

Mathématiques – DS₂

Les problèmes sont indépendants. Ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés). Numérotez chaque page de votre devoir. La calculatrice est interdite. Bon travail !

Problème 1 : Produits infinis (adapté de CCINP MP 2002)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels ou complexes non nuls, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

On définit la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ par :

$$\forall n \geq n_0, \quad P_n = \prod_{k=n_0}^n u_k = u_{n_0} \times u_{n_0+1} \times \cdots \times u_n.$$

On dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$, de terme général, u_n , converge lorsque la suite des produits partiels $(P_n)_{n \geq n_0}$

converge vers un nombre fini non nul. On notera alors $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Lorsque la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ n'admet pas de limite ou si elle converge vers 0, on dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0}$ diverge.

Partie I : Exemples de produits infinis

Exemple 1

Dans cet exemple, pour tout $n \geq 2$, on note $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

Q1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Q2. En déduire l'existence et calculer la valeur de : $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Exemple 2

Dans cet exemple, pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$.

Q3. Rappeler la formule de Stirling.

Q4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4} \times (2n+1)$.

Q5. En déduire que le produit $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ converge et que $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

Exemple 3

Dans cet exemple, pour tout $n \geq 2$, on note $u_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$.

Q6. Soit $n \geq 1$. Simplifier les expressions de P_{2n} et P_{2n+1} .

Q7. En déduire l'existence et la valeur de : $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Partie II : Condition nécessaire de convergence d'un produit infini

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels ou complexes non nuls, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Q8. En considérant le quotient $\frac{P_n}{P_{n-1}}$, montrer que si le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 1.

Dans la suite de cette partie, on note, pour tout $n \geq 1$, $u_n = e^{\frac{1}{n}}$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Q9. Rappeler la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et montrer que $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Q10. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 1} u_n$ diverge.

La réciproque de l'implication montrée à la question **Q8.** est-elle vraie ?

Partie III : Lien entre produit infini et série

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Q11. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(u_n)$ converge. Montrer qu'en cas de convergence, on a :

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \exp \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n) \right).$$

Indication : utiliser les sommes et produits partiels.

Q12. Soit un réel $x > 0$. Déterminer la nature du produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right)$. On ne demande pas de déterminer la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right)$.

Q13. Rappeler l'équivalent usuel en 0 de $\ln(1+x)$.

Q14. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.

Q15. En utilisant le résultat précédent, retrouver que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Dans la suite de cette partie, on suppose de plus que, pour tout entier $n \geq n_0$, $0 < u_n < 1$.

Q16. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 - u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Q17. Déterminer la nature du produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Partie III : Étude d'un cas particulier

Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle vérifiant les deux conditions suivantes :

- pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n| < 1$.
- la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

L'objectif de cette partie est de montrer que :

$$\text{le produit infini } \prod_{n \geq n_0} (1 + u_n) \text{ converge si, et seulement si, la série } \sum_{n \geq n_0} u_n^2 \text{ converge.}$$

Attention, on ne peut pas appliquer le résultat de **Q14.** ici.

Q18. On suppose que $\sum_{n \geq n_0} u_n^2$ converge.

Montrer que la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n)$ converge et, en déduire que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge.

Q19. Montrer que les séries $\sum_{n \geq n_0} (u_n - \ln(1 + u_n))$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n^2$ sont de même nature.

Q20. On suppose que $\sum_{n \geq n_0} u_n^2$ diverge.

Montrer que $\sum_{k=n_0}^n \ln(1 + u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et, en déduire que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ diverge.

Q21. Application : montrer que le produit infini $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

Problème 2 : Décomposition de Dunford (CCINP TPC 2010)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n et O_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: s'il existe $(\Delta, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

- i) $A = \Delta + N$,
- ii) Δ est diagonalisable,
- iii) N est nilpotente (i.e. il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N^q = O_n$),
- iv) $\Delta N = N \Delta$, autrement dit les matrices Δ et N commutent,

alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A .

Partie 1 : Généralités

Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q22. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A_1 .

Q23. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2 .

Q24. Soit A_3 une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_3 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

Q25. De même, soit A_4 une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_4 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

Q26. Vérifier que si (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A , alors Δ et N commutent avec A .

Partie 2 : Étude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Étude de Δ

Q27. Déterminer le spectre de Δ , en déduire que Δ est inversible.

- Q28.** Montrer que Δ est diagonalisable et la diagonaliser sous la forme $P^{-1}\Delta P = D$, avec $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Q29.** En déduire, de manière élémentaire, que Δ^{-1} est diagonalisable, et exprimer Δ^{-1} en fonction de P , P^{-1} et d'une matrice diagonale D_1 à déterminer.

Décomposition de Dunford de A

- Q30.** Montrer que A n'est pas diagonalisable.
Q31. Montrer que N est nilpotente.
Q32. Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

Décomposition de Dunford de A^{-1}

On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$.

- Q33.** Montrer que Δ^{-1} et N commutent.
Q34. En déduire que N_1 est nilpotente.
Q35. Développer $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1)$. En déduire que $I_3 + N_1$ est inversible et donner son inverse.
Q36. Justifier l'existence de A^{-1} .
Q37. Montrer que $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$ et en déduire une décomposition de Dunford de A^{-1} .

Décomposition de Dunford des puissances de A

Soit $p \in \mathbb{N}$.

- Q38.** À l'aide de la décomposition de Dunford (Δ, N) de A , montrer que $A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N$.
Q39. Vérifier que $(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p .
Q40. Calculer A^p .

Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A

- Q41.** Déterminer les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$.
Q42. À l'aide des matrices P et P^{-1} , déterminer alors une matrice S à **valeurs propres positives** telle que $S^2 = \Delta$.
Q43. Déterminer deux réels a et b , tels que $S = a\Delta + bI_3$, en raisonnant sur les formes diagonalisées. En déduire que S et N_1 commutent.
Q44. On pose $M = I_3 + \frac{1}{2}N_1$. Montrer que $M^2 = I_3 + N_1$.
Q45. En remarquant que $A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N)$, déterminer une matrice R telle que $R^2 = A$.
Q46. Donner une décomposition de Dunford de R .

Partie 3 : Étude dans le cas général

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

- Q47.** Montrer que A^{-1} et N commutent, et en déduire que $A^{-1}N$ est nilpotente.
Q48. En remarquant que $\Delta = A(I_n - A^{-1}N)$, montrer que Δ est inversible.
Q49. Montrer que $N_1 = \Delta^{-1}N$ est une matrice nilpotente. En déduire que $I_n + N_1$ est inversible et donner son inverse.
Q50. Montrer que A^{-1} possède une décomposition de Dunford.

– Fin du sujet –