

Problématique :

On rappelle que pour toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en choisissant E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension respective ainsi qu'une base respective $\mathcal{B}_0$ de E de dimension n , on peut construire un unique endomorphisme $f : E \rightarrow E$ tel que :

$$M_{\mathcal{B}_0}(f) = M = \overbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}}^{f(\mathcal{B}_0)} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Notre but est, notamment pour les endomorphismes en dimension finie, de trouver des bases dans lesquelles la matrice de f sera simplifiée au maximum, pour ne former, dans l'idéal, qu'une matrice diagonale (et ceci afin de permettre des calculs ultérieurs plus simples). Si une telle base $\mathcal{B}$ existe, la matrice de f dans cette base se présentera donc de la manière suivante :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \overbrace{\begin{pmatrix} v_1 & f(v_1) & \dots & f(v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}}^{f(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ (notée } D \text{)}$$

De cette manière, on voit apparaître la relation de proportionnalité

$$f(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Ce qui, matriciellement, se traduit par

$$MX_i = \lambda X_i.$$

où $X_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i)$ est le vecteur coordonnées de $v_i \in E$ dans la base $\mathcal{B}$.

On va donc s'astreindre à chercher le plus possible des tels valeurs λ_i et de vecteurs v_i (ou X_i suivant l'approche).

Notation :

Dans tout ce chapitre, on notera :

- E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec $n = \dim E$ si la dimension est finie ainsi que dans ce cas, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,
- $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E ,
- et pour finir $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

I Valeur propre et vecteur propre d'une matrice

I-1 Définition et propriétés élémentaires

Définition

Étant donné une matrice M carrée de dimension $n \times n$, on dit que n est l'ordre de la matrice.

Exemple 1 :

La matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est d'ordre 2.

Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- λ est appelée *valeur propre* de M :
s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que

$$MX = \lambda X.$$

On note $Sp(M)$ et on appelle *spectre de M* l'ensemble des valeurs propres de M .

- $X \neq 0$ est appelé *vecteur propre* de M (de valeur propre λ) s'il existe λ tel que

$$MX = \lambda X.$$

Exemple 2 :

Avec $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M :

$$\text{On a : } MV = 2V.$$

Ainsi, 2 est **valeur propre** de M , et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ est **vecteur propre** de valeur propre 2 de la matrice M .

UN VECTEUR PROPRE EST NON NUL

Pour un vecteur propre, on impose la condition $X \neq \vec{0}$ car justement, pour $X = \vec{0}$, la condition $MX = \lambda X$ est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. En effet :

$$M \times \vec{0} = \vec{0} = \lambda \vec{0}$$

Le vocabulaire de valeur propre n'aurait donc plus d'intérêt.

? Exercice 1

On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et déterminer sa valeur propre associée.

Solution

Tout d'abord, $X \neq 0$. De plus, on a

$$MX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X$$

Ainsi, X est un vecteur propre de valeur propre 3.

? Exercice 2

On pose

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Montrer que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M de valeur propre i .

Solution

Tout d'abord, $X \neq 0$. De plus, on a

$$MX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i^2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = iX$$

Ainsi, X est un vecteur propre de valeur propre i .



Notation :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et toute matrice carrée M , on note

$$E_\lambda(M) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid MX = \lambda X\}$$



Définition

Si λ est une valeur propre de M , alors on appelle $E_\lambda(M) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid MX = \lambda X\}$ l'*espace propre* de la valeur propre λ .

? Exercice 3

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'espace propre de M de la valeur propre 3.

Solution

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $MX = 3X$. Or

$$MX = 3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{De solutions } E_3(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Notation : S'il n'y a pas de confusion possible, on notera E_λ au lieu de $E_\lambda(M)$.



Remarque :

- 1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $0_E \in E_\lambda(M)$.
- 2) Les vecteurs propres de $\text{vap } \lambda$ sont les éléments non nuls de $E_\lambda(M)$.
- 3) $E_\lambda = \ker(M - \lambda Id)$, ce qui entraîne que E_λ est un $\mathbb{K}$ -s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

Ainsi, **un vecteur propre n'est pas unique !** Notamment,

si $V \in E_\lambda$, alors $\text{Vect}(V) \subset E_\lambda$.

- 4) En utilisant le théorème du rang sur l'égalité précédente, on obtient :

$$\dim E_\lambda = n - \text{rg}(M - \lambda Id).$$

- 5) $E_0(M) = \ker M$.

On déduit directement de la remarque précédente la propriété ci-dessous, qui nous permettra d'élaborer par la suite nos stratégies de calcul de valeurs propres et vecteurs propres :

Propriété 1 fondamentale

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } M &\iff E_\lambda \neq \{0_E\} \\ &\iff \ker(M - \lambda Id) \neq \{0_E\} \\ &\iff \dim(\ker(M - \lambda Id)) \neq 0 \\ &\iff \text{rg}(M - \lambda Id) < n \end{aligned}$$

? Exercice 4

Pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{rg}(M + Id)$. En déduire que -1 est une valeur propre de M ainsi que $\dim E_{-1}$.

Solution

On sait que $\dim E_{-1}(M) = n - \text{rg}(M - (-Id)) = 2 - \text{rg}(M + Id)$. Or

$$M - (-Id) = M + Id = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{de rang } 1 < 2$$

D'où -1 est bien valeur propre de M et

$$\dim E_{-1}(M) = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Corollaire *inversibilité*

M est inversible ssi 0 n'est pas valeur propre de M .

Démonstration :

M étant carrée, on a

$$\begin{aligned} M \text{ inversible} &\Leftrightarrow \text{rg}(M) = n \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(M - 0 \cdot Id) = n \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(M - \lambda Id)) = n - n = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre} \end{aligned}$$

□

? Exercice 5

Montrer que 0 n'est pas valeur propre de la matrice de l'exercice précédent.

Solution

On a $\text{rg}(M) = 2$ car les 2 colonnes sont non proportionnelles. Ainsi, la matrice est inversible et 0 n'est pas valeur propre.

Autre façon de voir : $\text{rg}(M - 0Id) = \text{rg}(M) = 2 \not< 2$. Donc 0 n'est pas valeur propre.

I-2

Stratégies de calcul des valeurs propres d'une matrice

I.2-a) Si l'énoncé me propose une valeur propre à vérifier

Méthode 1 : Pour montrer que 0 est valeur propre :

$$0 \text{ est vap} \Leftrightarrow M \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow \text{rg}(M) < n.$$

■ Exemple 3 :

Montrer que 0 est valeur propre de $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

On observe que $\text{rg}(M) = 1 < 2$. Ainsi, 0 est valeur propre.

Et de manière générale :

Méthode 2 : Pour montrer qu'une valeur λ donnée est vap :

On vérifie simplement que $\text{rg}(M - \lambda Id) < n$.

■ Exemple 4 :

Montrer que -2 est valeur propre de $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On a

$$M - (-2Id) = M + 2Id = \begin{pmatrix} -1+2 & 1 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de rang $1 < 2$. Ainsi, -2 est bien valeur propre de M .

I.2-b) Si je dois toutes les chercher : cas M triangulaire (ou diagonale)

Propriété 2

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice triangulaire est l'ensemble de tous les coefficients diagonaux.

Démonstration :

Quitte à ce que les coefficients $*$ ci-dessous soient nuls ou à transposer la matrice, on ne perd rien à supposer qu'elle est triangulaire supérieure. On pose

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ est une valeur propre de M si et seulement si $\text{rg}(M - \lambda Id) < n$. Or $D - \lambda Id =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

qui est de rang $< n$ si et seulement si l'un des coefficients diagonaux s'annule, autrement dit, si et seulement si $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, d'où $Sp(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ $\square$

I.2-c) Si je dois toutes les chercher : cas M quelconque

Méthode 3 : On détermine toutes les valeurs λ telles que $\text{rg}(M - \lambda Id) < n$.

■ Exemple 5 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. Alors

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4 - \lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5 - \lambda \end{pmatrix}$$

Première stratégie possible : pivot de Gauss

"Sans se poser de questions" : faire un **pivot de Gauss** pour arriver à une matrice triangulaire. Il faut néanmoins choisir stratégiquement ses pivots, mais attention, toujours **non nuls** !

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & \boxed{1} \\ 2 & 4 - \lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5 - \lambda \end{pmatrix}$$

on annule les coeff : $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 + (5 + \lambda)L_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 4 - 2\lambda & 8 - \lambda & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Le nouveau pivot devrait être en $C_2; L_2$, mais l'expression peut s'annuler.

À ce stade là, on a donc deux possibilités :

★ continuité de la méthode : "je ne me pose pas de questions" :

On prend comme pivot la quantité $8 - \lambda$ (coefficient du milieu). Néanmoins, il faut s'assurer qu'il est non nul. Il faut donc séparer les cas :

Si $\lambda = 8$:

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -12 & 0 & 0 \\ -88 & 32 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -88 & 32 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de rang 3. $\lambda = 8$ n'est donc pas valeur propre.

Si $\lambda \neq 8$: on choisit comme pivot $8 - \lambda$:

$$\begin{aligned} M - \lambda I_3 &\sim \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 4 - 2\lambda & \boxed{8 - \lambda} & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \text{opération : } L_3 \leftarrow (8 - \lambda)L_3 - (16 + 2\lambda)L_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 4 - 2\lambda & \boxed{8 - \lambda} & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A &= (8 - \lambda)(-\lambda^2 - 4\lambda + 8) - (16 + 2\lambda)(4 - 2\lambda) \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 \underbrace{(-8 + 4 + 4)}_{=0} + \lambda \underbrace{(-4 \times 8 - 8 + 2 \times 16 - 2 \times 4)}_{=-16} + \underbrace{8^2 - 4 \times 16}_{=0} \\ &= \lambda^3 - 16\lambda = \lambda(\lambda^2 - 16) = \boxed{\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 4)} \end{aligned}$$

Ainsi

$$Sp(M) = \{0, -4, 4\}.$$

★ ou bien "je me débarrasse du problème de pivot nul" :

à partir de $\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 4 - 2\lambda & 8 - \lambda & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$, on retire les λ du coefficient diagonal : $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$

$$\begin{aligned} M - \lambda I_3 &\sim \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 2(4 - 2\lambda) - \lambda^2 - 4\lambda + 8 & 32 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 32 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \text{On peut éventuellement simplifier la deuxième colonne par 2} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 16 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 8 + \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis } L_3 : 16L_3 - (8 + \lambda)L_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 16 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A &= 16(-\lambda^2 - 4\lambda + 8) - (8 + \lambda)(-\lambda^2 - 8\lambda + 16) \\ &= 16(-\lambda^2 - 4\lambda + 8) - (-\lambda^3 + \lambda^2 \underbrace{(-8 - 8)}_{-16} + \lambda \underbrace{(-8.8 + 16)}_{-64 + 16 = -48} + 8.16) \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 \underbrace{(-16 + 16)}_{-16} + \lambda \underbrace{(-4.16 + 48)}_{-16} = \lambda^3 - 16\lambda = \lambda(\lambda^2 - 16) = \boxed{\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 4)} \end{aligned}$$

Ainsi

$$Sp(M) = \{0, -4, 4\}.$$

Avantage : avec ces méthodes, on obtient toujours une équation à résoudre.

Inconvénient : il n'est pas toujours simple de la résoudre ...

Deuxième stratégie possible : recherche de combinaisons pertinentes

Tenter de mettre en valeur par de simples **combinaisons de lignes ou de colonnes** une colonne ou une ligne entière ayant des coefficients proportionnels.

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 4-\lambda & 4-\lambda & -2 \\ 4-\lambda & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} \quad \boxed{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}$$

on annule les coefficients de la première colonne :

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \quad L_3 \rightarrow L_3 - L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & \boxed{4} & -6-\lambda \end{pmatrix}$$

pas de simplification évidente, alors on revient au pivot de Gauss

on place sur la diagonale un élément non nul de manière certaine, on échange L_3 et L_2

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -6-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -3 \end{pmatrix}$$

et c'est parti pour le pivot ! $L_3 \rightarrow 4L_3 - (2-\lambda)L_2$

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \\ 0 & 0 & \underbrace{-3 \times 4 - (2-\lambda)(-6-\lambda)}_{-\lambda^2 - 4\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+4) \end{pmatrix}$$

On trouve de même que

$$Sp(M) = \{0, -4, 4\}$$

Avantage : Au final le polynôme dont il faut trouver les racines n'est ici "que" de degré 2 au lieu d'être de degré 3 dans l'autre méthode...

Inconvénient : Il n'est pas toujours évident de trouver des combinaisons simples à effectuer, mais il peut valoir la peine de prendre quelques minutes pour y réfléchir. Surtout si la matrice est de grande taille.

Méthode 4 : par résolution de système : "recherche" de $\ker(M - \lambda Id)$:

λ est vap ssi l'espace $\ker(M - \lambda Id)$ est non réduit à $\{\vec{0}\}$. On cherche donc les λ pour lesquels le système issu de $(M - \lambda Id)(V) = \vec{0}$ admette au moins une solution non nulle, en posant $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Par exemple, toujours pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. Alors

$$(M - \lambda Id)(V) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + \boxed{z} = 0 \\ 2x + (4-\lambda)y - 2z = 0 \\ 3x + 6y - (5+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (5+\lambda)L_1 \end{matrix} \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (4-2\lambda)x + (8-\lambda)y = 0 \\ (3+(5+\lambda)(1-\lambda))x + (6+2(5+\lambda))y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (4-2\lambda)x + (8-\lambda)y = 0 \\ (8-4\lambda-\lambda^2)x + (16+2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Recherche d'un pivot non nul :

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{matrix} \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + \boxed{32}y = 0 \\ (8-4\lambda-\lambda^2)x + (16+2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_3 \leftarrow 16L_3 - (8+\lambda)L_2 \end{matrix} \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ Ax = 0 \end{cases}$$

où $A = 16(-\lambda^2 - 4\lambda + 8) - (8+\lambda)(-\lambda^2 - 8\lambda + 16) = \lambda(\lambda-4)(\lambda+4)$

Le système admet une unique solution (qui est $\vec{0}$) si et seulement si $A = \lambda(\lambda-4)(\lambda+4) \neq 0$.

Sinon, le système est de Cramer et on obtient $x = y = z = 0$. On a donc

$$\lambda \text{ vap} \Leftrightarrow \lambda \in \ker(M - \lambda Id) \Leftrightarrow \boxed{\lambda \in \{0, -4, 4\}}$$

Avantage : Méthode efficace à tous les coups. (Méthode très similaire au pivot de Gauss dans la matrice $M - \lambda Id$.) Permet de calculer ensuite rapidement les espaces propres...

Inconvénient : Pas très esthétique et un peu rébarbatif. La justification finale est de plus complexe à justifier correctement. De plus, on peut obtenir le même résultat en ne faisant

que des opérations de ligne sur la matrice $M - \lambda Id$. Cette technique est donc généralement peu utilisée.



Remarque :

Si je connais déjà l'existence d'une ou plusieurs valeurs propres, déterminer les autres peut être simplifié.

■ Exemple 6 :

Supposons donné la matrice M pour laquelle, après triangularisation, on obtient

$$M - \lambda Id \sim \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda - 100 \end{pmatrix}$$

Sachant que 5 est valeur propre de M , déterminer le spectre complet de M .

λ est vap de M ssi $\text{rg}(M - \lambda Id) < 3$. D'après la triangularisation, on sait alors que

$$\lambda \text{ est vap de } M \text{ ssi } \underbrace{-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda - 100}_A = 0$$

Or, on sait que 5 est vap, $\lambda = 5$ est donc racine de A .

De plus, $A'(5) = 0$. La valeur 5 est donc racine multiple.

Ainsi, (coefficient dominant $= -1$), il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = -(\lambda - 5)^2(\lambda - a)$$

Par identification des coefficients (notamment ici à vue : $5^2 a = -100$), on obtient $a = -4$

$$\begin{aligned} A &= -(\lambda - 5)^2(\lambda + 4) \\ \text{Ainsi } Sp(M) &= \{-4, 5\} \end{aligned}$$

I-3 Stratégies de calcul des espaces propres d'une matrice

On rappelle les espaces propres de M : $E_\lambda = \ker(M - \lambda Id)$

I.3-a) Si je cherche seulement les dimensions

Il se peut que l'énoncé ne nécessite pas le calcul exact de l'espace propre associé à la vap λ , mais seulement la connaissance de la dimension de E_λ . Dans ce cas, notons que

$$\dim E_\lambda = \dim \ker(M - \lambda Id) = n - \text{rg}(M - \lambda Id)$$

D'où :

Méthode 5 : Par recherche de rang avec $\dim E_\lambda = n - \text{rg}(M - \lambda Id)$:

| Il suffit de triangulariser $(M - \lambda Id)$ avec λ la valeur propre désirée.



Remarque :

Si on a utilisé la méthode 1 pour trouver les valeurs propres, il n'y a pas de calcul supplémentaire à faire. Ce rang est obtenu directement sur la matrice réduite de $M - \lambda Id$!

■ Exemple 7 :

Avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, on a trouvé une réduite : $\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 - \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda + 4) \end{pmatrix}$.

Pour la valeur propre 4, on a donc

$$\text{rg}(M - 4Id) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} = 2$$

D'où

$$\dim E_4 = 3 - 2 = 1$$

Remarque : Dans le cas de cette matrice, on aurait pu trouver les dimensions associées d'une manière encore plus rapide. C'est ce que nous verrons entre autres par la suite.

Nous avons fait également un autre exemple sur ce point dans un exercice en page 3.

I.3-b) Si l'énoncé me suggère un/des vecteur(s) propre(s)

Méthode 6 : Par vérification directe de $MX = \lambda X$.

Si l'énoncé me propose par exemple de vérifier que $E_\lambda = \text{Vect}(V_1, \dots, V_s)$, alors je vérifie que chaque V_i est vep, en vérifiant qu'on a bien $MV_i = \lambda V_i$ pour tout i . Je détermine ensuite que $\dim E_\lambda = s$ (cf. section précédente.)

■ Exemple 8 :

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{En effet, on a } MV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

■ Exemple 9 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Montrons que $E_4 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

On note V_1, V_2 respectivement les vecteurs donnés dans l'énoncé.

• Montrons que $\text{Vect}(V_1, V_2) \subset E_4$:

Par calcul, on a

$$MV_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4V_1, \quad MV_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4V_2$$

Donc $V_1, V_2 \in E_4$ et donc, comme E_4 est un e.V., $\text{Vect}(V_1, V_2) \subset E_4$.

• Montrons que $\text{Vect}(V_1, V_2) = E_4$:

Comme $\text{Vect}(V_1, V_2) \subset E_4$, il y a égalité ssi les dimensions sont égales.

D'une part, comme V_1, V_2 sont non proportionnels, on a $\dim \text{Vect}(V_1, V_2) = 2$.

D'autre part, $\dim E_4 = 3 - \text{rg}(M - 4Id)$

Or

$$\text{rg}(M - 4Id) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right) = 1 \quad (\text{lignes proportionnelles})$$

D'où $\dim E_4 = 3 - 1 = 2 = \dim \text{Vect}(V_1, V_2)$ et donc $\text{Vect}(V_1, V_2) = E_4$.

I.3-c) Si je cherche une base de ces espaces connaissant la vap associée

Méthode 7 : Par résolution de système :

| On résoud $(M - \lambda Id)V = 0$, où $\lambda \in Sp(M)$

Ici encore, plusieurs stratégies possibles *qui dépendent principalement de la méthode utilisée pour trouver les vap.* :

• Si on a déterminé les valeurs propres à l'aide du rang de la matrice :

on peut

- Résoudre $MX = \lambda X$ pour chaque valeur propre (long !)
- Pour ne pas avoir à refaire intégralement l'ensemble des calculs pour chaque valeur propre :

on note S la matrice la plus simple obtenue à partir des simplifications **par lignes uniquement** à partir de la matrice $M - \lambda Id$. On pourra alors résoudre plutôt $SX = 0$ au lieu de $(M - \lambda Id)X = 0$.

• Si on a utilisé la deuxième méthode pour déterminer les valeurs propres :

Il suffit de résoudre le système restant pour les valeurs propres trouvées.

■ Exemple 10 :

Les espaces propres de l'endomorphisme dans l'exemple précédent sont :

$$E_{-4} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voyons ceci par deux des stratégies proposées.

Avec la stratégie 1 : en utilisant la matrice $M - \lambda Id$ simplifiée (recommandé) :

La matrice la plus simple que nous avons obtenue par manipulation de lignes à partir de $M - \lambda Id$ (matrice appelée *réduite de Gauss* si elle est complètement triangularisée) est

$$M - \lambda I \sim S = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 32 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est donc

$$S = \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ (-\lambda^2 - 4\lambda + 8)x + (16 + 2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

pour chacun des $\lambda \in Sp(M) = \{0, -4, 4\}$.

★ Si $\lambda = 0$:

$$S = \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 16x + 32y = 0 \\ 8x + 16y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

★ Si $\lambda = 4$:

$$S = \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -32x + 32y = 0 \\ -24x + 24y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{D'où } E_4 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

★ De même si $\lambda = -4 \dots$

Stratégie 2 : en utilisant le système d'équations grâce auquel on a obtenu $Sp(M)$:

Rappelons que si $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$(M - \lambda Id)V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 4)x = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $\lambda \in Sp(M) = \{0; -4; 4\}$, la dernière ligne s'annule et le système se résout simplement.

$$\star \text{ Si } \underline{\lambda = 4} : \quad (f - \lambda Id)(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -32x + 32y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{D'où } E_4 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\star \text{ Si } \underline{\lambda = -4} : \quad (f - \lambda Id)(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 32x + 32y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + z = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

$$\text{D'où } E_{-4} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

VÉRIFICATION

➤ Dans tous les cas, on vérifie les vecteurs propres obtenus grâce à $MV = \lambda V$.

II Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme

Commentaires :

On cherche maintenant à faire le même type travail sur les matrices d'endomorphisme, (voir même, sur des endomorphismes avec E qui n'est pas de dimension finie.) On va donc voir comment se traduisent ces informations dans ce cadre.

II-1 Valeur propre d'un endomorphisme

Définition

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** (*vap*) de l'endomorphisme f s'il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre** de f et noté $Sp(f)$.

■ Exemples :

Supposons $n = 2$ et $=\{e_1, e_2\}$ une base de E ;

11 ■ Si $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors 2 est valeur propre car

$$f(e_1) = 2 e_1$$

12 ■ Si $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors 0 est valeur propre car

$$f(e_2 - e_1) = \vec{0} = \mathbf{0} \times \underbrace{(e_2 - e_1)}_{\neq 0}$$

13 ■ Si $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto P(0)(1 + X)$, alors 0 est une valeur propre car

$$f(X) = 0 = \mathbf{0} \times \underbrace{X}_{\neq 0}.$$

II-2 Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme

Notation :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(f) = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$.

Définition

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f , on appelle v un **vecteur propre** (*vep*) de la valeur propre λ tout vecteur v **non nul** tel que $f(v) = \lambda v$. L'ensemble $E_\lambda(f) = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$ s'appelle **l'espace propre** associé à la valeur propre λ .

■ Exemples :

Supposons $n = 2$ et $=\{e_1, e_2\}$ une base de E ;

14 ■ Si $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $e_1 \neq 0$ est vecteur propre de valeur propre 2 car

$$f(e_1) = 2e_1$$

15 ■ Si $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $v = e_2 - e_1 \neq 0$ et vecteur propre de valeur propre 0 car

$$f(v) = \vec{0} = 0 \times v$$

16 ■ Si $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$,
 $P \mapsto P(0)(1+X)$, alors $X \neq 0$ est un vecteur propre car

$$f(X) = 0 \times X.$$

? Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X)$ est

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le polynôme $P = 1 + X$ est un vecteur propre de f et déterminer une valeur propre associée. (On pourra utiliser la linéarité par exemple.)

Solution

D'après la matrice, on sait que $f(1) = 1 + X$ et $f(X) = 2 + 2X$. Ainsi, par linéarité,

$$f(1 + X) = f(1) + f(X) = 3 + 3X = 3(1 + X)$$

Ainsi $1 + X$ est vep de vap 3.

Remarques :

- 1) λ est une valeur propre de f si et seulement si $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$.
(c'est la définition d'une valeur propre.)
- 2) $0_E \in E_\lambda(f)$. Les vecteurs propres de vap λ sont les éléments non nuls de $E_\lambda(f)$.
- 3) $E_\lambda = \ker(f - \lambda Id)$, ce qui entraîne immédiatement que E_λ est un $\mathbb{K}$ -e.v. et qu'un **vecteur propre n'est pas unique!** (Par exemple, si v est un vecteur propre de λ , tout αv , avec $\alpha \in \mathbb{K}$ est un vecteur propre de λ .)
- 4) Si v doit être non nul, il se peut par contre que $\lambda = 0$. Dans ce cas, on a
 $E_0(f) = \ker f$.
- 5) Les valeurs propres et les vecteurs propres ne dépendent pas d'une base.

Notation : S'il n'y a pas de confusion possible, on notera E_λ au lieu de $E_\lambda(f)$.

II-3 En dimension finie : Lien entre les vap/vep d'endomorphisme et les vap/vep de matrices

Propriété 3

Si $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme associé à M tel que $M = M_{\mathcal{B}}(f)$, alors

- X est un vecteur propre de M de vap λ si et seulement si le vecteur v de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de f , de vap λ .
- λ est une valeur propre de M si et seulement si c'est une valeur propre de f .

Démonstration :

- i) Soit X un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et $v = X_{\mathcal{B}}$. Alors
 X est un vecteur propre de $M \iff MX = \lambda X$
 $\iff M_{\mathcal{B}}(f)X = \lambda X$
 $\iff f(v) = \lambda v$
 $\iff v$ est un vecteur propre de f de vap λ .
- ii) C'est une conséquence directe de i). □

■ Exemple 17 :

Supposons donné l'endomorphisme $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]; P \mapsto XP' - 2P$. Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on obtient la matrice de u suivante :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On observe également directement sur la matrice que $v_1 = 1, v_2 = X, v_3 = X^2$ sont trois vep de l'endomorphisme u (de vap. resp. $-2, -1, 0$). En posant alors

$$V_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i)$$

on obtient $V_1 = (1, 0, 0)$, $V_2 = (0, 1, 0)$, $V_3 = (0, 0, 1)$ et on peut (directement par calcul matriciel) observer qu'en effet, V_1, V_2, V_3 sont vecteurs propres de la matrice (resp. associés aux valeurs propres $-2, -1, 0$).

Moralité de la propriété : parler de valeur propre ("et vecteur propre") d'une matrice ou de l'endomorphisme associé est exactement la même chose. Les mêmes propriétés s'appliquent.

? Exercice 7

Soit f l'endomorphisme de l'exercice précédent, de matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X)$:

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer cette fois-ci à l'aide des coordonnées que le polynôme $P = 1 + X$ est un vecteur propre de f et déterminer une valeur propre associée.

Solution

Soit $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors P est vep de f ssi V est vep de M . Or $MV = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3V$.
 V étant vep de M , on a bien $P = 1 + X$ vep de f de vap 3.

Corollaire

Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration :

Deux matrices semblables sont deux matrices d'un même endomorphisme exprimées dans deux bases différentes. $\square$

Corollaire n°2

*Si M est semblable à une matrice triangulaire ou diagonale T , alors $Sp(M)$ est constitué de **tous les** coefficients diagonaux de M .*

Démonstration :

Le spectre d'une matrice triangulaire ou diagonale est constitué de l'ensemble de tous ses coefficients diagonaux et, d'après le corollaire précédent, $Sp(M) = Sp(T)$.
 $\square$



Remarque :

Pour un même vecteur propre $v \in E$ d'un endomorphisme u , en écrivant les matrices M et M' dans 2 bases différentes (i.e. M et M' semblables), les vecteurs propres de M et M' associés à v sont reliés :

Propriété 4

Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathbb{K}^n$. Alors,

$$MX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad M'X' = \lambda X'$$

où $X' = P^{-1}X$, si $M' = P^{-1}MP$. (ce qui correspond au changement de base.)

■ Exemple 18 :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose le changement de base

$$P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{pour lequel } P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Vecteur propres de M :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{vap resp. } 3, 0)$$

D'où les vecteurs propres de M' :

$$V'_1 = P^{-1}V_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V'_2 = P^{-1}V_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où V_i, V'_i sont donc les 2 écritures différentes de e_i dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$V_1 = M_{\mathcal{B}}(e_1), \quad V'_1 = M_{\mathcal{B}'}(e_1), \quad V_2 = M_{\mathcal{B}}(e_2), \quad V'_2 = M_{\mathcal{B}'}(e_2)$$

On peut notamment vérifier que

$$MV_1 = 3V_1, \quad MV_2 = 0V_2, \quad M'V'_1 = 3V'_1, \quad M'V'_2 = 0V'_2$$

III Diagonalisation

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie n .

III-1 Définitions

Définition

Soit f un endomorphisme (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée). On dit que f (resp. M) est *diagonalisable* si elle admet (resp. si elle est semblable à) une matrice diagonale.

Rappel : Deux matrices semblables sont deux matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Corollaire

Supposons que M soit la matrice associée à $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$.
 M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe D diagonale telle que M et D soient deux matrices d'un même endomorphisme
 $\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathcal{B}'$ t.q. $M_{\mathcal{B}'}(f)$ soit diagonale.
 $\Leftrightarrow f$ est diagonalisable.



Remarque :

De cette propriété, on déduit le langage (un peu abusif) pour une matrice M d'être "diagonalisable dans une base $\mathcal{B}'$ ".

III-2 Nombre de valeurs propres / dimension des espaces propres

Théorème 5

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme f , et $v_1, \dots, v_d$ des vecteurs propres (non nuls) de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, alors la famille $\{v_1, \dots, v_d\}$ est libre.

Démonstration :

(Par récurrence sur d .)

Soit $\mathcal{H}_d$: (Si $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme, toute famille $(v_1, \dots, v_d)$ de vecteurs propres associés est libre.)

★ Initialisation : triviale $d = 1$. (Une famille d'un élément non nul est libre.)

★ Hérité : Supposons $\mathcal{H}_{d-1}$ vraie pour $d \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $\mathcal{H}_d$ est vraie.

Supposons qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d = 0$.

Par application de f , on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d &= 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_d \lambda_d v_d &= 0 \end{aligned}$$

Pour $L_2 - \lambda_1 L_1$, on obtient

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + \alpha_d (\lambda_d - \lambda_1) v_d = 0$$

Par hypothèse de récurrence, comme les λ_i sont deux à deux distincts, on trouve $\alpha_2 = \dots = \alpha_d = 0$. Le cas α_1 s'en déduit en réinjectant les résultats dans la première ligne. $\square$

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) où E est un espace vectoriel de dimension n .

- f (resp. M) admet au maximum n valeurs propres distinctes.
- Si f (resp. M) admet n valeurs propres distinctes, alors f (resp. M) est diagonalisable.

Démonstration :

- Supposons que f (ou M) admette d valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Il existe alors d vecteurs propres $v_1, \dots, v_d$ de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. La propriété nous indique que la famille $\{v_1, \dots, v_d\}$ est libre. Ainsi,

$$d = \text{card}\{v_1, \dots, v_d\} \leq \dim E = n$$

- On note $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs propres associés aux n valeurs propres distinctes. D'après la propriété précédente, la famille est libre de cardinal $n = \dim E$. C'est donc une base. Dans cette base, f (resp. M) est diagonale ... par construction!

$\square$



Remarque :

Si le nombre de valeurs propres distinctes est différent de $n = \text{card } E$, on ne peut rien dire a priori, mais rien n'est désespéré...!

Exemple 19 :

Matrice diagonalisable : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (car déjà diagonale)

Exemple 20 :

Matrice non diagonalisable : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$:

On a trivialement $\text{Sp}(M) = \{a\}$. Ainsi, si M était diagonalisable, on aurait M est semblable à $a \text{Id}$, d'où l'existence de P inversible telle que

$$M = P a \text{Id} P^{-1} = a P P^{-1} = a \text{Id}$$

Or $M \neq a \text{Id}$, d'où la contradiction.

Théorème 6 de juxtaposition des bases 1 :

Supposons donné :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ des valeurs propres 2 à 2 **distinctes** de f (resp. M)
- $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_d$ des familles libres respectivement dans $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_d}$

Alors $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_d$ est libre.

Démonstration :

Notons $\underbrace{v_1, \dots, v_{s_1}}_{\text{dans } E_{\lambda_1}}, \underbrace{v_{s_1+1}, \dots, v_{s_2}}_{\text{dans } E_{\lambda_2}}, \dots, \underbrace{v_{s_{d-1}+1}, \dots, v_{s_d}}_{\text{dans } E_{\lambda_d}}$.

Montrons que $(v_1, \dots, v_{s_d})$ est une famille libre par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$:

★ Initialisation : Si $d = 1$, la famille $(v_1, \dots, v_{s_1})$ est libre par hypothèse.

★ Hérédité : De $d - 1$ à d . Supposons la propriété vraie pour $d - 1 \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie pour d .

On pose $\alpha_1, \dots, \alpha_{s_d} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s_d} v_{s_d} = 0 \quad (*_1)$$

on applique f et on obtient

$$\underbrace{\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{s_1} \lambda_1 v_{s_1}}_{\text{vap } \lambda_1} + \dots + \underbrace{\alpha_{s_{d-1}+1} \lambda_d v_{s_{d-1}+1} + \dots + \alpha_{s_d} \lambda_d v_{s_d}}_{\text{vap } \lambda_d} = 0 \quad (*_2)$$

On fait $(*_2) - \lambda_d(*_1)$ et on obtient

$$\underbrace{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_d)v_1 + \dots + \alpha_{s_1}(\lambda_1 - \lambda_d)v_{s_1}}_{\text{vap } \lambda_1} + \dots + \underbrace{\alpha_{s_{d-2}+1}(\lambda_{d-1} - \lambda_d)v_{s_{d-2}+1} + \dots + \alpha_{s_d}(\lambda_{d-1} - \lambda_d)v_{s_{d-1}}}_{\text{vap } \lambda_d} = 0$$

Par HR, on obtient la liberté de $(v_1, \dots, v_{s_{d-1}})$, d'où, comme les λ_i sont 2 à 2 distincts,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{s_{d-1}} = 0$$

Il reste

$$\alpha_{s_{d-1}+1} v_{s_{d-1}+1} + \dots + \alpha_{s_d} v_{s_d} = 0$$

mais la famille $(v_{s_{d-1}+1}, \dots, v_{s_d})$ étant une famille libre, les α_i restant sont tous nuls.

★ En conclusion, la famille $(v_1, \dots, v_{s_d})$ est une famille libre.

□

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 7 de juxtaposition des bases 2 :

Supposons donné :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ des valeurs propres 2 à 2 **distinctes** de f (resp. M)
- $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_d$ des familles libres respectivement dans $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_d}$
- $\text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_d) \geq n$

Alors

- $\text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_d) = n$
- $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_d$ est une base de E
- f (resp. M) est diagonalisable dans la base $\mathcal{B}$.

De plus,

- $\mathcal{B}_i$ est finalement une base de E_{λ_i} (i.e. $\text{card}(\mathcal{B}_i) = \dim E_{\lambda_i}$)
- il n'existe pas d'autre valeur propre de f (resp. M .)

Démonstration :

démontré uniquement pour le cas de f , le cas de M étant une conséquence immédiate.

- $\text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_d) = n$:

D'après le théorème précédent, $\mathcal{B}$ est une famille libre. On a de plus,

$$\text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_d) \geq n$$

Or, une famille libre ne peut pas avoir plus de n éléments, d'où $\text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_d) = n$.

- $\mathcal{B}$ est une base de E :

C'est une famille libre avec $n = \dim E$ éléments, donc c'est une base de E .

- f est diagonalisable dans $\mathcal{B}$:

C'est immédiat, car dans la base $\mathcal{B}$ qui est un ensemble de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale.

- $\mathcal{B}_i$ est une base de E_{λ_i} :

On sait que $\mathcal{B}_i \subset E_{\lambda_i}$ et $\text{card}(\mathcal{B}_i) \leq \dim E_{\lambda_i}$ pour tout $i = 1, \dots, d$.

s'il existe k tel que $\text{card}(\mathcal{B}_k) < \dim E_{\lambda_k}$, (quitte à réorganiser le vap, on peut supposer que $k = d$, alors il existe une base $\mathcal{B}'_k$ de E_{λ_k} de cardinal

$$\text{card}(\mathcal{B}'_k) > \text{card}(\mathcal{B}_k).$$

Par le théorème précédent, la famille $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{d-1}, \mathcal{B}'_d)$ est libre, mais

$$\text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_{d-1}) + \text{card}(\mathcal{B}'_d) > \text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_d) = n$$

ce qui est donc impossible car une famille libre ne peut avoir plus de n éléments. Ainsi, on a bien $\text{card}(\mathcal{B}_i) = \dim E_{\lambda_i}$ pour tout i et la famille est alors bien une base de E_{λ_i} .

- Il n'existe pas d'autre vap :

S'il existait une valeur propre supplémentaire, cela reviendrait encore une fois à rajouter une famille libre à la famille $\mathcal{B}$ déjà existante, le tout étant alors encore libre par le théorème précédent, ce qui est impossible. $\square$

? Exercice 8

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Solution

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et M la matrice de l'énoncé. M est triangulaire, on sait donc que ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux :

$$Sp(M) = \{1, 2\}$$

On observe immédiatement que e_1, e_2 sont des vecteurs propres de M de valeur propre 1. On pose $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ et on a alors

$$\mathcal{B}_1 \subset E_1 \text{ une famille libre.}$$

De plus, on sait qu'il existe au moins un vecteur propre v dans E_2 . On note alors $\mathcal{B}_2 = \{v\}$. On a

$$\mathcal{B}_2 \subset E_2.$$

D'après le théorème de juxtaposition des bases, on sait alors que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, v)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$ de cardinal ≥ 3 . C'est donc une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$ et la matrice M est bien diagonalisable.

et dans les deux sens finalement, si on est certain d'avoir tout le spectre :

Théorème 8

On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) On note $n = \dim E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ l'ensemble des valeurs propres **distinctes** de f (resp. M). Alors

$$\begin{aligned} f \text{ (resp. } M) \text{ est diagonalisable} &\iff \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_d} \geq n \\ &\iff \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_d} = n \end{aligned}$$

Démonstration :

On démontrera ceci dans le cadre de l'application f . Il ne reste que le premier $\Rightarrow$ à démontrer par rapport au carollaire précédent.

Comme f est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ dans laquelle la matrice M de f est diagonale. c'est-à-dire que chacun des éléments de la base

est un vecteur propre. Quitte à réorganiser les vecteurs, on peut supposer qu'on a

$$\underbrace{v_1, \dots, v_{s_1}}_{\text{vap } \lambda_1} \underbrace{v_{s_1+1}, \dots, v_{s_2}}_{\text{vap } \lambda_2} \dots \underbrace{v_{s_{d-1}+1}, \dots, v_n}_{\text{vap } \lambda_d}$$

i.e. $v_1, \dots, v_{s_1} \in E_{\lambda_1}, \quad v_{s_1+1}, \dots, v_{s_2} \in E_{\lambda_2} \quad v_{s_{d-1}+1}, \dots, v_n \in E_{\lambda_d}$.
d'où

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_{s_1}) \subset E_{\lambda_1}, \quad \text{Vect}(v_{s_1+1}, \dots, v_{s_2}) \subset E_{\lambda_2}, \quad \dots \quad \text{Vect}(v_{s_{d-1}+1}, \dots, v_n) \subset E_{\lambda_d}$$

Comme toute sous-famille d'une base est une famille libre, on trouve

$$s_1 \leq \dim E_{\lambda_1}, \quad s_2 - s_1 \leq \dim E_{\lambda_2}, \quad \dots \quad s_{d-1} - s_{d-2} \leq \dim E_{\lambda_{d-1}} \quad n - s_{d-1} \leq \dim E_{\lambda_d}$$

d'où

$$n = s_1 + (s_2 - s_1) + \dots + (n - s_{d-1}) \leq \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_d}$$

$\square$

III-3 Diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?

? Exercice 9

Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre complexe non réelle, alors elle ne peut pas être semblable à une matrice diagonale réelle.

Solution

Supposons que $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ soit une valeur propre de M . D'après une propriété précédente, quelquesoit la matrice diagonale en question, l'ensemble des valeurs propres figurent toutes sur la diagonale. L'une d'entre elle étant complexe, elle ne peut être réelle.

🌿 Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est *diagonalisable sur $\mathbb{R}$* (resp. $\mathbb{C}$) si M est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

■ Exemple 21 :

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lcl}
M - \lambda Id & = & \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
L_1 \leftarrow \widetilde{L_1 + L_3} & & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
C_3 \leftarrow \widetilde{C_3 - C_1} & & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
C_2 \leftrightarrow \widetilde{C_3} & & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & \boxed{1} \end{pmatrix} \\
L_2 \leftarrow \widetilde{L_2 + (1+\lambda)L_3} & & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ \star & -1-\lambda^2 & 0 \\ \star & \star & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Les valeurs propres sont donc

les valeurs qui annulent $1 - \lambda$ et $-1 - \lambda^2$, autrement dit

$$Sp(M) = \{1, i, -i\}$$

Il y a trois valeurs propres distinctes et l'ordre de M est trois. Ainsi, M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$!

Propriété 9

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. λ est valeur propre de M (de vecteur propre X .) ssi $\bar{\lambda}$ est valeur propre (de vecteur propre $\bar{X}$.)

Démonstration :

$$\begin{aligned}
MX = \lambda X &\iff \overline{MX} = \overline{\lambda X} \\
&\iff \overline{M} \overline{X} = \bar{\lambda} \overline{X}
\end{aligned}$$

Or, comme M est réelle, on a $\overline{M} = M$, d'où $M \overline{X} = \bar{\lambda} \overline{X} \square$



Remarque :

Cette propriété permet entre autres, si on a deux valeurs propres $\lambda, \bar{\lambda}$, de ne calculer qu'un seul espace propre. L'autre s'en déduit simplement par conjugaison.

Commentaires :

La diagonalisabilité va nous servir, par exemple, à calculer les puissances $n^{\text{ème}}$ de matrices. Il ne faut donc pas s'arrêter à la diagonalisation dans $\mathbb{R}$ et ne pas hésiter à se servir des valeurs propres complexes!

Contre exemple : Si M n'est pas réelle, la propriété ne fonctionne pas.

Exemple (valeurs propres non conjuguées) : Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, alors $Sp(M) = \{1, i\}$ et $\bar{i}$ n'est pas vap.

Exemple (vecteurs propres non conjugués) : Si $M = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, alors $E_i = \text{Vect}((1, 0))$ et $E_{-i} = \text{Vect}((i, 2)) \neq \overline{E_i}$

III-4 Formule de changement de base

On note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose ici M diagonalisable. On note

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ \star & & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \star & & \star \end{pmatrix} \quad \text{une matrice de vecteurs propres de } M$$

et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{la matrice de valeurs propres de } M \text{ associée}$$

où λ_i est la valeur propre associée à v_i . Notons qu'ici, on ne suppose pas forcément que les λ_i sont deux à deux distincts.

Alors on a

$$M = PDP^{-1}$$

C'est en effet la formule de changement de base classique issue de

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}}}_M = \underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}_P \underbrace{M_{\mathcal{B}'}(D)}_D \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{P^{-1}}$$

où $\mathcal{B}$ est la base en cours et $\mathcal{B}'$ la base de vecteurs propres.

IV Applications : puissances $n^{\text{èmes}}$

Si M est diagonalisable, avec les notations de la partie précédente, on a $M = PDP^{-1}$. Ainsi, si l'on souhaite calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ de M , on a

$$M^n = \overbrace{(PD\cancel{P}^{-1})(\cancel{P}D\cancel{P}^{-1}) \dots (\cancel{P}D\cancel{P}^{-1})}^{n \text{ fois}} = PD^n P^{-1}$$

Or, D^n est facile à calculer, puisque

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

C'est cette stratégie que nous allons tenter d'utiliser dans la suite.

IV-1 Suites récurrentes linéaires

On souhaite déterminer de manière exacte l'expression de u_n sachant que

$$u_{n+d} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{d-1} u_{n+d-1}$$

■ Exemple 22 :

$$u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n.$$

- Mise en forme du problème sous forme de matrice :

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, alors

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

i.e. $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$U_n = A^n U_0$$

Il est donc "très utile" de pouvoir calculer A^n , ou au moins la dernière ligne de A^n , grâce à laquelle on trouvera u_n en fonction de u_2, u_1, u_0 , puisque

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = U_n = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

- Diagonalisation de A ?

Les valeurs propres de A sont $-i, i$ et -1 , avec

$$E_i = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_{-i} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_{-1} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- A^n

Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1+i & 2i & -1+i \\ 1-i & -2i & -1-i \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$A^n = PD^n P^{-1}$$

Tout ce qui nous intéresse est la dernière ligne :

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 2(-1)^n - 2Re(i^n(1+i)) & 2Re(-2i i^n) & 2(-1)^n - 2Re(i^n(-1+i)) \end{pmatrix}$$

i.e.

$$A^{2n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 - (-1)^n & 0 & 1 + (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A^{2n+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1 - (-1)^{n+1} & 2(-1)^n & -1 - (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$u_{2n} = \frac{1}{2} ((1 - (-1)^n)u_2 + (1 + (-1)^n)u_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2} ((-1 - (-1)^{n+1})u_2 + 2(-1)^n u_1 + (-1 - (-1)^{n+1})u_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

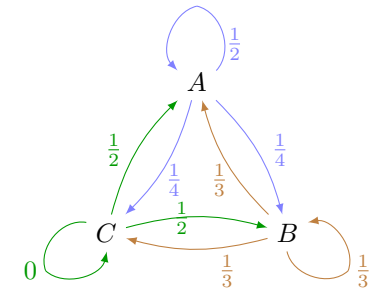
IV-2 Sauts aléatoires par un exemple

On suppose qu'une puce se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC . À chaque saut, les probabilités sont les suivantes :

- Si la puce est sur A :
la probabilité de rester sur A est de $1/2$
la probabilité d'aller sur B est de $1/4$
la probabilité d'aller sur C est de $1/4$

- Si la puce est sur B :
la probabilité d'aller sur A est de $1/3$
la probabilité de rester sur B est de $1/3$
la probabilité d'aller sur C est de $1/3$

- Si la puce est sur C :
la probabilité d'aller sur A est de $1/2$
la probabilité d'aller sur B est de $1/2$
la probabilité de rester sur C est de 0



Si on note a_n , (resp. b_n, c_n) les probabilités de se trouver sur le point A (resp. B, C) juste après avoir effectué le $n^{\text{ème}}$ saut, on souhaite calculer ces valeurs en fonction de a_0, b_0, c_0 .

Si on note M_n le point sur lequel on est juste après le $n^{\text{ème}}$ saut

$$\begin{cases} a_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=A)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=A)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=A)c_n \\ b_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=B)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=B)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=B)c_n \\ c_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=C)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=C)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=C)c_n \end{cases}$$

Ce qui peut s'exprimer sous forme matricielle

$$U_{n+1} = H_n U_n,$$

$$\text{où } U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et } H_n = \begin{pmatrix} P_{M_n=A}(M_{n+1}=A) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=A) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=A) \\ P_{M_n=A}(M_{n+1}=B) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=B) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=B) \\ P_{M_n=A}(M_{n+1}=C) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=C) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=C) \end{pmatrix}$$

ce qui, avec les valeurs de l'énoncé ici, donne

$$H_n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

H_n étant constante en fonction de n , on note $H = H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on obtient

$$U_n = H^n U_0$$

Il reste à calculer H^n en essayant de diagonaliser !

- Diagonalisation de H : (*exercice*)

les valeurs propres sont

$$1, -\frac{1}{12}(\sqrt{7}+1), \frac{1}{12}(\sqrt{7}-1)$$

et des vecteurs propres associés sont

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{7} \\ -3-\sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{7} \\ \sqrt{7}-3 \end{pmatrix}$$

Il y a trois valeurs propres pour une matrice d'ordre 3. Elle est diagonalisable, avec

$$H^n = P D^n P^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1+\sqrt{7} & 1-\sqrt{7} \\ 2 & -3-\sqrt{7} & \sqrt{7}-3 \end{pmatrix}$$

on a

$$P^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 - \frac{11}{\sqrt{7}} & \frac{16}{\sqrt{7}} - 4 & -\frac{2}{\sqrt{7}} - 4 \\ 5 + \frac{11}{\sqrt{7}} & -\frac{16}{\sqrt{7}} - 4 & \frac{2}{\sqrt{7}} - 4 \end{pmatrix}$$

Alors

$$H^n = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 16 + 10\lambda_n + \frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n & 16 - 8\lambda_n - \frac{32}{\sqrt{7}}\mu_n & 16 - 8\lambda_n + \frac{4}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12 - 6\lambda_n - \frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n & 12 + 12\lambda_n + \frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n & 12 - 6\lambda_n + \frac{30}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8 - 4\lambda_n + \frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n & 8 - 4\lambda_n + \frac{20}{\sqrt{7}}\mu_n & 8 + 14\lambda_n - \frac{34}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \lambda_n = \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n \text{ et } \mu_n = \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n$$

Conclusion :

Connaissant H^n , on peut déterminer les probabilités d'être sur n'importe quel point à l'instant n . Par exemple, si la puce part du point A , alors on a

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} U_n = H^n U_0 &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 16 + 10\lambda_n + \frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n & 16 - 8\lambda_n - \frac{32}{\sqrt{7}}\mu_n & 16 - 8\lambda_n + \frac{4}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12 - 6\lambda_n - \frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n & 12 + 12\lambda_n + \frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n & 12 - 6\lambda_n + \frac{30}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8 - 4\lambda_n + \frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n & 8 - 4\lambda_n + \frac{20}{\sqrt{7}}\mu_n & 8 + 14\lambda_n - \frac{34}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 16 + 10\lambda_n + \frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12 - 6\lambda_n - \frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8 - 4\lambda_n + \frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 8 + 5\lambda_n + \frac{11}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 6 - 3\lambda_n - \frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 4 - 2\lambda_n + \frac{1}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou autrement dit, si la puce part de A , la probabilité après le $n^{\text{ème}}$ saut d'être

$$\begin{array}{l|l} \text{en } A & \left| \begin{array}{l} \frac{4}{9} + \frac{5}{18} \left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n \right) + \frac{11}{18\sqrt{7}} \left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n \right) \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n \right) - \frac{2}{3\sqrt{7}} \left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n \right) \\ \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n \right) + \frac{1}{18\sqrt{7}} \left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n \right) \end{array} \right. \\ \text{en } B & \\ \text{en } C & \end{array}$$