

## CHAPITRE 6

## INTÉGRALES À PARAMÈTRES

---

|            |                                                                     |           |
|------------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Théorème de convergence dominée</b>                              | <b>4</b>  |
| <b>II</b>  | <b>Théorème d'intégration terme à terme</b>                         | <b>8</b>  |
| <b>III</b> | <b>Théorème de continuité</b>                                       | <b>12</b> |
| <b>IV</b>  | <b>Théorème de convergence dominée à paramètre continu</b>          | <b>15</b> |
| <b>V</b>   | <b>Théorème de dérivation</b>                                       | <b>17</b> |
| <b>VI</b>  | <b>Extension aux fonctions de classe <math>\mathcal{C}^k</math></b> | <b>21</b> |

---

## Extrait du programme

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### e) Suites et séries de fonctions intégrables

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

**Théorème de convergence dominée :**

si une suite  $(f_n)$  de fonctions continues par morceaux sur  $I$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et s'il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  vérifiant  $|f_n| \leq \varphi$  pour tout  $n$ , alors les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

**Théorème d'intégration terme à terme :**

si une série  $\sum f_n$  de fonctions intégrables sur  $I$  converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur  $I$ , et si la série  $\sum \int_I |f_n(t)| dt$  converge, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

La démonstration est hors programme.

La démonstration est hors programme.

On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

#### f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à  $x$  et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à  $t$ .

**Théorème de continuité :**

si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ , telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$  ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$  ;

alors la fonction  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$ .

**Théorème de convergence dominée à paramètre continu :**

si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  une borne de  $A$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$  telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$  ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \ell(t)$  sont continues par morceaux sur  $I$  ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$  ;

alors  $\ell$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt.$$

**Théorème de dérivation :**

si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ , telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$  ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$  ;

alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $A$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

La démonstration n'est pas exigible.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $A$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

CONTENUS

Extension à la classe  $\mathcal{C}^k$  d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  et d'intégrabilité des  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  pour  $0 \leq j < k$ .

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire.

---

Dans tout le chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux éléments.

## I. Théorème de convergence dominée



### Définition 6.1 – Convergence simple d'une suite de fonctions

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on considère une fonction  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On considère également une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

On dit que la **suite de fonctions**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge simplement vers  $f$  sur  $I$**  lorsque :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$



### Méthode 6.1 – Rédaction

La convergence simple est une convergence « point par point ».

Pour montrer la convergence simple d'une suite de fonctions sur un intervalle  $I$ , on commence par fixer  $x \in I$  (« Soit  $x \in I$  »), puis on étudie la convergence de la suite numérique  $(f_n(x))_n$ .

### Exemple 6.1

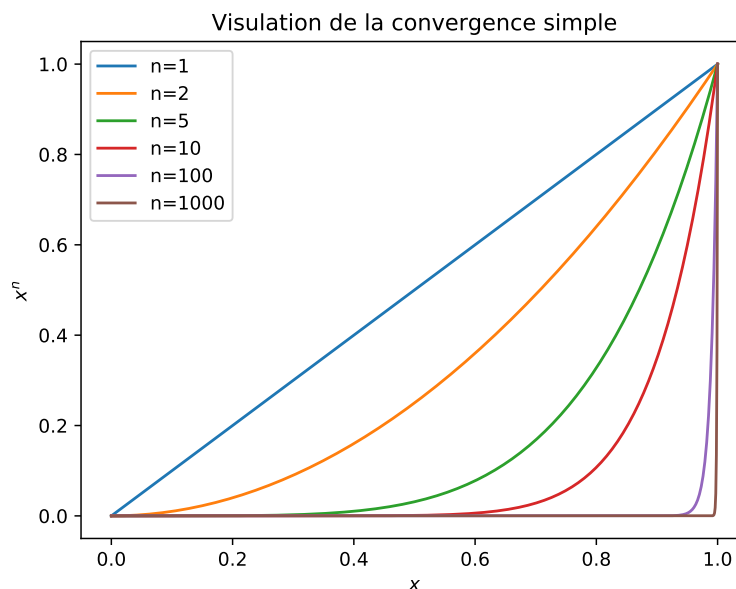
1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(x) = x^n$ .

Si  $x \in [0, 1[$ , alors  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Si  $x = 1$ , alors  $x^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

On en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction définie pour tout  $x \in [0, 1]$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$



2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \geq 0$ , on pose  $f_n(x) = \text{Arctan}(x^n)$ .

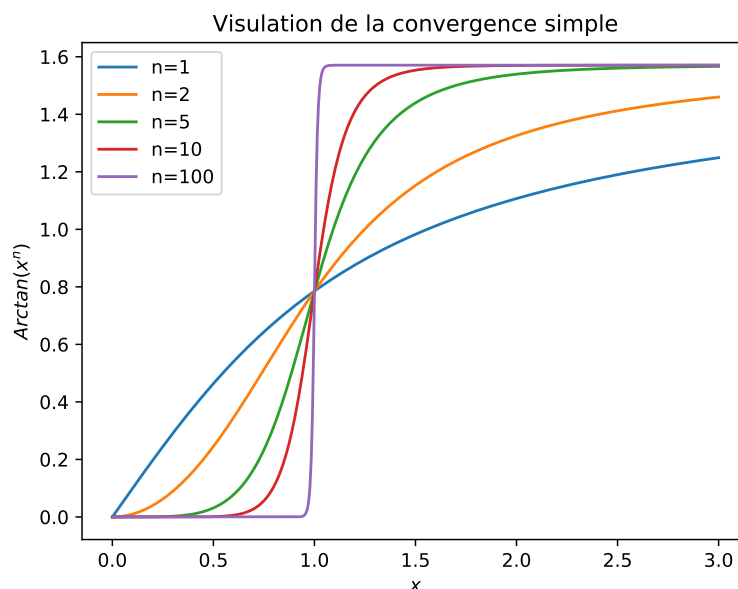
Si  $x \in [0, 1[$ , alors  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(0) = 0$ .

Si  $x = 1$ , alors  $f_n(x) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$ .

Si  $x > 1$ , alors  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et par composition des limites, on a :  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ .

On en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$



### Remarque 6.1

Dans les exemples précédents, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue (et même de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ); pourtant, la fonction  $f$  n'est pas continue.

On retiendra si une suite de fonctions continues  $(f_n)$  converge **simplement** vers une fonction  $f$ , alors on ne peut rien dire quant à la continuité de  $f$ . Pour que la fonction  $f$  soit continue, on aura besoin d'une autre notion de convergence : la convergence uniforme (voir le chapitre SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS).

### Théorème 6.1 – Théorème de convergence dominée

Soient  $(f_n)$  une suite de fonctions et  $f$  une fonction définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose que :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- $f$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ ,
- (**hypothèse de domination**) il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue par morceaux, positive et intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est intégrable sur  $I$ , la fonction  $f$  est intégrable sur  $I$  et,

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

### Démonstration

Admis (hors-programme).

**Remarque 6.2**

L'hypothèse de domination :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

et l'intégrabilité sur  $I$  de  $\varphi$  entraînent l'intégrabilité sur  $I$  de  $f_n$  pour tout  $n$  (théorèmes de comparaison).

En passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans l'inégalité précédente, on a :

$$\forall t \in I, |f(t)| \leq \varphi(t).$$

On en déduit que  $f$  est aussi intégrable sur  $I$ .

**Remarque 6.3**

Le théorème de convergence dominée permet, sous une hypothèse de domination, d'échanger limite et intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_I f_n(t) dt \right) = \int_I \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt.$$

**Remarque 6.4 – Prudence !**

Il faut bien faire attention que  $\varphi$  ne dépende pas de  $n$ .

**Exemple 6.2 – Intégrale de Wallis**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt.$$

**Montrons que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.**

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : t \mapsto (\sin(t))^n$  est continue, donc continue par morceaux sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- Soit  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Alors,  $\sin(t) \in [0, 1[$ . Donc,  $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, la suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  vers la fonction nulle.

- La fonction nulle est continue par morceaux sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$|(\sin(t))^n| \leq 1.$$

La fonction  $\varphi : x \mapsto 1$  est continue (par morceaux), positive et intégrable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (faux problème en  $\frac{\pi}{2}$ ).

Ainsi, par le théorème de convergence dominée,

$$W_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0.$$

### 💡 Exemple 6.3

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx.$$

**Montrons que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.**

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n + e^x}$  est continue, donc continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

- Soit  $x \in [0, +\infty[$ .

Si  $x \in [0, 1[$ , alors  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x}$ .

Si  $x = 1$ , alors  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et  $f_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e}$ .

Si  $x > 1$ , alors  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, la suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$  vers la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, 1[ \\ \frac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- La fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{1}{x^n + e^x} \right| = \frac{1}{x^n + e^x} \leq \frac{1}{e^x} \leq e^{-x}.$$

La fonction  $\varphi : x \mapsto e^{-x}$  est continue (par morceaux), positive et intégrable sur  $[0, +\infty[$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée,

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

Par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x) dx}_{=0 \text{ (} f \text{ est nulle sur } ]1, +\infty[)} = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}.$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  converge vers  $1 - e^{-1}$ .

## II. Théorème d'intégration terme à terme

### Définition 6.2 – Convergence simple d'une série de fonctions

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère une fonction  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

On dit que la **série de fonctions**  $\sum f_n$  **converge simplement sur**  $I$  lorsque, pour tout  $x \in I$ , la série numérique  $\sum f_n(x)$  converge.

On dit que la fonction  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  est la somme de la série de fonctions.

### Méthode 6.2 – Rédaction

La convergence simple est une convergence « point par point ».

Pour montrer la convergence simple d'une série de fonctions sur un intervalle  $I$ , on commence par fixer  $x \in I$  (« Soit  $x \in I$  »), puis on étudie la série numérique  $\sum f_n(x)$ .

### Remarque 6.5 – Lien avec la convergence simple d'une suite de fonctions

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  si, et seulement si, la suite de fonctions  $\left( \sum_{k=0}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $S$  sur  $I$ . Autrement dit :

$$\forall x \in I, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x).$$

### Exemple 6.4

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]-1, 1[$ , on pose  $f_n(x) = x^n$ .

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $] -1, 1[$ .

En effet, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la série  $\sum x^n$  est géométrique de raison  $x$  avec  $|x| < 1$ .

De plus,  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 1$ , on pose  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ .

Soit  $x > 1$ . La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^x}$  converge car  $x > 1$ .

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$ .

La somme de la série est notée  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  sur  $]1, +\infty[$ . Cette fonction est appelée **fonction  $\zeta$  de Riemann**.

### Théorème 6.2 – Théorème d'intégration terme à terme

Soient  $(f_n)$  une suite de fonctions et  $S$  une fonction définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose que :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux et **intégrables** sur  $I$ ,
- $S$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement vers  $S$  sur  $I$ . On note, pour tout  $t \in I$ ,  $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ ,



► la série  $\sum \int_I |f_n(t)| dt$  converge.

Alors, la fonction  $S$  est intégrable sur  $I$  et,

$$\int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

### Démonstration

Admis (hors-programme).

### Remarque 6.6

Le théorème d'intégration terme à terme permet d'échanger série et intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_I f_n(t) dt \right) = \int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

### Exemple 6.5

Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in ]0, 1[$ , on note  $f_n(t) = -t^n \times \ln(t)$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f_n$  est continue sur  $]0, 1[$ . De plus,  $f_n$  est prolongeable par continuité en 1, donc  $f_n$  est intégrable en 1.

D'autre part,  $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(\ln(t))$ . Donc,  $f_n$  est intégrable en 0 (intégrale de référence).

Donc,  $f_n$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

- Soit  $t \in ]0, 1[$ . La série géométrique  $\sum t^n$  converge, donc, la série  $\sum f_n(t)$  converge.  
La série de fonction  $\sum f_n$  converge simplement vers :

$$S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{-\ln(t)}{1-t}.$$

- La fonction  $S$  est continue par morceaux sur  $]0, 1[$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = - \int_0^1 t^n \times \ln(t) dt.$$

On intègre par parties :

$$\begin{array}{ll} \boxed{u(t) = \ln(t)} & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} & \boxed{v'(t) = t^n}. \end{array}$$

On a  $u(t) \times v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  (croissance comparée) et  $u(t) \times v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 0$ .

De plus, comme  $\int_0^1 t^n \times \ln(t) dt$  converge, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = - \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \ln(t) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

Or, la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \int_0^1 |f_n(t)| dt$  converge.

Donc, par le théorème d'intégration terme à terme,  $S$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

### Remarque 6.7

On a alors,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

### Exercice 6.1

Soit  $\alpha > 0$  fixé.

1. Montrer que, pour tout  $t \in ]0, 1[$ , la série  $\sum (-1)^n t^{n \times \alpha}$  converge et calculer sa valeur.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que  $\int_0^1 t^{n \times \alpha} dt$  existe et calculer sa valeur.
3. Pour montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n \times \alpha} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ , peut-on utiliser le théorème d'intégration terme à terme?
4. Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n \times \alpha} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt$  en appliquant le théorème de convergence dominée aux sommes partielles de la série.

### Résolution

1. Pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $|(-1)^n t^\alpha| < 1$ , donc, la série géométrique  $\sum (-1)^n t^{n \times \alpha}$  converge et,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n \times \alpha} = \frac{1}{1+t^\alpha}.$$

2. La fonction  $t \mapsto t^{n \times \alpha}$  est continue sur  $]0, 1[$  et prolongeable par continuité en 0 (car  $\alpha > 0$ ), donc,  $t \mapsto t^{n \times \alpha}$  est intégrable sur  $[0, 1]$ .

De plus, on a  $\int_0^1 t^{n \times \alpha} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{t^{1+n \times \alpha}}{1+n \times \alpha} \right]_h^1 = \frac{1}{1+n \times \alpha}.$

3. Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, 1]$ , on note  $f_n(t) = (-1)^n t^{n \times \alpha}.$

- La fonction  $f_n$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc intégrable sur  $[0, 1]$ .
- Par la question 1, la série de fonction  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]0, 1[$  vers  $S : t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  et  $S$  est continue par morceaux sur  $]0, 1[$ .
- De plus,

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^{n \times \alpha} dt = \frac{1}{1+n \times \alpha} \sim \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{n}.$$

Or la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$\forall t \in ]0, 1[, g_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1) \times \alpha}}{1+t^\alpha}.$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  est continue par morceaux sur  $]0, 1[$ .
- La suite de fonction  $(g_n)$  converge simplement vers  $S$  sur  $]0, 1[$ .
- La fonction  $S$  est continue par morceaux sur  $]0, 1[$ .
- Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in ]0, 1[$ ,

$$|g_n(t)| \leq \frac{1 + |t^{(n+1) \times \alpha}|}{1+t^\alpha} \leq \frac{2}{1+t^\alpha}.$$

Or, la fonction  $t \mapsto \frac{2}{1+t^\alpha}$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  (prolongeable par continuité en 0), donc est intégrable sur  $[0, 1]$ .

Par le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S(t) dt.$$

De plus, par linéarité,

$$\int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 f_k(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k \times \alpha}.$$

Ainsi,

$$\sum \frac{(-1)^n}{1+n \times \alpha} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n \times \alpha} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt.$$

### III. Théorème de continuité



#### Théorème 6.3 – Théorème de continuité sous le signe $\int$

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.

On suppose que :

- pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $J$  ;
- (**hypothèse de domination**) il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(t, x) \in I \times J$ , on ait  $|f(t, x)| \leq \varphi(t)$ .

Alors, la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$  est continue sur  $J$ .

#### Démonstration

**Démonstration non exigible (la démonstration repose sur le théorème de convergence dominée que nous avons admis).**

► On commence par remarquer que la fonction  $F$  est bien définie.

Soit  $x \in J$ . On a :

$$\forall t \in I, |f(t, x)| \leq \varphi(t).$$

Par les théorèmes de comparaison, l'intégrabilité de  $\varphi$  sur  $I$  entraîne l'intégrabilité de  $t \mapsto f(t, x)$  sur  $I$ . Donc  $F(x)$  existe. Ceci est vrai pour tout  $x \in J$ , donc  $F$  est bien définie.

► Montrons la continuité de  $F$  sur  $J$ .

Soit  $a \in J$ . Montrons que  $F$  est continue en  $a$ . Par la caractérisation séquentielle de la limite, il suffit de montrer que, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $J$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , on a  $F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(a)$ .

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $J$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $F(x_n) = \int_I f(t, x_n) dt$  et  $F(a) = \int_I f(t, a) dt$ .

On pose : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $t \in I$ ,

$$g_n(t) = f(t, x_n) \quad \text{et} \quad g(t) = f(t, a).$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par hypothèse sur  $f$ , la fonction  $g_n : t \mapsto f(t, x_n)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- Par hypothèse sur  $f$ , la fonction  $g : t \mapsto f(t, a)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- Soit  $t \in I$ . On sait que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  et que la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est continue en  $a \in J$ .  
Donc,  $g_n(t) = f(t, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t, a) = g(t)$ . D'où, la suite de fonctions  $(g_n)$  converge simplement vers  $g$  sur  $I$ .
- D'après l'hypothèse de domination, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |g_n(t)| \leq \varphi(t)$$

où  $\varphi$  est positive, continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .

Par le théorème de convergence dominée :  $F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(a)$ .

Ainsi,  $F$  est continue en  $a$ . Ceci est vrai pour tout  $a \in J$ . Donc,  $F$  est continue sur  $J$ . □

#### ⚠ Attention

Il faut bien faire attention que  $\varphi$  ne dépende pas de la variable de  $F$  (ici  $x$ ).

#### 💡 Exemple 6.6

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \times \sin(x \times t) dt.$$

**Montrons que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .**

Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ , on note  $f(t, x) = e^{-t} \times \sin(x \times t)$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue, donc continue par morceaux, sur  $[0, +\infty[$ .

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ ,

$$|f(t, x)| = e^{-t} \times |\sin(x \times t)| \leq e^{-t}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t}$  est positive, continue par morceaux et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, par théorème de continuité sous le signe  $\int$ , la fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x \times t}}{1+t^2} dt.$$

**Montrons que  $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .**

Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[^2$ , on note  $f(t, x) = \frac{e^{-x \times t}}{1+t^2}$ .

- Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue, donc continue par morceaux, sur  $[0, +\infty[$ .
- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[^2$ ,

$$|f(t, x)| = \frac{e^{-x \times t}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est positive et continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

De plus, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ . Donc,  $\varphi$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, par théorème de continuité sous le signe  $\int$ , la fonction  $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

### Remarque 6.9 – La continuité est une propriété locale

Dans le théorème de continuité sous le signe  $\int$ , il suffit en fait d'avoir une domination pour tout  $(t, x) \in I \times [\alpha, \beta]$ , pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset J$ .

En effet, le théorème montre qu'alors, pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset J$ , la fonction  $F$  est continue sur  $[\alpha, \beta]$ .

Soit  $x_0 \in J$ , il existe un segment  $[\alpha, \beta]$  tel que  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ . On en déduit que  $F$  est continue en  $x_0$  et ceci est vrai pour tout  $x_0 \in J$ . Donc,  $F$  est continue en tout point de  $J$ .

Autrement dit,  $F$  est continue sur  $J$ .

### Exemple 6.7

Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x \times t} \times \sin(t) dt.$$

**Montrons que  $F$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .**

Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on note  $f(t, x) = e^{-x \times t} \times \sin(t)$ .

- Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue, donc continue par morceaux, sur  $[0, +\infty[$ .
- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
- Soit  $[\alpha, \beta] \subset ]0, +\infty[$  un segment quelconque. Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times [\alpha, \beta]$ , on a :

$$|f(t, x)| = e^{-x \times t} \times |\sin(t)| \leq e^{-\alpha \times t}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-\alpha \times t}$  est positive, continue par morceaux et intégrable (intégrale de référence avec  $\alpha > 0$ ) sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, par théorème de continuité sous le signe  $\int$ , la fonction  $F$  est continue sur  $[\alpha, \beta]$ . Ceci est vrai pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset ]0, +\infty[$ . Donc  $F$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Remarque** : utiliser le caractère local de la continuité est indispensable pour obtenir la domination ici.

## IV. Théorème de convergence dominée à paramètre continu

### Théorème 6.4 – Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.

On suppose que :

- ▶  $a$  est une borne de  $J$  ;
- ▶ pour tout  $t \in I$ ,  $f(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$  ;
- ▶ pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- ▶  $t \mapsto \ell(t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- ▶ **(hypothèse de domination)** il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(t, x) \in I \times J$ , on ait  $|f(t, x)| \leq \varphi(t)$ .

Alors,

$$\int_I f(t, x) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt.$$

#### Démonstration

Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée. □

### Remarque 6.10

Le théorème de convergence dominée à paramètre continu permet, sous une hypothèse de domination, d'échanger limite et intégrale :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \int_I f(t, x) dt \right) = \int_I \left( \lim_{x \rightarrow a} f(t, x) \right) dt.$$

### Exemple 6.8

Pour tout  $x > 0$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x \times t}}{\sqrt{1+t}} dt.$$

Déterminons la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on note  $f(t, x) = \frac{e^{-x \times t}}{\sqrt{1+t}}$ .

- ▶ Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,  $f(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0. \end{cases}$
- ▶ Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , donc, continue par morceaux.
- ▶ Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \ell(t)$  est continue par morceaux.
- ▶ Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on a :

$$|f(t, x)| = \frac{e^{-x \times t}}{\sqrt{1+t}} \leq e^{-x \times t}.$$

Comme  $x \rightarrow +\infty$ , on peut supposer que  $x \geq 1$ . On a alors,

$$|f(t, x)| \leq e^{-t}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t}$  est positive, continue par morceaux et intégrable (intégrale de référence).

Ainsi, par théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \ell(t) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$



## V. Théorème de dérivation

### Définition 6.3 – Dérivée partielle

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.

- Si pour un certain  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est dérivable sur  $J$ , alors, pour tout  $x_0 \in J$ , le nombre dérivé de la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  en  $x_0$  est noté  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)$ .
- Si pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est dérivable sur  $J$ , on définit alors une fonction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : I \times J &\rightarrow \mathbb{K} \\ (t, x) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x). \end{aligned}$$

appelée **dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$** .

- On définit de la même manière la dérivée partielle de  $f$  d'ordre  $k \geq 1$  par rapport à  $x$ , notée  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ .

### Exemple 6.9

1. Considérons la fonction définie pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par

$$f(t, x) = \cos(x) \times e^{-t}.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$  fixé. La fonction  $x \mapsto f(t, x) = \cos(x) \times e^{-t}$  est deux fois dérivable (en fait indéfiniment dérivable) sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\sin(x) \times e^{-t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = -\cos(x) \times e^{-t}.$$

2. Considérons la fonction définie pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par

$$f(t, x) = \sqrt{1 + t^2 \times x^2}.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$  fixé. La fonction  $x \mapsto f(t, x) = \sqrt{1 + t^2 \times x^2}$  est deux fois dérivable (en fait indéfiniment dérivable) sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{t^2 \times x}{\sqrt{1 + t^2 \times x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2 \times x^2} \times (1 + t^2 \times x^2)}.$$

### Théorème 6.5 – Théorème de dérivation sous le signe intégral

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.

On suppose que :

- pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue par morceaux et **intégrable** sur  $I$  ;
- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  ;
- pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- (**hypothèse de domination**) il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(t, x) \in I \times J$ , on ait  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \varphi(t)$  ;

alors la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et on a, pour tout  $x \in J$ ,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

### Démonstration

**Démonstration non exigible (la démonstration repose sur le théorème de convergence dominée que nous avons admis).**

► On commence par remarquer que la fonction  $F$  est bien définie.

Soit  $x \in J$ . On sait que la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est intégrable sur  $I$ , donc  $F(x)$  existe. Ceci est vrai pour tout  $x \in J$ , donc  $F$  est bien définie.

► Pour tout  $x \in J$ , l'hypothèse de domination montre que l'intégrale  $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$  existe.

► Montrons la dérivabilité de  $F$  sur  $J$ .

Soit  $a \in J$ . Pour montrons que  $F$  est dérivable en  $a$  et que  $F'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, a) dt$ , par la caractérisation séquentielle de la limite, il suffit de montrer que, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $J \setminus \{a\}$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , on a

$$\frac{F(x_n) - F(a)}{x_n - a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, a) dt.$$

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $J \setminus \{a\}$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par linéarité de l'intégrale on a :

$$\frac{F(x_n) - F(a)}{x_n - a} = \int_I \frac{f(t, x_n) - f(t, a)}{x_n - a} dt.$$

On pose : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $t \in I$ ,

$$g_n(t) = \frac{f(t, x_n) - f(t, a)}{x_n - a} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, a).$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par hypothèse sur  $f$ , la fonction  $g_n : t \mapsto \frac{f(t, x_n) - f(t, a)}{x_n - a}$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- Par hypothèse sur  $f$ , la fonction  $g : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, a)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- Soit  $t \in I$ . On sait que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  et que la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est dérivable en  $a \in J$ .

Donc,  $g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, a) = g(t)$ . D'où, la suite de fonctions  $(g_n)$  converge simplement vers  $g$  sur  $I$ .

- Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in I$ . La fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $D_n$  d'extrémités  $x_n$  et  $a$  ( $D_n = [x_n, a]$  si  $x_n < a$ , et  $D_n = [a, x_n]$  si  $x_n > a$ ). Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$|f(t, x_n) - f(t, a)| \leq \sup_{x \in D_n} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \times |x_n - a|.$$

D'après l'hypothèse de domination, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |g_n(t)| \leq \varphi(t)$$

où  $\varphi$  est positive, continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .

Par le théorème de convergence dominée :

$$\frac{F(x_n) - F(a)}{x_n - a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, a) dt.$$

Ainsi,  $F$  est dérivable en  $a$ . Ceci est vrai pour tout  $a \in J$ . Donc,  $F$  est dérivable sur  $J$ .

► Il reste à montrer que  $F'$  est continue sur  $J$ . Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème de continuité sous le signe  $\int$  (exercice).  $\square$

### Remarque 6.11 – Prudence!

Il faut bien faire attention que  $\varphi$  ne dépende pas de la variable de  $F$  (ici  $x$ ).

 **Remarque 6.12**

Le théorème de dérivation sous le signe intégral permet d'échanger dérivée et intégrale :

$$\int_I \left( \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right) dt = \frac{d}{dx} \left( \int_I f(t, x) dt \right).$$

 **Exemple 6.10**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \times \sin(x \times t) dt.$$

**Montrons que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .**

Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ , on note  $f(t, x) = e^{-t} \times \sin(x \times t)$ .

► Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue, donc continue par morceaux, sur  $[0, +\infty[$ . De plus,

$$|f(t, x)| \leq e^{-t}$$

et  $t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  (intégrale de référence). Ainsi,  $t \mapsto f(t, x)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

► Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

► Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = t \times e^{-t} \times \cos(x \times t)$  est continue, donc continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

► Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[^2$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq t \times e^{-t}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto t \times e^{-t}$  est positive et continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

De plus, par croissances comparées,  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (intégrale de Riemann). Ainsi,  $\varphi$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, par théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} t \times e^{-t} \times \cos(x \times t) dt.$$

 **Remarque 6.13 – La dérivabilité est une propriété locale**

Dans le théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , il suffit en fait d'avoir une domination pour tout  $(t, x) \in I \times [\alpha, \beta]$ , pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset J$ .

En effet, le théorème montre qu'alors, pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset J$ , la fonction  $F$  est dérivable sur  $[\alpha, \beta]$  et  $F'$  est continue sur  $[\alpha, \beta]$ .

Soit  $x_0 \in J$ , il existe un segment  $[\alpha, \beta]$  tel que  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ . On en déduit que  $F$  est dérivable en  $x_0$  et  $F'$  est continue en  $x_0$ . Ceci est vrai pour tout  $x_0 \in J$ . Donc,  $F$  est dérivable en tout point de  $J$  et  $F'$  est continue en tout point de  $J$ . Autrement dit,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ .

 **Exemple 6.11**

1. Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x \times t}}{1 + t^2} dt.$$

**Montrons que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .**

Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on note  $f(t, x) = \frac{e^{-x \times t}}{1 + t^2}$ .

• Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur  $[0, +\infty[$

car  $|f(t, x)| \leq \frac{1}{1+t^2}$  (l'intégrabilité de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  sur  $[0, +\infty[$  a été montrée dans l'exemple 6.6 page 12).

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -t \times \frac{e^{-x \times t}}{1+t^2}$  est continue, donc continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- Soit  $[\alpha, \beta] \subset ]0, +\infty[$  un segment quelconque. Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times [\alpha, \beta]$ , on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| = \frac{t \times e^{-x \times t}}{1+t^2} \leq t \times e^{-\alpha \times t}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto t \times e^{-\alpha \times t}$  est positive et continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ . De plus, par croissances comparées ( $\alpha > 0$ ),  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (intégrale de Riemann). Ainsi,  $\varphi$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, par théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ . Ceci est vrai pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset ]0, +\infty[$ .

Donc  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F'(x) = \int_0^{+\infty} -t \times \frac{e^{-x \times t}}{1+t^2} dt$ .

**Remarque :** dans l'exemple 6.6 page 12, on a montré que  $F$  était continue sur  $[0, +\infty[$ . A cause de l'hypothèse de domination, le théorème de dérivation sous le signe  $\int$  ne permet pas d'étudier la dérivabilité de  $F$  en 0 (en effet, il est indispensable d'avoir  $\alpha > 0$ ).

2. Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x \times t} \times \sin(t) dt.$$

**Montrons que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .**

Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on note  $f(t, x) = e^{-x \times t} \times \sin(t)$ .

- Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur  $[0, +\infty[$  car  $|f(t, x)| \leq e^{-x \times t}$  (intégrale de référence avec  $x > 0$  fixé).
- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -t \times e^{-x \times t} \times \sin(t)$  est continue, donc continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- Soit  $[\alpha, \beta] \subset ]0, +\infty[$  un segment quelconque. Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times [\alpha, \beta]$ , on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| = t \times e^{-x \times t} \times |\sin(t)| \leq t \times e^{-\alpha \times t}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto t \times e^{-\alpha \times t}$  est positive et continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ . De plus, par croissances comparées ( $\alpha > 0$ ),  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (intégrale de Riemann). Ainsi,  $\varphi$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, par théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ . Ceci est vrai pour tout segment  $[\alpha, \beta]$  inclus dans  $]0, +\infty[$ .

Donc  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F'(x) = \int_0^{+\infty} -t \times e^{-x \times t} \times \sin(t) dt$ .

## VI. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

### **Théorème 6.6 – Extension du théorème de dérivation sous le signe $\int$ aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.

On suppose que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  ;
- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x)$  est continue par morceaux et **intégrable** sur  $I$  ;
- pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- **(hypothèse de domination)** il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(t, x) \in I \times J$ , on ait  $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) \right| \leq \varphi(t)$ .

Alors, la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  et on a, pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$  et pour tout  $x \in J$ ,

$$F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x) dt.$$

#### Démonstration

Hors-programme.

□

### **Remarque 6.14**

Dans le théorème précédent, il suffit en fait d'avoir une domination pour tout  $(t, x) \in I \times [\alpha, \beta]$ , pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset J$ .

### **Remarque 6.15 – Classe $\mathcal{C}^\infty$ des intégrales à paramètres**

On reprend les notations du théorème 6.6.

Pour montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $J$ , il suffit d'appliquer le théorème 6.6 pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . On doit alors vérifier que :

- pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue par morceaux et **intégrable** sur  $I$  ;
- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $J$  ;
- pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- **(hypothèse de domination)** pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ , il existe une fonction  $\varphi_j$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(t, x) \in I \times J$ , on ait  $\left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x) \right| \leq \varphi_j(t)$ .

### **Exemple 6.12**

Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x \times t} \times \sin(t) dt.$$

**Montrons que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .**

Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on note  $f(t, x) = e^{-x \times t} \times \sin(t)$ .

- Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur  $[0, +\infty[$

car  $|f(t, x)| \leq e^{-x \times t}$  (intégrale de référence avec  $x > 0$  fixé).

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x) = (-t)^j \times e^{-x \times t} \times \sin(t)$  est continue, donc continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- Soient  $j \in \mathbb{N}^*$  et  $[\alpha, \beta] \subset ]0, +\infty[$  un segment quelconque. Pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times [\alpha, \beta]$ , on a :

$$\left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x) \right| = t^j \times e^{-x \times t} \times |\sin(t)| \leq t^j \times e^{-\alpha \times t}.$$

La fonction  $\varphi_j : t \mapsto t^j \times e^{-\alpha \times t}$  est positive et continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ . De plus, par croissances comparées ( $\alpha > 0$ ),  $\varphi_j(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (intégrale de Riemann). Ainsi,  $\varphi_j$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, par théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ , et pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F^{(j)}(x) = \int_0^{+\infty} (-t)^j \times e^{-x \times t} \times \sin(t) dt$ .