

Espaces euclidiens

Produit scalaire

Exercice 1 (*)

Soit E un espace euclidien, $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$, et $k \in \mathbb{R}$. On définit $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x, y) = \langle x | y \rangle + k \langle x | a \rangle \langle y | a \rangle.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante ϕ est-il un produit scalaire ?

Exercice 2 (*)

Soit E un espace euclidien, et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|x + ty\| \geq \|x\|$.

Exercice 3 (*)

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Prouver que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

Exercice 4 (**)

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\inf_{f \in \mathcal{A}} \left(\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right)$.

Exercice 5 (**)

Soit E un espace préhilbertien réel, et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs unitaires.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $\left\| \sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k \right\| \leq \sqrt{n}$.

- a. On considère n variables aléatoires indépendantes $R_1, \dots, R_n$ de même loi de Rademacher (autrement dit, $\mathbb{P}(R_k = 1) = \mathbb{P}(R_k = -1) = 1/2$). Calculer l'espérance de $\left\| \sum_{k=1}^n R_k u_k \right\|^2$.
- b. Conclure.

Projection orthogonale

Exercice 6 (*)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On considère un espace euclidien E de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E . Déterminer la matrice associée dans la base (e) à la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

Exercice 7 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. Pour tout $P, Q \in E$ on pose

$$\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k) Q(a_k)$$

- a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
- b. Déterminer une base orthonormée de E .
- c. Calculer la distance d'un polynôme Q de E au sous-espace vectoriel $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$.

Exercice 8 (*)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle M | N \rangle = \text{tr}(M^T N)$, on pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$, et on note J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H .

Exercice 9 (*)

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 + ax - b)^2 dx$.

Exercice 10 (**)

Soit p une projection vectorielle d'un espace euclidien E . Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Espaces euclidiens

Exercice 11 (**)

Soient (e) et (f) deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E de dimension n , et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la quantité $\alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i | u(e_j) \rangle^2$ ne dépend pas de (e) et (f) .

Exercice 12 (**)

Soit E un espace préhilbertien réel, et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs vérifiant :

- (i) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|u_k\| = 1$;
- (ii) $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1$.
 - a. Montrer qu'on peut remplacer la condition (ii) par la condition :
- (iii) $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies \langle u_i | u_j \rangle = 1/2$.
 - b. Montrer alors que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Exercice 13 (**)

Soit E un espace euclidien de dimension n . Prouver l'existence d'une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|u_k\| = 1$ et $i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1$ (on pourra raisonner par récurrence).

Exercice 14 (***)

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Une famille de p vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque $i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle < 0$. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que $p \leq n + 1$.

Exercice 15 (**)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note Q_n le polynôme $\frac{1}{2^n n!} (X^2 - 1)^n$.

- a. Exprimer le degré et le coefficient dominant de Q_n , et déterminer les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.
- b. On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis que pour tout $n \geq 1, Q_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- c. Calculer $\|Q_n\|$.
- d. Exprimer à l'aide de la famille (Q_n) la famille obtenue lorsqu'on applique la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 (***)

Soit E un espace euclidien de dimension n , $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E , et $(e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée obtenue par le procédé de Schmidt à partir de $(u_1, \dots, u_n)$. On note $R = \text{Mat}_e(u_1, \dots, u_n)$ la matrice des composantes dans la base (e) de la famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$.

a. Justifier l'affirmation : « R est une matrice triangulaire supérieure », et en déduire que $|\det R| \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|$.

On considère maintenant une matrice inversible $A = (a_{ij}) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

b. En interprétant A comme la matrice de passage de la base canonique (b) vers une base $(u_1, \dots, u_n)$, démontrer l'existence d'une matrice orthogonale Q et d'une matrice triangulaire supérieure R vérifiant : $A = QR$.

c. En déduire que si les coefficients de A vérifient : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{ij}| \leq 1$, alors $|\det A| \leq n^{n/2}$. Peut-on avoir égalité ?

Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice 17 (*)

Soit E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$. On considère $u : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \lambda \langle x | a \rangle a \end{pmatrix}$.

À quelle condition a-t-on $u \in \mathcal{O}(E)$? Dans ce cas, décrire u .

Exercice 18 (*)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle M | N \rangle = \text{tr}(M^T N)$.

Soit $A \in E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(M) = AM$. À quelle condition u est-il une isométrie vectorielle de E ?

Exercice 19 (*)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n$ (interpréter vectoriellement).

Exercice 20 (**)

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie vectorielle. On pose $v = u - \text{Id}$.

Montrer que $\text{Im } v = (\text{Ker } v)^\perp$.

En déduire que la suite $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$ converge vers p , projection orthogonale sur $\text{Ker } v$.

Exercice 21 (**)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x | y \rangle = 0 \implies \langle u(x) | u(y) \rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle $v \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = \lambda v$.

Exercice 22 (**)

Soit E un espace euclidien. On considère des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ de E tels que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\langle u_i | u_j \rangle = \langle v_i | v_j \rangle$, et le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une isométrie vectorielle $f \in \mathcal{O}(E)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(u_i) = v_i$.

- Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une base de E .
- Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une famille génératrice de E .
- Traiter l'exercice dans le cas général.

Exercice 23 (*)

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}(E)$ et $a \leq b$ deux réels.

Montrer que $\text{Sp}(u) \subset [a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle u(x) - ax | u(x) - bx \rangle \leq 0$.

Exercice 24 (**)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Montrer l'existence de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et de vecteurs unitaires $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k u_k^T$.

Exercice 25 (*)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.

a. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{\langle u(x) | x \rangle}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0\}$ un minimum et un maximum, qu'on exprimera à l'aide des valeurs propres de u . Pour quels vecteurs de E ces extremums sont-ils atteints?

b. En déduire les valeurs maximale et minimale pour $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ de la quantité $\phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

Exercice 26 (**)

Soit E un espace euclidien et u et v deux endomorphismes autoadjoints qui commutent : $u \circ v = v \circ u$. Montrer l'existence d'une base orthonormée (e) telle que $\text{Mat}_e(u)$ et $\text{Mat}_e(v)$ soient diagonales.

Exercice 27 (**)

Soit u un endomorphisme autoadjoint positif d'un espace euclidien. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u$.

Exercice 28 (*)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det A)^{1/n} \leq \frac{\text{tr}(A)}{n}$.

On pourra utiliser l'inégalité de Jensen pour une fonction convexe : $f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 29 (**)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle positive, et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $|\text{tr}(AU)| \leq \text{tr}(A)$.

Exercice 30 (**)

Soit E un espace euclidien de dimension n . À $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ on associe la *matrice de Gram* :

$$G = \left(\langle x_i | x_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq p}.$$

Montrer que $G = A^T A$, où $A = \text{Mat}_e(x_1, \dots, x_p)$ et (e) une base orthonormée quelconque de E . En déduire que $\det G \geq 0$.

Exercice 31 (***)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive.

a. Montrer que $\langle X | Y \rangle = X^T A Y$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b. Soit (b) la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et (e) la base orthonormée pour le produit scalaire défini à la question précédente obtenu en appliquant la méthode de Gram-Schmidt à (e) .

On pose $M = \text{Mat}_{(e)}(b)$. Justifier que M est une matrice triangulaire supérieure vérifiant $M^T M = A$.

c. En déduire que $\det A \leq \prod_{k=1}^n a_{kk}$. Dans quel cas a-t-on égalité?

Exercice 32 (**)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint tel que $\text{tr } u = 0$.

- Montrer l'existence d'un vecteur non nul $x \in E$ tel que $\langle u(x) | x \rangle = 0$.
- En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle u(e_i) | e_i \rangle = 0$. Que dire de la matrice associée à u dans la base (e) ?

Exercice 33 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant : $A^T = -A$.

- Déterminer le spectre de A . À quelle condition cette matrice est-elle diagonalisable?
- Montrer que $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et en déduire que $\text{rg}(A)$ est un entier pair.