_{i,j})$ et de second membre (b_i) , le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,j} x_j + \dots + a_{1,p} x_p & = & b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,j} x_j + \dots + a_{2,p} x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,j} x_j + \dots + a_{i,p} x_p & = & b_i \\ & \vdots & \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,j} x_j + \dots + a_{n,p} x_p & = & b_n \end{cases}$$

Exemple 1. $\begin{cases} x - 3y + z & = & -1 \\ x + y & = & 2 \\ 2x + 6y - z & = & 0 \end{cases}$ est un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.

Exemple 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 8 \\ 2xy & = & -8 \end{cases}$ n'est pas un système linéaire.

Définition 1.2 : Solutions d'un système

Soit (S) un système linéaire, on appelle **solution de (S)** tout p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui est solution des équations de (S) . **Résoudre le système (S)** , c'est déterminer l'ensemble des solutions de (S) .

1.2 Systèmes particuliers

Définition 1.3 : Système compatible/incompatible

Un système (S) est dit **compatible** s'il possède au moins une solution $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.
Un système (S) est dit **incompatible** s'il ne possède pas de solution.

Exemple 3. $\begin{cases} 2x - y & = & 1 \\ 2x - y & = & 2 \end{cases}$ est un système linéaire incompatible.

Définition 1.4 : Système homogène

Un système (S) dont le second membre est nul (i.e. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_i = 0$) est dit **homogène**.

Exemple 4. $\begin{cases} 2x - y & = & 0 \\ -x + y + z & = & 0 \end{cases}$ est un système linéaire homogène de 2 équations à 3 inconnues.

Un système homogène est toujours compatible car $(0, 0, \dots, 0)$ est solution.

Définition 1.5 : Système homogène associé

Soit (S) un système linéaire, on appelle **système homogène associé** le système linéaire (S_0) dont les coefficients sont identiques à (S) et dont le second membre est nul (i.e. tous les (b_i) sont nuls).

$$(S_0) \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,j} x_j + \cdots + a_{1,p} x_p = 0 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,j} x_j + \cdots + a_{2,p} x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,j} x_j + \cdots + a_{i,p} x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,j} x_j + \cdots + a_{n,p} x_p = 0 \end{cases}$$

Définition 1.6 : Système de Cramer

On appelle **système de Cramer** un système linéaire de n équations à n inconnues qui admet une solution unique.

Exemple 5. Vérifier que le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ est un système de Cramer.

Solution.

Un système peut avoir une solution unique sans être un système de Cramer.

Exemple 6. Le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases}$ a une solution unique mais il y a plus d'équations que d'inconnues.

Proposition 1.7 : Système de Cramer

Soit (S) un système, on note (S_0) son système homogène associé.

$$(S) \text{ est un système de Cramer} \Leftrightarrow (S_0) \text{ est un système de Cramer}$$

Démonstration. Cette proposition se démontrera à l'aide des matrices et de la proposition 3.2. □

Définition 1.8 : Systèmes équivalents

Deux systèmes linéaires (S) et (S') sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Deux systèmes équivalents ont le même nombre d'inconnues (pas forcément le même nombre d'équations).

Exemple 7. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases}$ sont des systèmes équivalents.

Définition 1.9 : Système carré

Un système (S) est dit **carré** s'il a autant d'équations que d'inconnues.

Exemple 8. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ est un système carré.

Définition 1.10 : Système triangulaire

Un système (S) carré est dit **triangulaire** si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$. Autrement dit,

$$(S) \left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}x_i & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}x_i & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{i,i}x_i & + & \dots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \\ & & & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Les systèmes triangulaires sont faciles à résoudre par substitution.

Exemple 9. Résoudre le système triangulaire suivant par substitution :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 4 \\ 2y - 3z & = & 5 \\ -2z & = & 2 \end{array} \right.$$

Solution.

Proposition 1.11 : Système triangulaire

Soit (S) un système triangulaire,

(S) est un système de Cramer $\Leftrightarrow$ Tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Démonstration. $(\Leftarrow)$ La n ème ligne entraîne alors que $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$. On substitue ensuite x_n par sa valeur dans la $n - 1$ ème ligne, ce qui nous permet d'obtenir

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n}} b_n \right).$$

On remonte successivement les lignes et on calcule tour à tour $x_{n-2}, \dots, x_1$.

$(\Rightarrow)$ On ne fera pas de démonstration de cette implication, mais en raisonnant par l'absurde on observe que lorsqu'un coefficient diagonal est nul, il existe alors une substitution qui est soit incompatible, soit admet une infinité de solutions. $\square$

2 Opérations sur les lignes d'un système

2.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 2.1 : Opérations élémentaires sur les lignes

Soient (S) un système linéaire et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes. On appelle **opération élémentaire sur les lignes** de (S) toute opération d'un des types suivants avec $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

- (i) $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange de lignes)
- (ii) $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (multiplication par un scalaire non nul)
- (iii) $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ (addition d'un multiple d'une ligne à une autre)

Les deux dernières opérations peuvent se faire simultanément $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.2 : Opérations élémentaires sur les lignes

Soient (S) un système linéaire et (S') un système linéaire obtenu par opérations élémentaires successives. Alors (S) et (S') sont équivalents.

Démonstration. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que c'est le cas pour un système (S') obtenu après une seule opération élémentaire, pour chacun des trois types d'opérations élémentaires différentes. En effet, la transitivité de l'équivalence de systèmes permet ensuite de conclure pour un système (S') obtenu par opérations élémentaires successives.

Pour cela, il suffit de voir que, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$:

(i)

$$\begin{cases} a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,p} x_p = b_i \\ a_{j,1} x_1 + a_{j,2} x_2 + \dots + a_{j,p} x_p = b_j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{j,1} x_1 + a_{j,2} x_2 + \dots + a_{j,p} x_p = b_j \\ a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,p} x_p = b_i \end{cases}$$

(ii)

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,p} x_p = b_i \Leftrightarrow \alpha (a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,p} x_p) = \alpha b_i$$

(iii)

$$\begin{cases} a_{i,1} x_1 + \dots + a_{i,p} x_p = b_i \\ a_{j,1} x_1 + \dots + a_{j,p} x_p = b_j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{i,1} + \beta a_{j,1}) x_1 + \dots + (a_{i,p} + \beta a_{j,p}) x_p = b_i + \beta b_j \\ a_{j,1} x_1 + \dots + a_{j,p} x_p = b_j \end{cases}$$

Ce sont bien des équivalences, puisque pour chacune de ces opérations, on a une opération inverse : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$ et $L_i \leftarrow L_i - \beta L_j$. $\square$

Exemple 10.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x - y = 1 \\ 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow \frac{1}{6} L_2} \begin{cases} x - y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Une substitution est aussi une opération élémentaire, dans l'exemple ci-dessus la dernière équivalence correspond à $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$.

Exemple 11. On peut également résoudre le système de l'exemple précédent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 2(y + 1) + 4y = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 6y + 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant les opérations élémentaires (et uniquement celles-là), on s'assure que l'on garde des systèmes équivalents : les solutions trouvées à la fin sont exactement celles du système de départ. Si l'on perd l'équivalence à un moment, il faudra encore vérifier que les solutions trouvées sont bien solutions du premier système...

Toute résolution de système devra s'appuyer sur ces opérations. Pour s'assurer de ne pas perdre les équivalences, il est conseillé de n'effectuer qu'une seule opération à la fois.

Théorème 2.3 : Nombre de solutions d'un système linéaire

Il n'y a que 3 cas possibles pour l'ensemble des solutions d'un système linéaire : il y a soit aucune solution, soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène possède soit une unique solution (la solution nulle), soit une infinité de solutions.

Démonstration. Admis. $\square$

2.2 Méthode du pivot de Gauss

Méthode 2.4 : Pivot de Gauss

Soit (S) un système linéaire carré :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,j} x_j + \cdots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,j} x_j + \cdots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,j} x_j + \cdots + a_{i,n} x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,j} x_j + \cdots + a_{n,n} x_n = b_n \end{cases}$$

Pour résoudre le système linéaire (S) :

1. (a) On choisit une ligne avec le coefficient de x_1 non nul le plus simple (premier pivot), et on l'échange avec la première ligne.

$$(S) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_i} \begin{cases} a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,j} x_j + \cdots + a_{i,n} x_n = b_i \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,j} x_j + \cdots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,j} x_j + \cdots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,j} x_j + \cdots + a_{n,n} x_n = b_n \end{cases}$$

- (b) On utilise alors cette nouvelle première ligne pour éliminer l'inconnue x_1 des toutes les lignes suivantes : le pivot utilisé est ici $a_{i,1}$

$$\forall k \geq 2, L_k \leftarrow a_{i,1} L_k - a_{k,1} L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,j} x_j + \cdots + a_{i,n} x_n = b_i \\ \alpha_{2,2} x_2 + \cdots + \alpha_{2,j} x_j + \cdots + \alpha_{2,n} x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} x_2 + \cdots + \alpha_{n,j} x_j + \cdots + \alpha_{n,n} x_n = \beta_n \end{cases}$$

- (c) On ne touche plus à la première ligne jusqu'à la fin.
2. On ne s'intéresse désormais qu'aux $n - 1$ dernières lignes.
 - (a) On recommence en trouvant la ligne (autre que la première) qui a le coefficient de x_2 non nul le plus simple (second pivot), et on place cette ligne en seconde position.
 - (b) On utilise cette ligne pour éliminer l'inconnue x_2 de toutes les lignes suivantes.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + a_{i,3} x_3 + \cdots + a_{i,j} x_j + \cdots + a_{i,n} x_n = b_i \\ \alpha_{r,2} x_2 + \alpha_{r,3} x_3 + \cdots + \alpha_{r,j} x_j + \cdots + \alpha_{r,n} x_n = \beta_r \\ \gamma_{3,3} x_3 + \cdots + \gamma_{3,j} x_j + \cdots + \gamma_{3,n} x_n = \delta_3 \\ \vdots \\ \gamma_{n,3} x_3 + \cdots + \gamma_{n,j} x_j + \cdots + \gamma_{n,n} x_n = \delta_n \end{cases}$$

3. On continue jusqu'à ce qu'on obtienne un système triangulaire, que l'on sait résoudre facilement.

Exemple 12. Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + 5y - 3z = 2 \\ 2x + 7y - 4z = 3 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 4y - 3z = 5 \\ 3x + 5y - 2z = 3 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 4y - 3z = 5 \\ 3x + 5y - 2z = 15 \end{cases}$$

Solution.

3 Matrices et systèmes

3.1 Lien entre matrices et systèmes

Propriété 3.1 : *Représentation matricielle d'un système linéaire*

Soit un système linéaire de n équations à p inconnues de coefficients $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et de second membre $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

alors

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

La matrice A est appelée la **matrice associée** au système linéaire.

Résoudre un système revient donc à trouver le vecteur X connaissant la matrice A et le vecteur B .

Exemple 13. *Ecrire sous forme matricielle le système :*

$$\begin{cases} -x + 4y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \\ -y + z = 2 \end{cases}$$

Solution.

3.2 Systèmes carrés

Proposition 3.2 : *Inversibilité d'une matrice et systèmes linéaires carrés*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible,
- (ii) pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ est de Cramer,
- (iii) le système $AX = 0_{n,1}$ admet une solution unique (la colonne nulle).

Dans ce cas, pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ a une unique solution, donnée par

$$X = A^{-1}B$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) On multiplie $AX = B$ par A^{-1} pour obtenir l'unique solution $X = A^{-1}B$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On conclut en prenant $B = 0_{n,1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Cette implication sera démontrée dans le cours Matrices et applications linéaires. □

Si on connaît déjà la matrice inverse de A , la résolution du système devient plus rapide.

Exemple 14. *Résoudre le système suivant en utilisant l'inverse de la matrice associée au système :*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x + 4y = 11 \end{cases}$$

Solution.

Méthode 3.3 : Calcul de la matrice inverse

Pour déterminer si une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et trouver son inverse, il faudra résoudre le système linéaire associé avec un second membre quelconque. On le fera systématiquement pour $n \geq 3$.

Exemple 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ 3x + 4y = b \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + 2y = a \\ -2y = b - 3a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = b - 2a \\ y = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.4 : Rappel : Inversibilité d'une matrice triangulaire ou diagonale

Soit A une matrice triangulaire (ou diagonale) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tous les coefficients diagonaux de } A \text{ sont non nuls.}$$

Démonstration. D'après la proposition 3.2, on a

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Le système } AX = B \text{ est de Cramer.}$$

Or comme A est une matrice triangulaire, alors le système $AX = B$ est triangulaire. On conclut à l'aide de la proposition 1.11. $\square$

Exemple 16. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Solution.

3.3 Utilisation de Python

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère le système linéaire carré à n équations et n inconnues suivant

$$AX = B.$$

Informatique 3.5 : Python : système de Cramer

Si A est une matrice carrée inversible, alors d'après la proposition 3.2 le système est de Cramer. On peut alors utiliser la commande

```
import numpy.linalg as al
X=al.solve(A,B)
```


Exemple 17. On résout le système (S_1) de l'exemple 12 à l'aide de Python

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 2y + z &= 7 \\ x + 5y - 3z &= 2 \\ 2x + 7y - 4z &= 3 \end{cases}$$

On effectue

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A=np.array([[3,-2,1],[1,5,-3],[2,7,-4]])
B=np.array([[7],[2],[3]])
X=al.solve(A,B)
print(X)
```

Python renvoie alors $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Informatique 3.6 : Python : algorithme du pivot de Gauss

On peut sinon implémenter la méthode du pivot de Gauss. Il faut donc pouvoir échanger deux lignes et remplacer une ligne par une combinaison linéaire d'une autre ligne. Reprenons la méthode 2.4 du pivot de Gauss.

Comme Python numérote 0 la première ligne (et non 1), il y a un décalage d'indice, ainsi la ligne i est la ligne $i - 1$ pour Python.

- Effectuer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$ (en considérant les lignes i et j pour Python)

```
L=A[i,:].copy() # A[i,:] désigne la ligne i de A
A[i,:]=A[j,:]   # la ligne i a le contenu de la ligne j
A[j,:]=L        # on place la sauvegarde de la précédente ligne i à la ligne j
```

Pour copier une matrice il ne faut pas utiliser uniquement l'opérateur $=$ car les deux matrices seront alors liées (si on modifie une matrice l'autre est modifiée également). L'instruction `copy` permet d'éviter cela.

- Effectuer l'opération $L_k \leftarrow pL_k - cL_j$ avec $j \neq k$. p est le pivot de la ligne j et c le coefficient d'indice (k, j)

```
pivot=A[j,j]
c=A[k,j]
A[k,:]=pivot*A[k,:]-c*A[j,:]
```

Exemple 18. On résout le système (S_2) de l'exemple 12 à l'aide de Python

$$(S_2) \begin{cases} x + y + z &= 10 \\ 2x + 4y - 3z &= 5 \\ 3x + 5y - 2z &= 3 \end{cases}$$

Les opérations effectués sur A sont également effectuées sur B .

```
import numpy as np
A=np.array([[1,1,1],[2,4,-3],[3,5,-2]])
B=np.array([[10],[5],[3]])
[n,p]=np.shape(A) # n est le nombre de lignes de A (p est le nombre de colonnes de A)
for j in range (0,n-1):
    pivot=A[j,j]
    for k in range(j+1,n):
        c=A[k,j]
        A[k,:]=pivot*A[k,:]-c*A[j,:]
        B[k,0]=pivot*B[k,0]-c*B[j,0]
print(A)
print(B)
```

On obtient alors le système triangulaire suivant (que l'on a déjà résolu)

$$(S_2) \begin{cases} x + y + z &= 10 \\ 2y - 5z &= -15 \\ 0z &= -24 \end{cases}$$

Dans cet exemple, on évite le cas général pour lequel il faudrait rajouter la recherche d'un pivot non nul avant d'échanger les lignes.