

Probabilités – TD₁₅

Dénombrement

Exercice 1

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on note $s(n, k)$ le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en k parties. Par convention, on pose $s(0, 0) = 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $s(n, 0)$, $s(n, 1)$, $s(n, n-1)$ et $s(n, n)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $s(0, k)$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) + k \times s(n, k).$$

4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $s(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Exercices théoriques

Exercice 2

Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) + n - 1.$$

Exercices pratiques

Univers fini

Exercice 3

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Lorsqu'un dé est pipé, la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer est $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Commenter.

Réponse

1. On note A l'événement « obtenir un 6 » et P l'événement « le dé est pipé ».

On cherche $\mathbb{P}(P|A)$. On a :

$$\mathbb{P}(P|A) = \frac{\mathbb{P}(A|P) \times \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(A)}.$$

De plus, par la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événement $(P, \bar{P})$,

$$\mathbb{P}(P|A) = \frac{\mathbb{P}(A|P) \times \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(A|P) \times \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(A|\bar{P}) \times \mathbb{P}(\bar{P})}.$$

Le dé est choisi au hasard, donc on est dans le cadre de l'équiprobabilité et $\mathbb{P}(P) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, puis $\mathbb{P}(\bar{P}) = \frac{3}{4}$.

De plus, $\mathbb{P}(A|P) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A|\bar{P}) = \frac{1}{6}$.

Donc,

$$\mathbb{P}(P|A) = \frac{1}{2}.$$

2. On note A_n l'événement « obtenir n fois un 6 » et P l'événement « le dé est pipé ».

On cherche $\mathbb{P}(P|A_n)$. On a :

$$\mathbb{P}(P|A_n) = \frac{\mathbb{P}(A_n|P) \times \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(A_n)}.$$

De plus, par la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événement $(P, \bar{P})$,

$$\mathbb{P}(P|A_n) = \frac{\mathbb{P}(A_n|P) \times \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(A_n|P) \times \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(A_n|\bar{P}) \times \mathbb{P}(\bar{P})}.$$

Le dé est choisi au hasard, donc on est dans le cadre de l'équiprobabilité et $\mathbb{P}(P) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, puis $\mathbb{P}(\bar{P}) = \frac{3}{4}$.

De plus, les lancers sont indépendants, donc, $\mathbb{P}(A_n|P) = \frac{1}{2^n}$ et $\mathbb{P}(A_n|\bar{P}) = \frac{1}{6^n}$.

Donc,

$$\mathbb{P}(P|A_n) = \frac{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6^n} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

3. On a $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc, lorsqu'on obtient 6 n fois de suite avec n grand, la probabilité que le dé soit pipé est proche de 1.

Exercice 4

Vous êtes 36 étudiants en PSI cette année. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre vous aient la même date d'anniversaire (on supposera qu'une année est composée de 365 jours).

Exercice 5

Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?

Exercice 6

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la 3^{ème} boule du tirage soit noire ?

Univers dénombrable

Exercice 7

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

Exercice 8

Dans une population, la probabilité qu'une famille ait $n \in \mathbb{N}$ enfants est : $p_n = a \times \frac{2^n}{n!}$ avec $a > 0$.

1. Déterminer la valeur de a .
2. Une famille comporte au moins un enfant. Quelle est la probabilité que la famille ait exactement deux enfants ?

On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou un garçon et l'indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille.

3. Calculer la probabilité qu'une famille comporte au moins une fille.
4. On suppose qu'une famille a au moins une fille. Quelle est la probabilité que la famille soit constituée de deux enfants exactement ?

Exercice 9

Une urne contient une boule rouge et une boule blanche. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur. On répète cette expérience indéfiniment.

1. Déterminer la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges.

2. Montrer que la probabilité de tirer la boule blanche est 1. On dit que l'événement « la boule blanche est tirée » est presque sûr.

Exercice 10 : une soirée arrosée

Un individu se déplace sur l'axe des $\mathbb{Z}$. À l'instant $n = 0$, il se positionne en 0 et, à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il se déplace à droite ou à gauche d'une unité, de façon équiprobable et indépendante des mouvements précédents. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer la probabilité que l'individu soit de nouveau en 0 à l'instant n .
2. Calculer la probabilité que l'individu soit de nouveau en 0 pour la première fois à l'instant n .
3. Montrer que l'individu repasse presque sûrement par 0.

Loi d'une variable aléatoire

Exercice 11

Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, et que X et Y sont indépendantes. Soit $S = X + Y$.

1. Déterminer la loi de S .
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = k)$.

Réponse

1. On sait que X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et Y est à valeurs dans $\llbracket 0, m \rrbracket$.

Donc, S est à valeurs dans $\llbracket 0, n + m \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$. Par la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $(X = \ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = \ell, S = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = \ell, Y = k - \ell).$$

Or, X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Donc,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{\ell=0}^n \mathbb{P}(X = \ell, Y = k - \ell).$$

Par indépendance de X et Y ,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} \times \binom{m}{k-\ell} p^{k-\ell} (1-p)^{m-(k-\ell)} = \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell} \right) p^k (1-p)^{n+m-k}.$$

Remarque : $\binom{m}{k-\ell} = 0$ lorsque $k - \ell < 0$.

Montrons que :

$$\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell} = \binom{n+m}{k}.$$

- $\binom{n+m}{k}$ est le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble à $n + m$ éléments.
- On divise un ensemble à $n + m$ éléments en deux ensembles : l'un à n éléments et l'autre à m éléments.

Pour construire une partie à k éléments,

- on choisit $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$ éléments dans le premier ensemble, il y a $\binom{n}{\ell}$ choix possibles ;
- on choisit $k - \ell$ éléments dans le deuxième ensemble, il y a $\binom{m}{k-\ell}$ choix possibles.

Donc, en sommant, il y a $\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell}$ façons de choisir k éléments dans un ensemble à $n + m$ éléments.

Ainsi,

$$\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell} = \binom{n+m}{k}.$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(S = k) = \binom{n+m}{k} \times p^k \times (1-p)^{n+m-k}.$$

Donc,

S suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$.

Autre démonstration en interprétant les lois binomiales :

- (a) X est le nombre de succès obtenus dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p .
- (b) Y est le nombre de succès obtenus dans la répétition de m expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p .

Comme X et Y sont indépendantes, $X + Y$ est le nombre de succès obtenus dans la répétition de $n + m$ expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p .

Donc,

S suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$.

Remarque : on verra une autre façon de retrouver ce résultat à partir des séries génératrices.

2. Sachant $(S = k)$, comme X et Y sont positives, X est à valeurs dans $\llbracket 0, k \rrbracket$.

Soit $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$. On a :

$$\mathbb{P}(X = j | S = k) = \frac{\mathbb{P}(X = j, S = k)}{\mathbb{P}(S = k)} = \frac{\mathbb{P}(X = j, Y = k - j)}{\mathbb{P}(S = k)}.$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}(X = j | S = k) = \frac{\mathbb{P}(X = j) \times \mathbb{P}(Y = k - j)}{\mathbb{P}(S = k)} = \frac{\binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \times \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-(k-j)}}{\binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}} = \frac{\binom{n}{j} \times \binom{m}{k-j}}{\binom{n+m}{k}}.$$

Remarque hors-programme : sachant $S = k$, X suit une loi hypergéométrique.

Exercice 12

Soient $(p, q) \in]0, 1[^2$, et $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$ deux variables aléatoires indépendantes.

On note $M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité pour que M soit diagonalisable.

Exercice 13

Soit $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p q^k.$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$.

1. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, déterminer $\mathbb{P}(Z = m, T = n)$.
2. En déduire la loi de la variable aléatoire Z .

Exercice 14

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \dots, U_n$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on pioche une boule de l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne, Y la variable aléatoire donnant le numéro de la boule choisie.

1. Déterminer la loi de (X, Y) , l'espérance de Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 15

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, indépendantes. On pose $Z = X + Y$.

1. Déterminer la loi de Z .
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X = k | Z = n)$.
3. En déduire la loi de X sachant ($Z = n$).

Exercice 16

Un promeneur ramasse un nombre N de champignons où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'un champignon est un bolet avec probabilité p et une morille avec probabilité $1 - p$. On note X la loi du nombre de bolets ramassés, Y la loi du nombre de morilles ramassés.

1. Déterminer la loi conjointe de (N, X) . En déduire la loi de X .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 17

Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq n \leq N$. Dans un étang, il y a n brochets (identiques) et $N - n$ carpes (identiques). Un pêcheur pêche un poisson et le rejette juste après.

1. Quelle est la probabilité que le pêcheur ait pêché n brochets après n prises ?
2. Quelle est la probabilité que le pêcheur ait pêché n brochets après $n + 1$ prises ?
3. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Soit X_i le nombre de prises nécessaires afin d'obtenir i brochets. Déterminer la loi de X_i .

Exercice 18

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et $Z = \min(X, Y)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq n)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Z \geq n)$, puis $\mathbb{P}(Z = n)$. En déduire la loi de Z .
3. Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 19

Trois individus jouent au ballon :

- le joueur A envoie la balle à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
- le joueur B envoie la balle à A avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
- le joueur C envoie la balle à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à A avec probabilité $\frac{2}{3}$.

On note A_n l'événement : le joueur A reçoit le ballon au n -ième lancer, et on définit de même B_n, C_n . Enfin on note X_n le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n)$.

1. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$.
2. Montrer que la suite (X_n) converge.

Réponse

1. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n) = 0 \times \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(B_n) + \frac{2}{3} \times \mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(A_n) + 0 \times \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}(C_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n) = \frac{2}{3} \times \mathbb{P}(A_n) + \frac{2}{3} \times \mathbb{P}(B_n) + 0 \times \mathbb{P}(C_n) \end{aligned}$$

Donc,

$$X_{n+1} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=M}$$

2. Par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n \times X_0$.

Montrons que la suite de matrices (M^n) converge.

On a :

$$\chi_M = \cdots = (X - 1) \times \left(X + \frac{1}{3}\right) \times \left(X + \frac{2}{3}\right).$$

Le polynôme caractéristique de M est scindé à racines simples, donc, M est diagonalisable : il existe P inversible telle que,

$$M = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \times P^{-1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = M^n \times X_0 = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} \times P^{-1} \times X_0.$$

Or, $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ et $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, donc,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta.$$

L'application $M \mapsto P \times M \times P^{-1} \times X_0$ est linéaire en dimension finie, donc, est continue.

Donc,

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \times \Delta \times P^{-1} \times X_0.$$

Donc,

La suite (X_n) converge.