

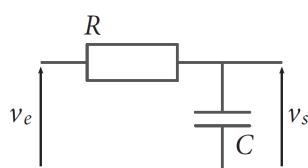
TD S5.1 - Filtrage linéaire d'un signal

Table des matières

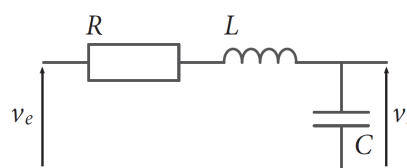
1	Détermination rapide de la nature d'un filtre	1
2	Valeur moyenne et valeur efficace	1
3	Filtre passe-haut	2
4	Filtre passe-bas	4
5	Utilisation d'un filtre passe bande	8
6	Oscillateur vertical en régime périodique non sinusoïdal	8
7	Multiplieur analogique	11
8	Résolution de problème : courant pas beau...	11

1 Détermination rapide de la nature d'un filtre

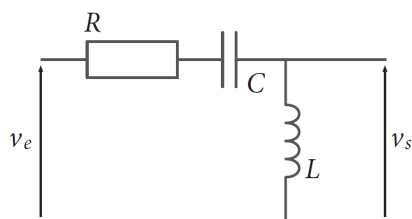
Déterminer sans calcul, mais en justifiant votre raisonnement, la nature des filtres ci-dessous :



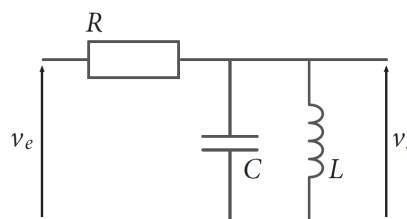
Filtre 1



Filtre 2



Filtre 3



Filtre 4

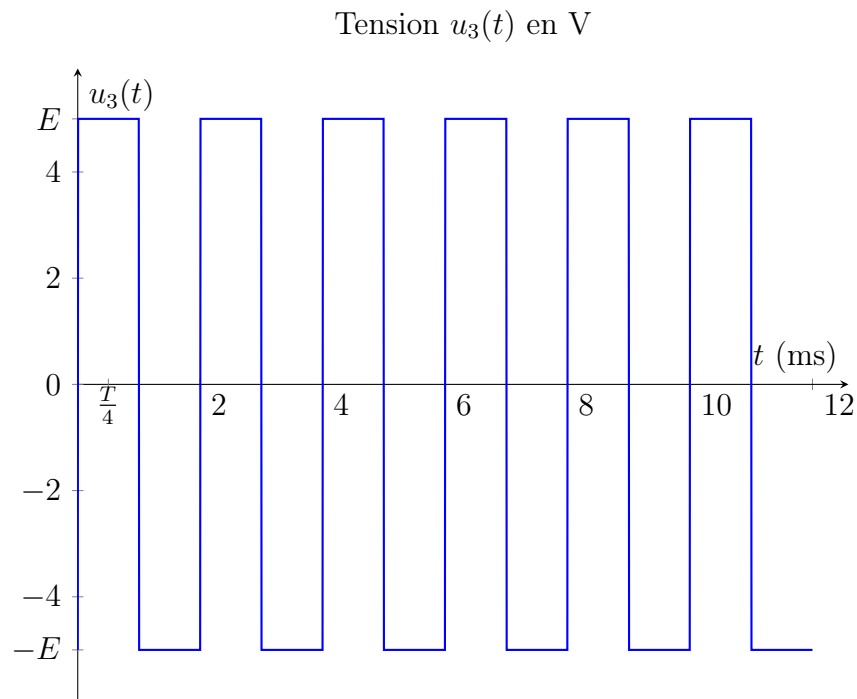
2 Valeur moyenne et valeur efficace

Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace des tensions suivantes :

2.1. $u_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi)$ avec $V_1 = 5 \text{ V}$

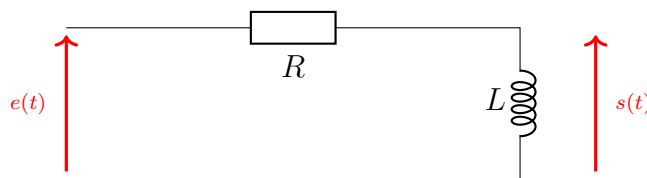
2.2. $u_2(t) = V_0 + V_1 \sin(\omega t + \varphi)$ avec $V_0 = V_1 = 1 \text{ V}$

2.3. $u_3(t)$ dont l'oscillogramme est le suivant :



3 Filtre passe-haut

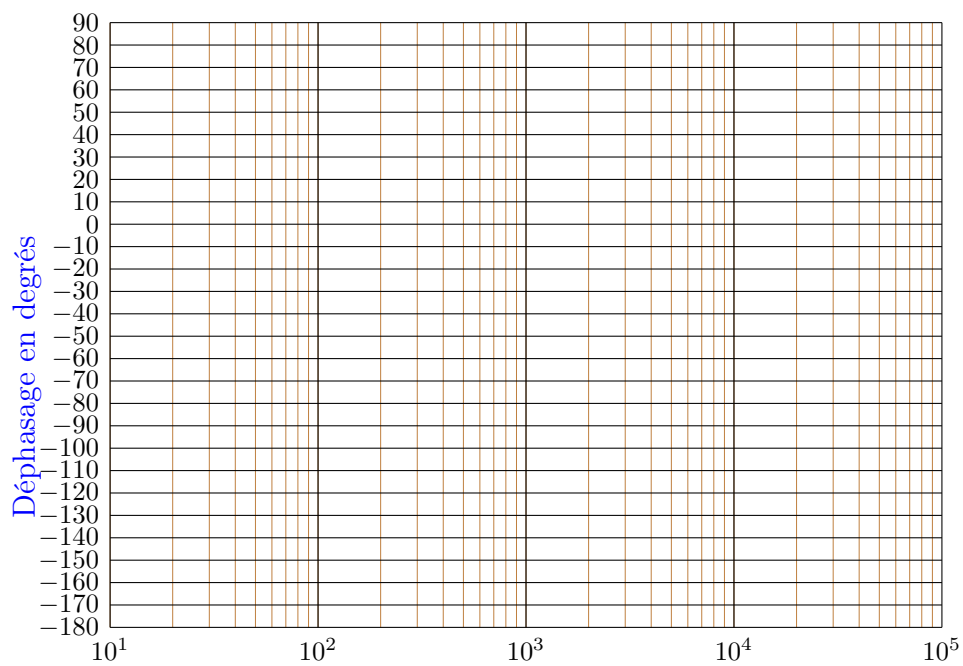
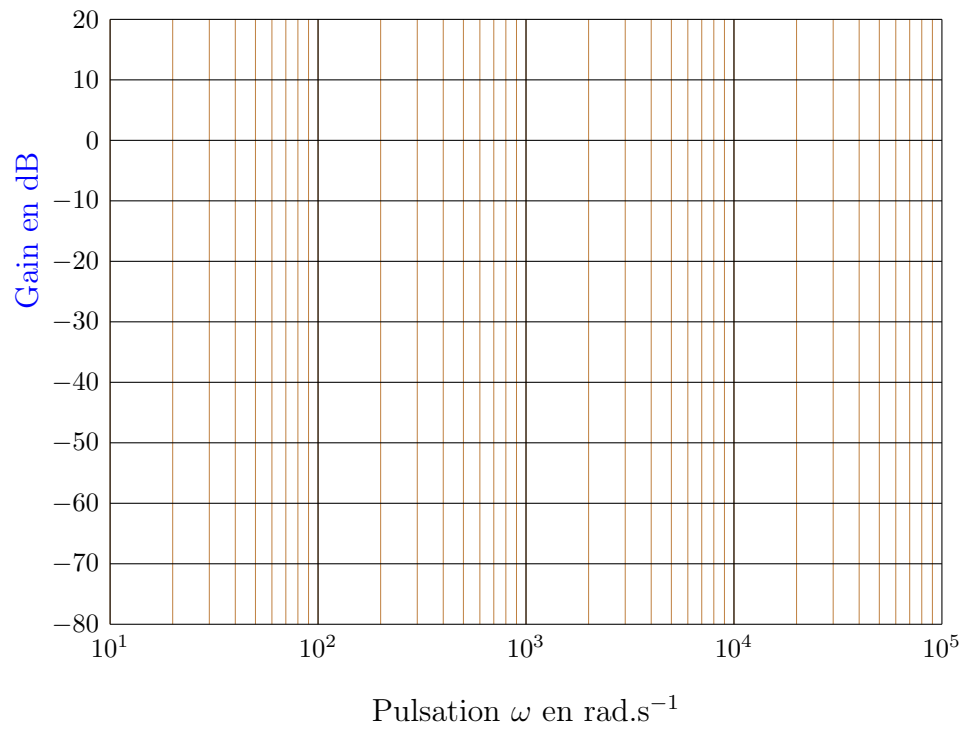
On considère le filtre RL ci-dessous dont la bobine est supposée parfaite avec $R = 100\ \Omega$ et $L = 50\text{ mH}$.



3.1. Prévoir sans calcul, mais en justifiant votre raisonnement, la nature de ce filtre.

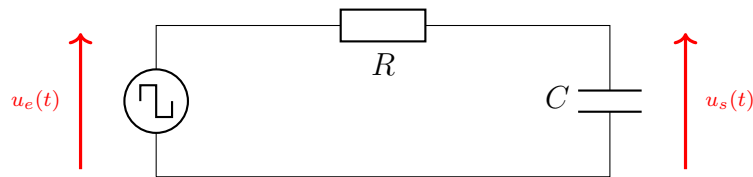
3.2. Déterminer sa fonction de transfert, sa pulsation de coupure ω_c et sa bande passante à -3 dB .

3.3. Tracer son diagramme de Bode sur le diagramme vierge ci-après :



4 Filtre passe-bas

On impose une tension carrée $u_e(t)$ de rapport cyclique 0,5, allant de 0 V à 5 V à l'entrée du circuit électronique suivant :



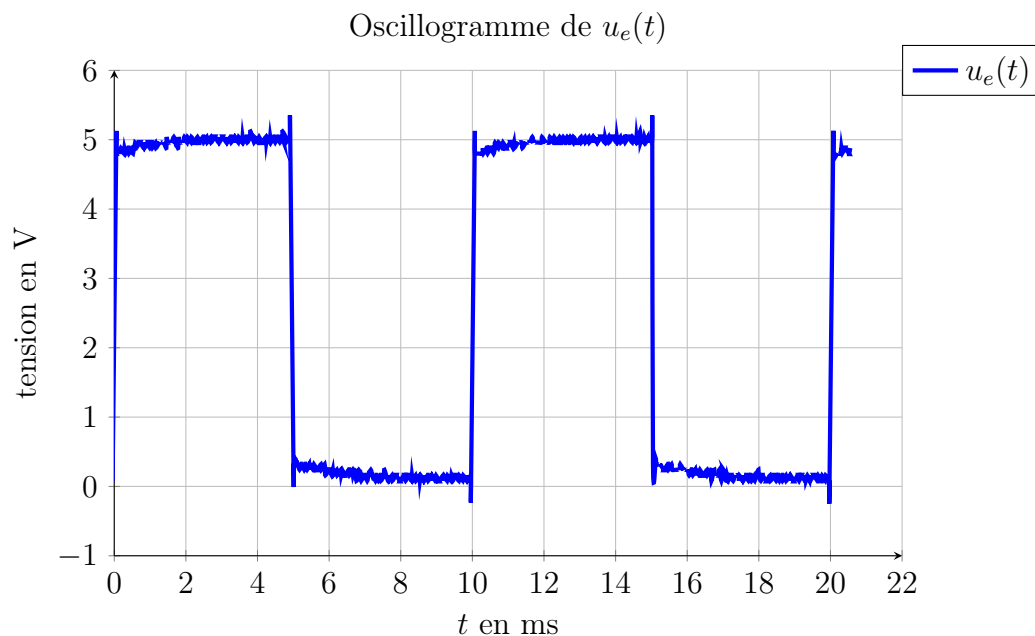
Sachant qu'une tension carrée $u(t)$ d'amplitude E et de valeur moyenne nulle peut être décomposée en série de FOURIER par :

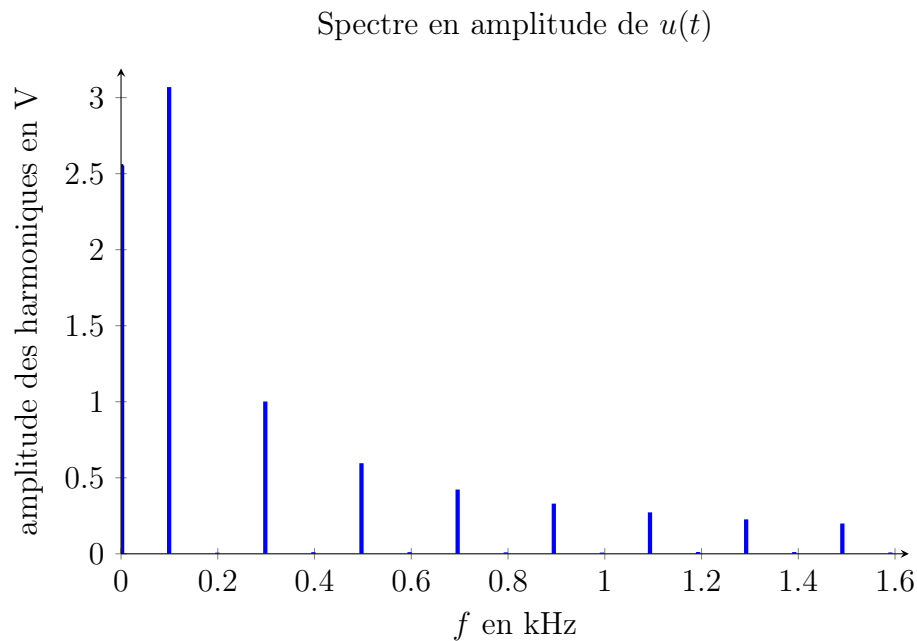
$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{2k+1}$$

4.1. Donner la décomposition en série de FOURIER de $u_e(t)$. L'harmonique de rang n sera noté $u_{en}(t)$ et son amplitude U_{enm} (valeur maximale, d'où le m en indice pour ne pas confondre avec la valeur efficace).

4.2. Donner l'expression du fondamental de u_e , exprimer puis calculer son amplitude.

4.3. Donner l'expression des harmoniques de rang 2 et 3 de u_e , exprimer puis calculer leur amplitude. On donne l'oscillogramme de $u_e(t)$ et son spectre en amplitude :





4.4. Ce spectre est-il en accord avec les résultats précédents ? Donner l'expression de l'enveloppe du spectre puis tracer-la.

4.5. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ est :

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = u_e$$

Donner l'expression de τ .

On se place désormais en régime sinusoïdal pur avec $u_e = U_{em} \cos(\omega t)$

4.6. A partir de l'équation différentielle, montrer que la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ de ce circuit, qui peut aussi être qualifié de filtre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Donner l'expression de ω_c qui est appelée pulsation de coupure du filtre.

4.7. Exprimer le gain G et le déphasage φ .

Les valeurs des composants sont les suivantes : $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$. Voici le tracé du diagramme de BODE :

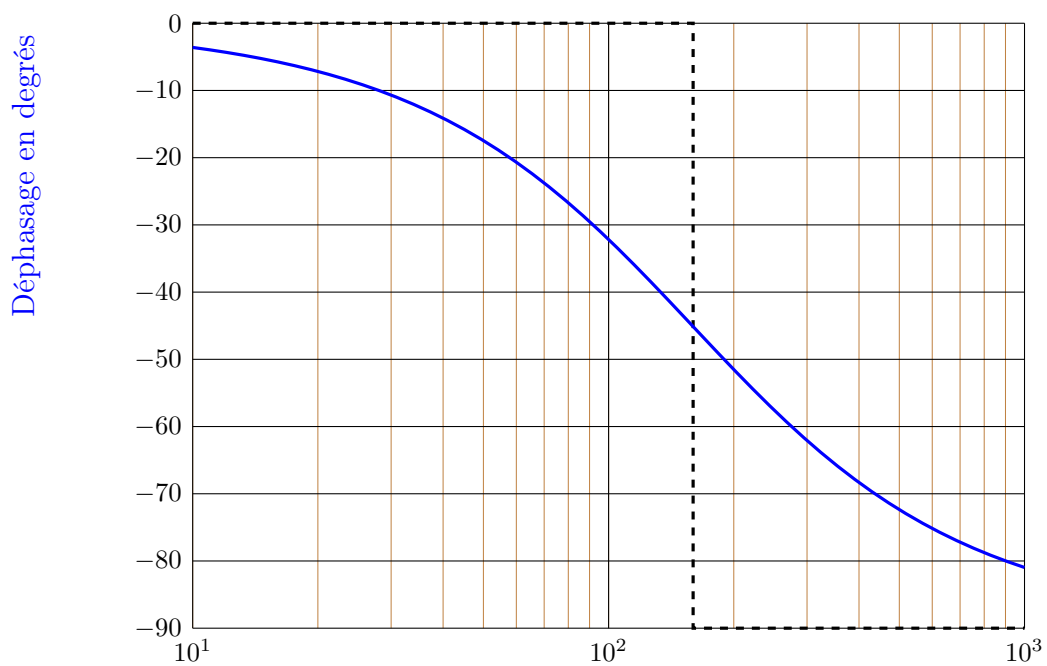
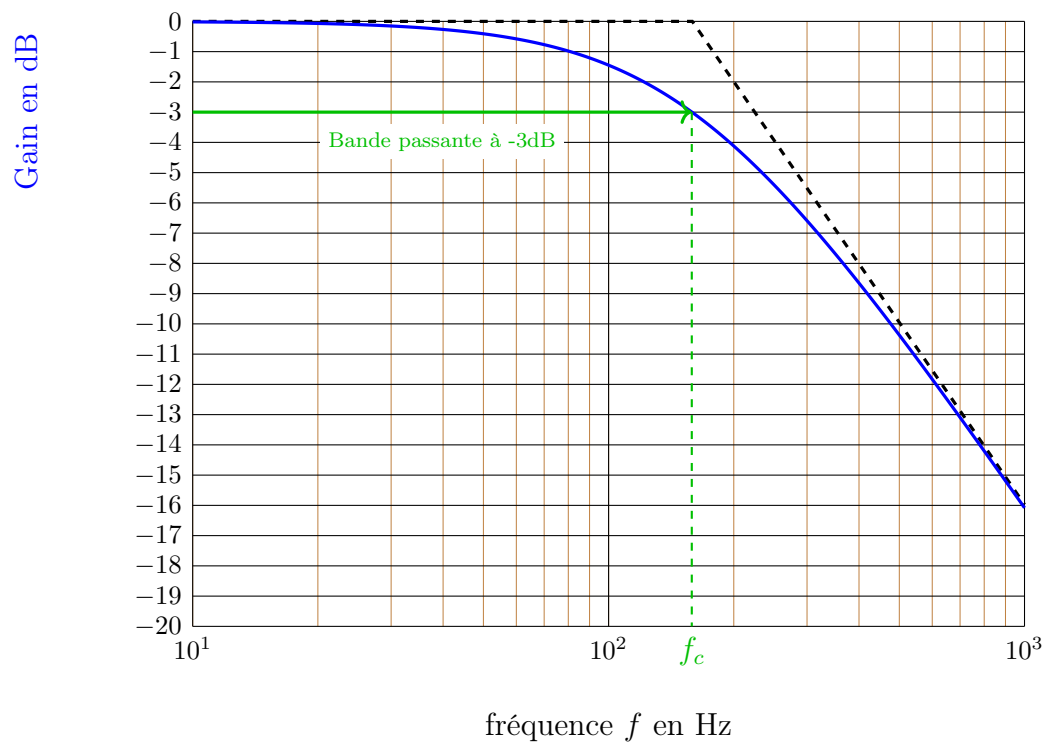


FIGURE 1 – Diagramme de BODE du filtre passe-bas d'ordre 1

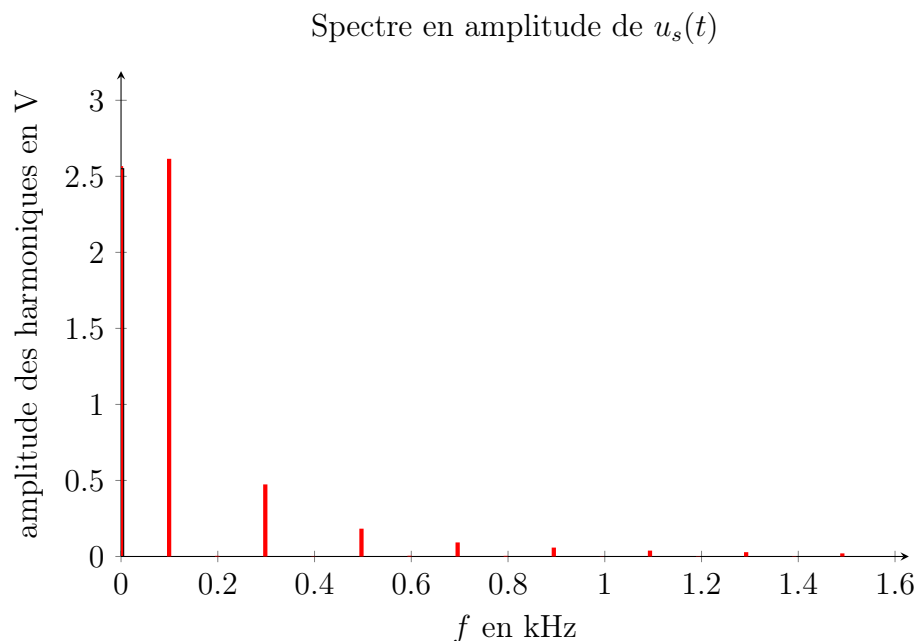
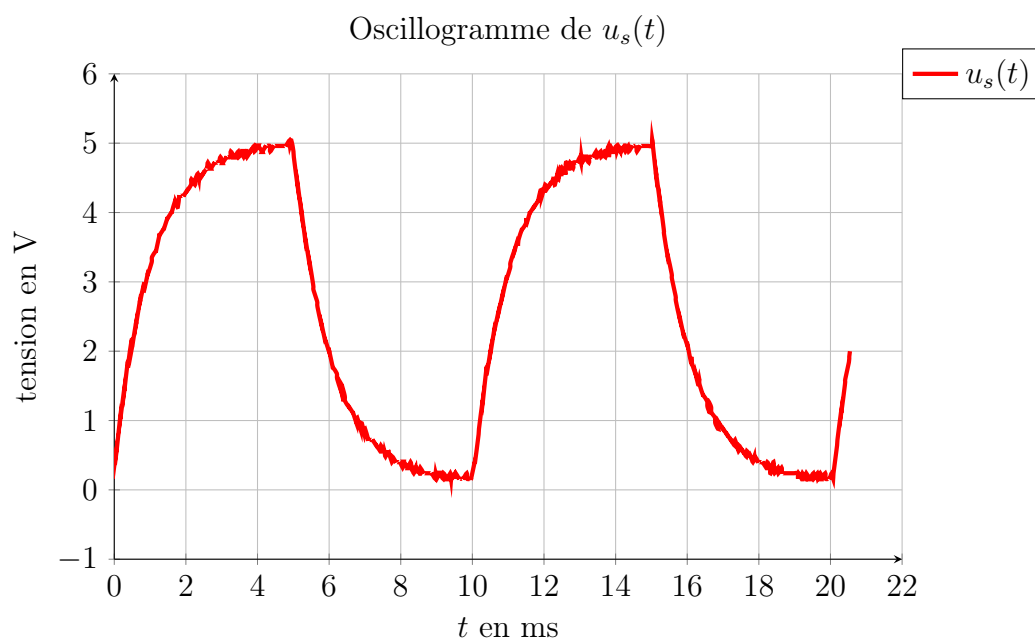
4.8. Exprimer puis calculer la fréquence de coupe f_c du filtre.

4.9. Trouver l'équation des asymptotes et les tracer.

On s'intéresse maintenant au cas où le circuit est alimenté par la tension u_e carrée étudiée en début d'exercice.

4.10. Placer, en superposition sur la courbe de gain, les harmoniques de rang $n \geq 1$ de u_e . Les harmoniques de rang $n \geq 3$ de u_e sont-elles efficacement filtrées? Qu'en est-il de la composante continue de u_e ?

4.11. Exprimer puis calculer la composante continue de u_s notée U_{s0} , ainsi que l'amplitude de son fondamental notée U_{s1m} . On a relevé expérimentalement l'oscillogramme et le spectre de u_s :

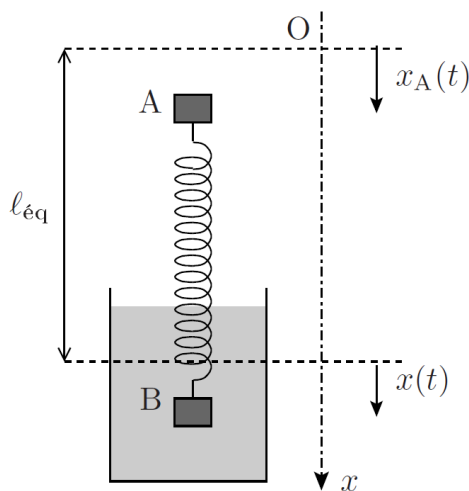


4.12. Ce spectre est-il en accord avec les calculs précédents ? De quel type de filtre s'agit-il ?

5 Utilisation d'un filtre passe bande

On souhaite récupérer le fondamental d'une tension carrée variant de 0 à 5V, de rapport cyclique 1/2 et de fréquence $f = 1300$ Hz à la sortie d'un filtre comportant uniquement une bobine d'inductance $L = 0,15$ H, un condensateur de capacité C et une résistance R . Proposer un montage avec les valeurs de C et R correspondantes.

6 Oscillateur vertical en régime périodique non sinusoïdal



On considère l'oscillateur vertical amorti ci-contre. Une masselotte de masse m , plongée dans un liquide, est fixée à l'extrémité inférieure du ressort (l_0, k), alors qu'on impose un mouvement $x_A(t)$ (excitation) à la fixation supérieure du ressort. On considère le déplacement algébrique de la masse $x(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en l'absence d'excitation.

La masselotte est soumise à son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_x$, à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -Mg\vec{u}_x$ (en notant M la masse du volume de fluide déplacé par la masselotte), à une force de frottements fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$ et à la force de rappel élastique du ressort.

L'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ s'écrit :

$$m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + kx(t) = kx_A(t) \quad (1)$$

6.1. D'après (1), donner l'expression du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 . Ecrire (1) en fonction de ces paramètres uniquement.

L'oscillateur a pour fréquence propre $f_0 = 2$ Hz.

6.2. Rappeler la condition pour qu'il y ait résonance et le cas échéant l'expression de la fréquence de résonance f_r , en fonction de Q et f_0 . La calculer pour $Q = 5$. Que remarque-t-on ?

6.3. Si l'oscillateur est soumis à une excitation $x_A(t) = X_{Am} \cos(\omega t + \varphi_A)$, montrer qu'en notation complexe, l'amplitude complexe $\underline{X}$ de $x(t)$ (la réponse de l'oscillateur) est :

$$\underline{X} = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{X}_A$$

où $\underline{X}_A$ est l'amplitude complexe de $x_A(t)$ et $\underline{H}(j\omega)$ la fonction de transfert de l'oscillateur. Donner l'expression de $\underline{X}_A$ et de $\underline{H}(j\omega)$.

On donne le tracé du diagramme de BODE de $\underline{H}$ en fonction de la fréquence f de l'excitation.

6.4. Retrouver l'équation des asymptotes basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) pour le Gain $G = 20 \log |\underline{H}|$ et le déphasage $\varphi = \arg \underline{H}$. Puis tracer ces asymptotes en expliquant le placement de deux points pour les droites (Par convention, on arrête le tracé des

asymptotes BF à f_0 , là on l'on commence celui des asymptotes HF).

Dans un premier temps, la masselotte est laissée dans l'air, le facteur de qualité de l'oscillateur est alors assez élevé $Q = 5$ (tracé noir). Pour sa part, l'excitateur comporte des défauts : il est paramétré pour générer une excitation sinusoïdale $x_{A1}(t) = X_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ avec $f_1 = f_0 = 2 \text{ Hz}$ mais il est mal réglé et rajoute une composante continue $x_{A0}(t) = X_0$ (offset), en plus d'une composante sinusoïdale $x_{A2}(t) = X_{2m} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ de fréquence $f_2 = 25 \text{ Hz}$, due à un léger défaut de l'excitateur. On a donc $x_A(t) = X_0 + x_{A1}(t) + x_{A2}(t)$.

6.5. Représenter le spectre de $x_A(t)$ sachant que $X_0 = 0,2 \text{ cm}$, $X_{1m} = 1 \text{ cm}$ et $X_{2m} = 0,1 \text{ cm}$.

6.6. Ecrire (1) en notation complexe. Puis exprimer, en régime établi, l'expression de $\underline{x}(t)$ (on pourra utiliser les expressions asymptotiques de $\underline{H}(j\omega)$ quand cela est possible).

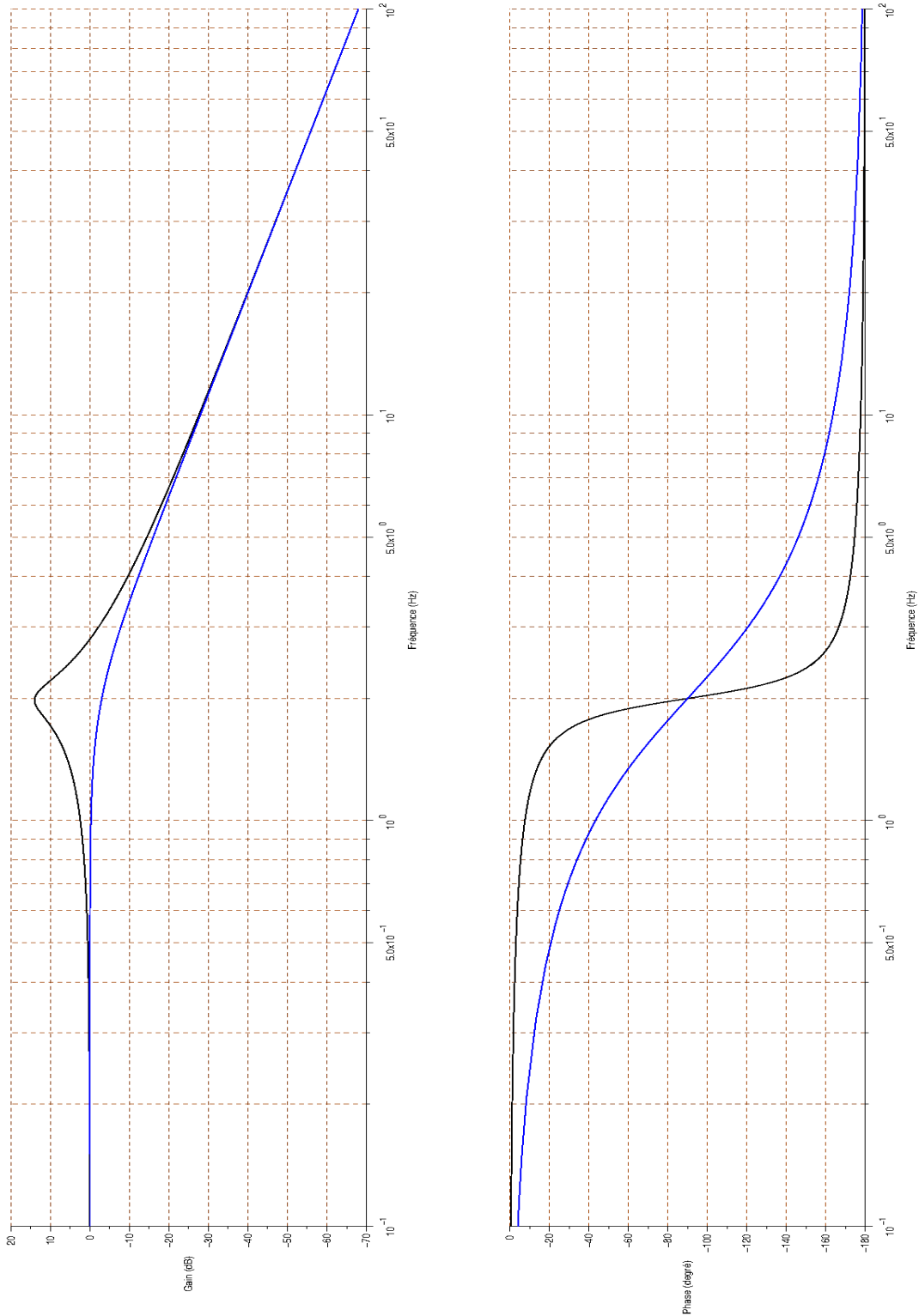
6.7. Donner l'expression de $x(t)$ et tracer son spectre.

6.8. Que peut-on dire concernant le terme de fréquence f_2 ainsi que le terme constant de $x(t)$? Expliquer pourquoi l'oscillateur peut être qualifié de filtre passe-bas. Tracer le spectre de $x_A(t)$ en superposition avec la courbe de gain.

Dans un second temps, la masselotte est placée dans de l'eau, le facteur de qualité de l'oscillateur est alors $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (tracé bleu). L'excitation globale reste identique à celle vue précédemment.

6.9. Donner la nouvelle expression de $x(t)$ et tracer son spectre.

6.10. Donner l'expression de la vitesse $v(t)$. Quelle composante est présente de manière significative?



7 Multiplieur analogique

Un multiplieur analogique est un circuit électronique avec deux tensions u_1 et u_2 appliquées à l'entrée du circuit et qui délivre une tension u_s à la sortie du circuit telle que :

$$u_s = K u_1 u_2$$

où K est une constante positive.

On applique le signal $u_1(t) = u_2(t) = u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$ de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ sur les deux entrées du multiplieur.

7.1. Tracer l'allure de $u_e(t)$ et $u_s(t)$ à l'aide de votre calculatrice préférée.

7.2. Tracer le spectre de u_e et de u_s en décomposant u_s en une somme de fonctions sinusoïdales. On rappelle que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

7.3. L'équation qui lie u_s à u_e est-elle linéaire ? Expliquer l'apparition de nouvelles harmoniques entre l'entrée et la sortie du multiplieur.

On décide de placer le filtre passe-bas de l'exercice 4 à la sortie du multiplieur.

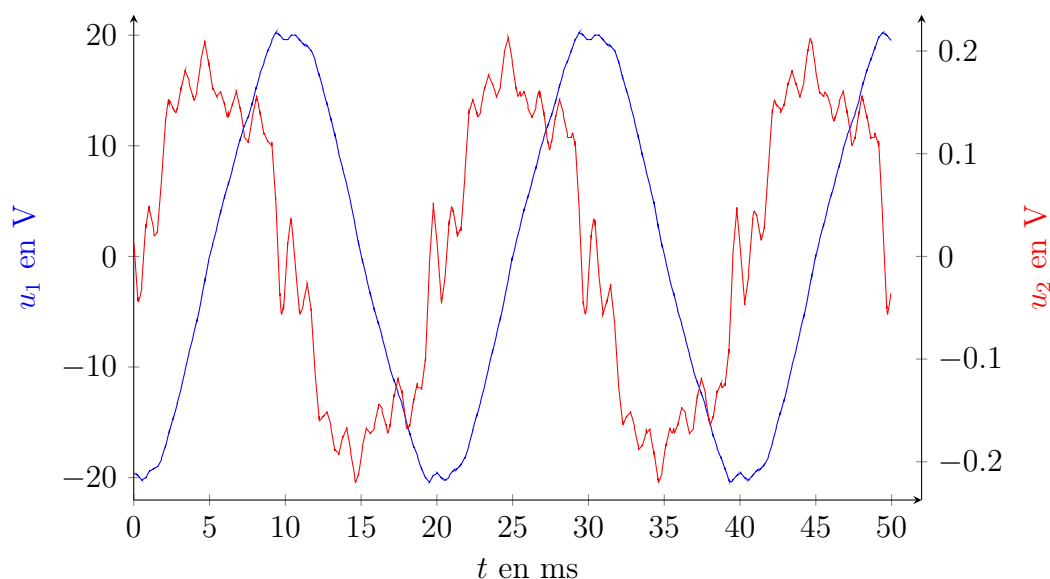
7.4. Comment doit-on choisir la fréquence de coupure f_c de ce filtre pour ne garder que la composante continue de u_s ?

On suppose cette condition vérifiée et on note U_{s0} la valeur de la tension à la sortie du filtre.

7.5. Quelle est la relation entre la valeur efficace de u_e notée U_e et U_{s0} ?

8 Résolution de problème : courant pas beau...

Un étudiant interroge son professeur, ne comprenant pas pourquoi le courant traversant une boîte à décades de condensateurs "n'est pas beau" (comprendre : n'est pas sinusoïdal), alors que la tension à ces bornes "à l'air bien" (comprendre : semble sinusoïdale). Voici les oscillogrammes de la tension aux bornes du condensateur et de la tension image du courant mesurée à l'aide d'une sonde de courant :



8.1. Elaborer une explication argumentée à ce phénomène.