

Racines

EXERCICE 1: [Indications] - Cours - Raisonner - Trouver un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers tels que $P(2 + \sqrt{2}) = 0$

EXERCICE 2: [Indications] - Cours - Raisonner -

- Justifier que le polynôme $P(X) = X^5 + X^2 - 2$ admet au moins une racine réelle.
- Montrer que P' a exactement deux racines réelles α et β et les expliciter.
 - Justifier que les racines ainsi trouvées ne sont pas doubles.
 - Montrer qu'il existe des coefficients $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P' = (X - \alpha)(X - \beta)(5X^2 + bX + c)$$

et tel que $(5X^2 + bX + c)$ n'ait pas de racine réelle. *On ne demande pas d'expliquer b, c .*

- Étudier le signe de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto P'(x)$ suivant les valeurs de x .
- En déduire que P n'admet qu'une seule racine réelle. *(On pourra éventuellement faire appel à une calculatrice pour calculer certaines valeurs approchées si besoin.)*

EXERCICE 3: [Indications] - Cours - Calculer -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $X^{n+1} + \alpha X^n + \beta$ admette 1 comme racine multiple.

Divisibilité

EXERCICE 4: [Indications] - Cours - Calculer -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que B divise A , où :

- $B = X(X+1)(2X+1)$ et $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$
- $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$
- $B = X^2 - 2X \cos \theta + 1$ et $A = X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$. où $\theta \neq 0 [\pi]$ ☆

EXERCICE 5: [Indications]

Déterminer les polynômes $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $X^n - R$ se factorisent par $(X-1)^2$.

Factorisation

EXERCICE 6: [Indications] - Cours - Calculer -

- Soit $P = X^4 + 2X^2 + 1$.
 - Vérifier que i est racine de P .
 - En déduire une autre racine de P .
 - En déduire alors un polynôme Q tel que

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)Q$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont à déterminer.

- En déduire pour finir la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
- Faire de même pour $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

EXERCICE 7: [Indications] - Calculer - Mobiliser -

Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles les polynômes suivants :

- $A = X^4 - 1$
- Classique et à connaître : $B = X^2 + X + 1$
- $C = X^4 + X^2 + 1$
- $D = X^3 + X^2 + X + 1$
- $E = X^6 + X^4 + X^2 + 1$
- $F = X^5 - 4X^4 + X^3 + 10X^2 - 4X - 8$ ☆

EXERCICE 8: [Indications] - Calculer - Mobiliser -

- Déterminer l'ensemble des nombres complexes α tels que $\alpha^2 = i$.
- Écrire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de $P = X^2 + 1$.
- En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de $Q = X^4 + 1$. ☆

EXERCICE 9: [Indications] -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n = X^n - 1$

- Montrer que les $\alpha_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ sont racines de ce polynôme pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
 - Expliciter une racine réelle parmi celles évoquées ci-dessus.
 - En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ de P_n
- Application : Chercher une factorisation dans $\mathbb{C}$ de
 - $A = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
 - $B = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.

EXERCICE 10: [Indications]

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul. On se donne ci-dessous une équation que l'on souhaite résoudre :

$$(P')^2 = \lambda P$$

1. Étudier le degré des solutions possibles.
2. Justifier que P' admet exactement une seule racine et que celle-ci est racine double de P .
3. Trouver toutes les solutions possibles en les exprimant sous la forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$.

EXERCICE 11: [Indications] – Cours – Calculer – Raisonner – Chercher –

On cherche à résoudre l'équation $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul.

1. On suppose que P est solution.
 - a) Quel est le degré de P ?
 - b) Quel est le coefficient dominant de P ?
 - c) Justifier que P admet au moins une racine réelle. On la notera α .
2. a) Montrer que soit α est racine au moins double de P , soit on a $P'' = 6(X - \alpha)$.
 b) Trouver les P possibles dans les deux cas. ☆
3. Répondre à la question posée. ☆

EXERCICE 12: [Indications] – Raisonner – Chercher – (ENS) ☆

On se propose de déterminer tous les polynômes non nuls P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$$

1. a) Soit α une racine de P . Montrer que α^2 est racine de P .
 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P .
 c) En déduire que le module de α est nécessairement égal à 0 ou 1. ☆
2. Que peut-on dire de $(\alpha - 2)^2$? ☆
3. Montrer que P n'admet pas d'autre racine que 1.
4. Conclure.

EXERCICE 13: [Indications] – Cours – Raisonner – (ENS) ☆☆

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toutes les racines sont soit complexes, soit de multiplicité paire. ☆☆

2. a) En déduire qu'il existe deux polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = A^2B \quad \text{où } B \text{ n'a aucune racine réelle et } B > 0$$

- b) Justifier que B est de degré pair.
3. On admettra pour la suite que les éventuelles racines complexes d'un polynôme réel sont présentes dans ledit polynôme avec la même multiplicité.
 - a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $B = Q \cdot \overline{Q}$ où $\overline{Q}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de Q . ☆☆
 - b) En déduire qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que ☆

$$P = S^2 + T^2$$

Indications

Exercice 1

On pourra penser à la forme des racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels.

Exercice 2

1. Regarder la parité du degré de P .
3. On a le signe de P' . Penser à utiliser la stratégie "habituelle" pour étudier le sens de variation de P

Exercice 7

en l'absence de calculs simples, on peut commencer par chercher une racine évidente dans la plupart des cas $(1, 2, 3, -1, -2, -3, i)$. Si tel est le cas, on pensera à vérifier si la racine est multiple.

3. On pourra commencer par poser $y = x^2$ dans la résolution de $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
5. On peut poser $y = x^2$ dans la résolution de $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$

Exercice 9

2. b) On pourra remarquer que $T = \sum_{k=0}^6 (-X)^k$ et se ramener ensuite au cas $X^n - 1$.

Exercice 11

1. a) On pensera à faire d'abord une équation aux degrés.

Exercice 13

1. On pourra éventuellement faire un raisonnement par l'absurde.
2. a) On pourra éventuellement raisonner par récurrence de le degré de P .
3. a) On pourra penser à utiliser la décomposition de B dans $\mathbb{C}$.