

Magnétostatique

Assez logiquement, après l'étude du champ électrostatique $\vec{E}(M)$, on s'intéresse au champ magnétique stationnaire, dit magnétostatique : $\vec{B}(M, t) = \vec{B}(M)$. En MPSI, la notion de champ magnétique a notamment été abordée pour déterminer les trajectoires de particules chargées placées dans un champ magnétique.

Les sources de champ magnétiques sont multiples et connues depuis des époques diverses. Les premières sources identifiées furent les **aimants** en magnétite (Fe_3O_4). Depuis, les aimants sont notamment en Neodyme. Les aimants sont caractérisés par leurs pôles Nord et Sud. En 1820, OERSTED met en évidence qu'un courant circulant dans un fil fait bouger l'aiguille d'une boussole : les **courants** sont des sources de champ magnétique $\vec{B}(M)$. Enfin, les **astres** sont des sources importantes de champ magnétique. Sans ce champ magnétique, la Terre ne serait pas protégée contre les particules constituant le vent solaire.

A. Courant électrique

Le courant électrique est une des sources de champ magnétostatique.

A.1 Intensité i du courant

Définition EM2.1 - Intensité i du courant

En première année, la définition de l'intensité i du courant traversant une section S a été donnée : c'est le rapport de la charge dq qui traverse S pendant dt sur dt .

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i s'exprime en ampères (A) ce qui est équivalent à des coulombs par seconde : $1 \text{ A} = 1 \text{ C.s}^{-1}$

- L'intensité i traduit le déplacement des porteurs de charges (électrons, ions, trous ...)
- Les électrons conducteurs se déplacent en sens opposé au courant.

A.2 Densité volumique de courant $\vec{j}$

On considère un conducteur contenant des porteurs de charge mobiles P_i , chargés q_i , animés d'une vitesse $\vec{v}_i$. La densité en porteur de charge est notée n_i .

Définition EM2.2 - Densité volumique de courant $\vec{j}$

On définit le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$, dont le module s'exprime en A.m^{-2} , comme :

$$\vec{j} = n_i q_i \vec{v}_i$$

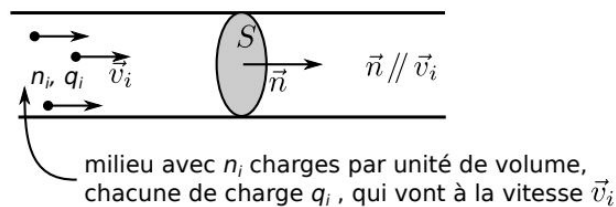


FIGURE 1 – Densité volumique de courant

Exemple

- Dans un conducteur en cuivre, la conduction est assurée par des électrons de charges $q = -e$. La densité électronique vaut n et la vitesse moyenne des électrons est $\vec{v}$. Alors, $\vec{j} = -en\vec{v}$.
- Dans une solution de chlorure d'argent ($\text{Ag}^+ + \text{Cl}^-$), la conduction est assurée conjointement par les ions Ag^+ , notés 1 et les ions Cl^- , notés 2. On a donc $\vec{j} = en_1\vec{v}_1 - en_2\vec{v}_2$.

Propriété EM2.1 - Calcul de l'intensité i à partir de $\vec{j}$

L'intensité i du courant qui traverse une surface Σ est le flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$ à travers la surface Σ .

$$i = \phi(\vec{j}) = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On peut formuler les remarques suivantes :

- Si les vecteurs $\vec{j}$ et $d\vec{S}$ sont colinéaires, le produit scalaire se simplifie : $\vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot dS$.
- Si j est uniforme sur la surface Σ ,

$$i = \iint_{\Sigma} j \cdot dS = j \iint_{\Sigma} dS = j \cdot \Sigma$$

A.3 Distribution filiforme

On considère un fil parcouru par un courant. Si le diamètre du fil est petit devant les autres dimensions, on peut le considérer comme une ligne : la distribution est filiforme. Dans cette modélisation, seule $i(M, t)$ est connue.

B. Topographie du champ magnétique**B.1 Symétries et antisymétries**

Comme pour l'étude du champ électrostatique, l'étude des symétries et antisymétries des courants renseigne sur le champ magnétique.

Définitions EM2.3 - Plan de symétrie et antisymétrie

- ▶ Π est un plan de symétrie de la distribution de courant si, pour deux points de la distribution M et M' symétriques par rapport à ce plan, le sens du courant est le même.
- ▶ Π' est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant si, pour deux points de la distribution M et M' symétriques par rapport à ce plan, le sens du courant est opposé.

Remarque

Le principe de CURIE, énoncé dans le chapitre EM1 (Propriété EM1.1) est aussi efficace en magnétostatique.

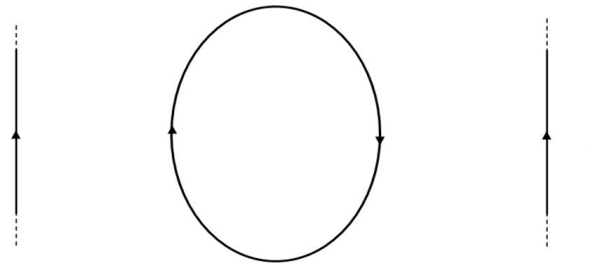


FIGURE 2 – Plans de symétrie et antisymétrie

B.2 Caractère axial du champ magnétique

Propriété EM2.2 - Comportement de $\vec{B}(M, t)$ par rapport à Π et Π'

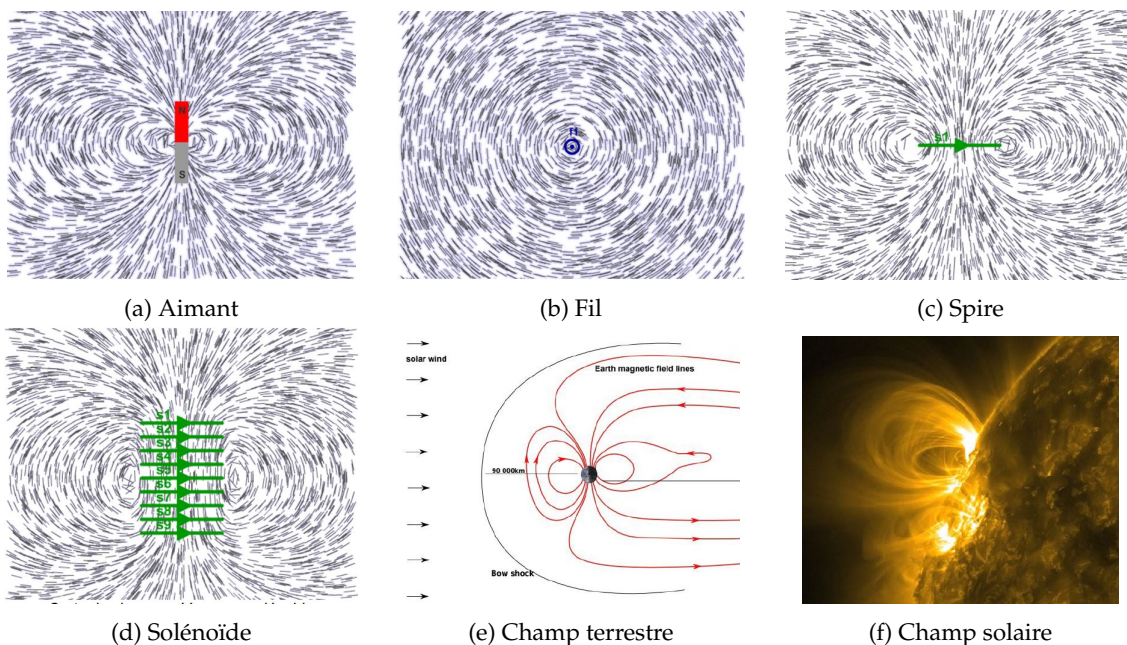
Le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ possède les propriétés suivantes :

- $\vec{B}(M, t)$ aux plans d'antisymétrie Π' de la distribution de courant.
- $\vec{B}(M, t)$ aux plans de symétrie Π de la distribution de courant.
- Le champ magnétostatique $\vec{B}$ est **pseudo-vecteur** : il est antisymétrique par rapport aux plans de symétrie et symétrique par rapport aux plans d'antisymétrie (des sources, donc des courants).

On observe que le comportement est opposé à celui du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ qui appartient aux plans de symétrie Π et est orthogonal aux plans d'antisymétrie Π' de la distribution de charges. On dit que le champ électrique est un champ (ou un vecteur) **vrai**.

B.3 Cartes de champ magnétique

Comme dans le chapitre précédent, les lignes de champ sont tangentes en tout point au champ magnétique $\vec{B}(M, t)$; ces lignes sont orientées dans le sens du champ.

FIGURE 3 – Cartes de champ magnétique $\vec{B}(M, t)$

On observe que, dans tous les cas, les lignes de champ magnétique tourbillonnent autour des sources.

C. Théorème d'AMPÈRE

C.1 Contour fermé

Définition EM2.4 - Contour fermé

Un contour Γ est dit fermé si le point de départ et le point d'arrivée sont confondus. Par conséquent, un contour fermé génère une surface S qui est orientée en fonction du sens de parcours du contour.

FIGURE 4 – Contour fermé et surface engendrée

C.2 Énoncé du théorème d'AMPÈRE

Théorème EM2.1 - Théorème d'AMPÈRE

La circulation $\mathcal{C}(\vec{B})$ du champ magnétique le long d'un contour fermé Γ est égal au produit de la perméabilité magnétique μ_0 par la somme algébrique des courants enlacés par le contour (ou qui traversent la surface S générée par le contour Γ).

$$\mathcal{C}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}}$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et vaut $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

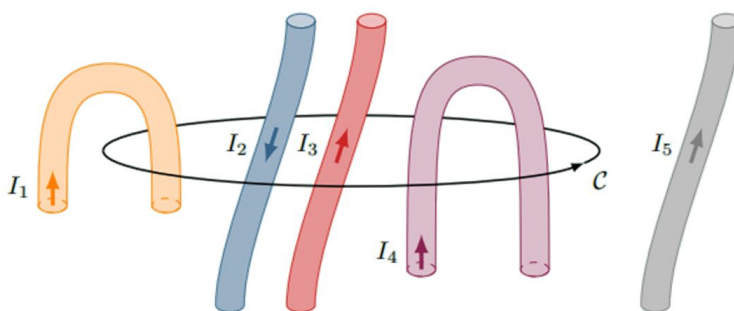


FIGURE 5 – Théorème d'AMPÈRE

Remarques

- Dans un milieu autre que le vide, la perméabilité magnétique du vide μ_0 est remplacée par $\mu_r \mu_0$, où μ_r est la perméabilité relative du milieu.
- La somme des courants enlacés est **algébrique** : i est compté positif s'il traverse dans le sens de la surface orientée.
- Le choix du contour d'AMPÈRE Γ se fait de telle façon que le calcul de la circulation du champ magnétique $\mathcal{C}(\vec{B})$ soit facile :
 - $\vec{B}$ et $d\vec{\ell}$ sont colinéaires ($\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell$) ou orthogonaux ($\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$).
 - $B(M)$ est uniforme sur le contour d'AMPÈRE : $\mathcal{C}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} B \cdot d\ell = B \oint_{\Gamma} d\ell = B \ell$
- Le canevas d'application du théorème d'AMPÈRE est sensiblement identique à celui du théorème de GAUSS : choix du système de coordonnées, analyse des symétries et invariances, choix du contour d'AMPÈRE et calcul de la circulation $\mathcal{C}(\vec{B})$, puis application du théorème.

C.3 Cas du fil infini

C.4 Cas du solénoïde infini

D. Flux magnétique

Propriété EM2.3 - Conservation du flux

Le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ est à **flux conservatif**, ce qui signifie que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul^a.

$$\phi(\vec{B}) = \oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

a. Cette propriété est liée à l'absence de monopôles magnétiques, contrairement au champ électrique

Par conséquent, dans le cas particulier d'une surface fermée délimitée par un tube de champ (ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé) renseigne sur une propriété importante des lignes de champ.

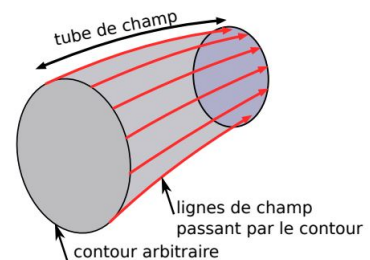


FIGURE 6 – Tube de champ

E. Action d'un champ magnétique sur un conducteur

L'objet de cette partie est de mettre en évidence, puis de quantifier la force que subit un conducteur parcouru par un courant, placé dans un champ extérieur.

E.1 Mise en évidence

On utilise le dispositif expérimental des rails de LAPLACE.

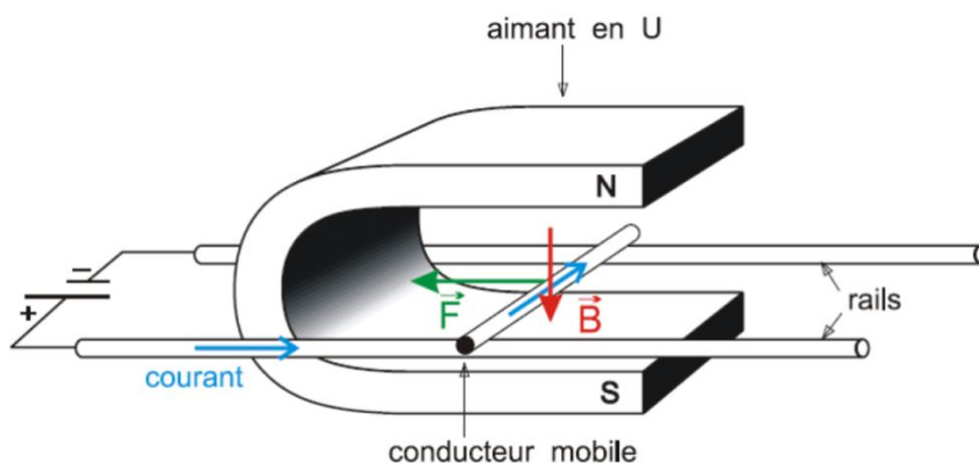


FIGURE 7 – Expérience des rails de LAPLACE

E.2 Force de LAPLACE

Définition EM2.5 - Force de LAPLACE

Un élément conducteur $d\vec{\ell}$ parcouru par un courant i , placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, subit une force magnétique appelée $d\vec{F}$ force de LAPLACE telle que

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

La force totale s'exerçant sur un conducteur plongé dans un champ magnétique est donc

$$\vec{F} = \int_{\text{cond}} i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

La direction de cette force se déduit du produit vectoriel : elle est orthogonale à la direction du courant $i d\vec{\ell}$ et au champ magnétique $\vec{B}$.

F. Dipôle magnétique

F.1 Moment dipolaire magnétique

La comparaison des cartes de champ magnétique créé par une spire de courant, une bobine plus longue ou un aimant permanent montre que le champ à grande distance ont la même allure. De plus ces lignes de champs sont très similaires à celle du dipôle électrostatique.

Définition EM2.6 - Moment dipolaire $\vec{m}$

On en vient donc à définir un dipôle magnétique, caractérisé par son moment magnétique $\vec{m}$. Le moment magnétique d'une spire de courant, engendrant une surface S , parcouru par un courant d'intensité i est défini comme suit :

$$\vec{m} = i \vec{S}$$

Le vecteur surface est orthogonal à la surface et orienté grâce au sens de parcours du courant. Le moment magnétique s'exprime logiquement en $A.m^2$.

Équivalence aimant-boucle de courant

F.2 Champ magnétique créé par un dipôle

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$ est fortement à rapprocher du champ électrique créé par un dipôle électrique. En effet, il suffit de remplacer p par m et ϵ_0 par $\frac{1}{\mu_0}$.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi OM^5} \left(3(\vec{m} \cdot \vec{OM}) \vec{OM} - OM^2 \vec{m} \right)$$

Cette relation n'est pas à connaître.

F.3 Action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique

Il en existe encore de fortes similitudes avec le dipôle électrostatique.

- Le dipôle possède une énergie potentielle d'interaction avec le champ : $\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$
- Si $\vec{B}_{\text{ext}}$ est uniforme, alors la résultante des forces subies par le dipôle est nulle et il subit un couple qui vaut $\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}_{\text{ext}}$

- Si $\vec{B}_{\text{ext}}$ est non-uniforme, alors la résultante des forces subie par le dipôle n'est plus nulle : $\vec{F} = \text{grad } \vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$

Dans tous les cas, le dipôle s'oriente dans la direction du champ appliqué. Si ce champ est non-uniforme, le dipôle se rapproche des zones de champ fort.

G. Mesures et valeurs de champ magnétique

L'unité moderne utilisée pour quantifier l'intensité du champ magnétique est le Tesla (T), défini en 1960. C'est une unité dérivée du système SI.

Pour diverses raisons historiques remontant aux travaux de Charles DE COULOMB, certains auteurs préfèrent utiliser des unités hors du système SI, comme le Gauss (G). On a : $1 \text{ T} = 10^5 \text{ G}$.

Source	B (T)
Earth's magnetic field	$5 \cdot 10^{-5}$
Refrigerator magnet	$5 \cdot 10^{-3}$
Junkyard electromagnet	1
Clinical MRI scanners	3
Lab NMR spectrometers	10
Largest pulsed field created in lab	100

FIGURE 8 – Typical magnetic field values

Le champ magnétique peut être mesuré à l'aide de sondes à effet HALL, qui constituent un teslamètre. La mesure de la valeur du champ magnétique terrestre a été historiquement réalisée par OERSTED, grâce à une méthode qui porte son nom.

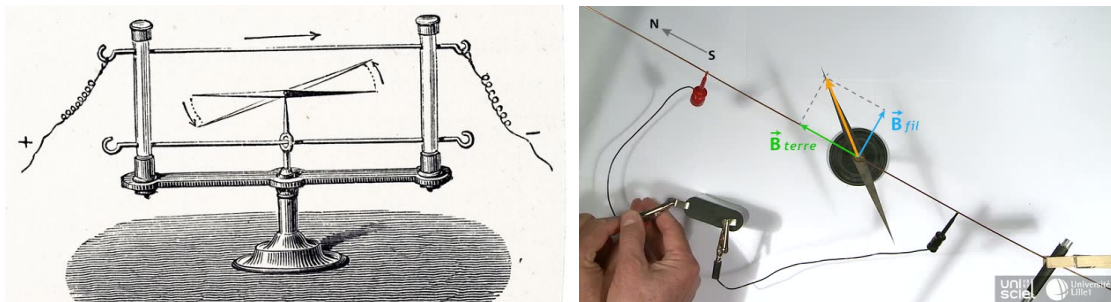


FIGURE 9 – Expérience d'OERSTED