

Primitives et intégration : L'essentiel du cours

1) Primitives d'une fonction sur un intervalle

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.
- Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

• **Primitives des fonctions usuelles :** (F représente une primitive de f)

$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{2x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\frac{U^2}{2}$	$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x \Rightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$
$\frac{U'}{U}$ ($U(x) > 0$)	$\ln U$	$f(x) = \frac{3}{(3x+1)} \Rightarrow F(x) = \ln(3x+1)$
$U' e^U$	e^U	$f(x) = 2x e^{(x^2)} \Rightarrow F(x) = e^{(x^2)}$

• **Recherche pratique d'une primitive :**

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante.

Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple :* Soit f définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(3x+6)}$.

On pense à la forme $\frac{U'}{U}$ (dont une primitive est $\ln U$). On écrit que $f(x) = \frac{1}{3} \times$

$$\underbrace{\frac{3}{3x+6}}_{\text{forme exacte}}$$

Une primitive de f sur $]-2; +\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \frac{1}{3} \times \ln(3x+6)$.

2) Intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

• Pour tous a et b de I :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

► *Exemple :*

$$\int_0^{\ln 2} 3e^{3x} dx = [e^{3x}]_0^{\ln 2} = e^{3 \ln 2} - e^0 = e^{\ln(2^3)} - 1 = e^{\ln(8)} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Propriétés de l'intégrale :

Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :

• $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$

• $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ (*Relation de Chasles*)

• $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ (*linéarité de l'intégrale*)

• Pour tout réel k , $\int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (*linéarité de l'intégrale*)

- Si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Calculs d'aires

f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$.

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à

$\int_a^b g(x) - f(x) dx$ en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

est égale à $\int_a^b f(x) dx$ en **unités d'aire**.

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

est égale à $-\int_a^b f(x) dx$ en **unités d'aire**.

► Remarques :

- Pour avoir l'aire en cm^2 , il faut multiplier le résultat en unités d'aire par : (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) \times (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).
- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord connaître leur position relative sur l'intervalle en question afin de savoir quelle est « la plus grande » et « la plus petite ».

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

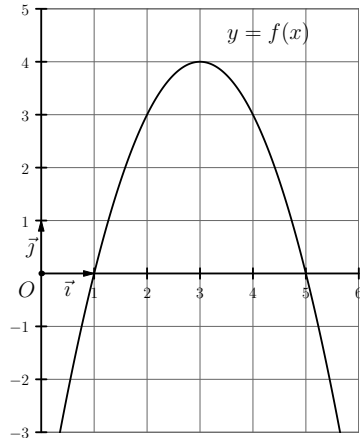
Si f est continue sur $[a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est égale à

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Primitives et intégration

► Exercice n°1

La courbe ci-dessous représente une fonction f continue sur \mathbb{R} et on note F une primitive de f sur \mathbb{R} .



Déterminer, en justifiant votre réponse, si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

- Proposition 1 : « $F'(3) = 0$ »
- Proposition 2 : « F est croissante sur $]1; 5[$ »
- Proposition 3 : « La tangente à la courbe représentative de la primitive F au point d'abscisse 2 admet comme équation $y = 4x$ »
- Proposition 4 : « La primitive F est convexe sur $]1; 5[$ »

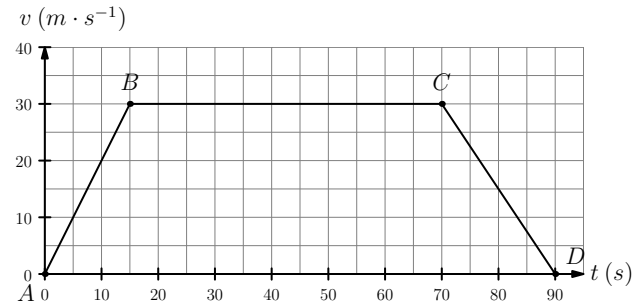
► Exercice n°2

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec $x \in [0; 15]$.

1. Le coût marginal, en euros, de cette production est définie sur $[0; 15]$ par $C_m(x) = 3x^2 - 36x + 750$. Étudier les variations de la fonction coût marginal sur $[0; 15]$. En déduire la quantité d'objets à fabriquer pour avoir un coût marginal minimum.
2. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total noté $C_T(x)$. Déterminer $C_T(x)$ sachant que $C_T(0) = 200$. (les coûts fixes s'élevant à 200 euros)

► Exercice n°3

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse v (en mètres par seconde) d'une moto sur une route rectiligne en fonction du temps t (en secondes).



1. On note d la fonction qui donne la distance parcourue (en mètres) en fonction du temps t . On rappelle que la fonction vitesse v est la dérivée de la fonction distance d . Compléter la phrase suivante :
Si $v(t) = d'(t)$ alors on peut dire que la fonction est une primitive de la fonction
2. Mouvement entre 0 et 15 secondes :
 - a) En déterminant une équation de la droite (AB) , déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t pour t compris entre 0 et 15 secondes.
 - b) En déduire $d(t)$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.
 - c) Quelle est la distance parcourue au bout de 15 secondes ?
3. Mouvement entre 15 et 70 secondes :
 - a) Quelle est l'expression de $v(t)$ entre 15 et 70 secondes ?
En déduire $d(t)$ pour t compris entre 15 et 70 secondes.
 - b) Quelle est la distance parcourue au bout de 70 secondes ?
4. Mouvement entre 70 et 90 secondes :
 - a) En déterminant une équation de la droite (CD) , déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t pour t compris entre 70 et 90 secondes.
 - b) En déduire $d(t)$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.
 - c) Quelle est la distance parcourue au bout des 90 secondes ?

Remarque :

- Entre 0 et 15 secondes, le mouvement est dit uniformément accéléré ;
- Entre 15 et 70 secondes, le mouvement est dit uniforme ;
- Entre 70 et 90 secondes, le mouvement est dit uniformément décéléré.

► **Exercice n°4**

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^3 (x^2 + 1) dx$

2. $\int_1^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx$

3. $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

4. $\int_1^e \frac{1}{x} (\ln x) dx$

5. $\int_{-1}^0 3e^{-x} dx$

6. $\int_0^{\ln 2} (e^x - e^{2x}) dx$

7. $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$

► **Exercice n°5**

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x \ln x$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = 1 + \ln x$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 f(x) dx$

► **Exercice n°6**

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (-2x - 3)e^{-x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x) dx$

► **Exercice n°7**

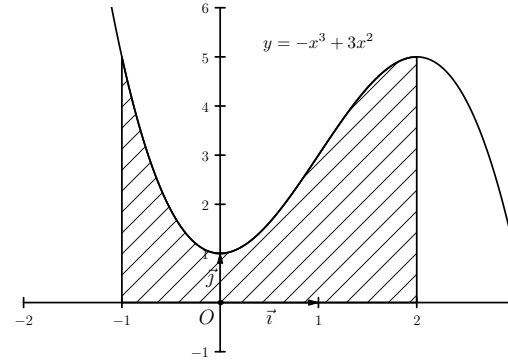
La probabilité qu'une année donnée la hauteur maximale d'un fleuve soit inférieure à a mètres est égale à $P(a) = \int_0^a 0,4x e^{-0,2x^2} dx$.

1. Calculer $P(a)$ en fonction de a .

2. En déduire la valeur de a pour laquelle $P(a) = 0,99$.

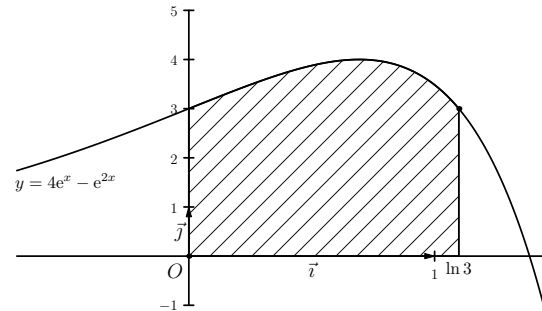
► **Exercice n°8**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



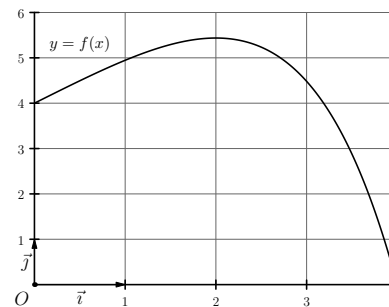
► **Exercice n°9**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



► **Exercice n°10**

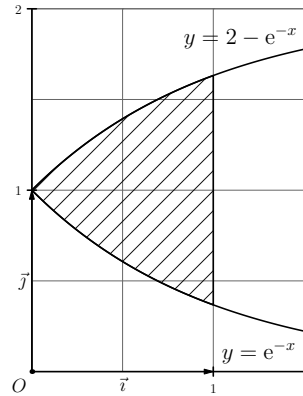
La courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0; 4]$ est donnée ci-dessous :



Justifier, d'après le graphique, que $12 \leq \int_0^3 f(x) dx \leq 18$.

► **Exercice n°11**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



► **Exercice n°12**

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, on note C_f la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = x$.

1. Étudier la position relative de C_f et D sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer l'aire A (en cm^2) du domaine délimité par la courbe C_f , la droite D et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

► **Exercice n°13**

Calculer la valeur moyenne sur $[1; 4]$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x}$.

► **Exercice n°14**

La vitesse (en mètres par seconde) d'un objet en mouvement est définie par $v(t) = 25(1 - e^{-2t})$ (t en secondes).

Calculer la vitesse moyenne de l'objet (la valeur moyenne de la fonction « vitesse ») entre $t = 1$ s et $t = 2$ s.

► **Exercice n°15**

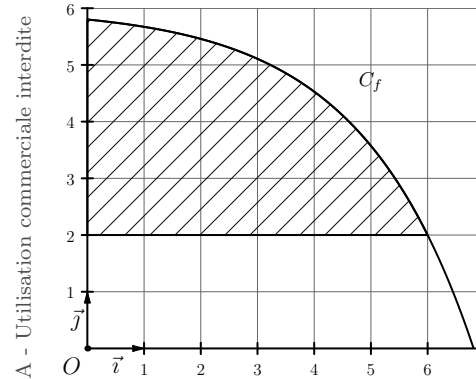
Le cours d'une action en euros est modélisée par la fonction f définie sur $[1; 13]$ par $f(t) = 20t + 40 - 80 \ln t$ où t représente le nombre de mois écoulés depuis le 1^{er} décembre 2019.

1. Étudier les variations de f sur $[1; 13]$.
2. Justifier que la fonction F définie par $F(t) = 10t^2 + 120t - 80t \ln t$ est une primitive de f sur $[1; 13]$.

3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[1; 13]$.

► **Exercice n°16**

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 6 - 4e^{0.5x-3}$ et C_f sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.



1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses.
2. Justifier que $f(6) = 2$.
3. Montrer qu'il existe un point de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2 .
4. Justifier que f est concave sur $[0; +\infty[$.
5. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie hachurée sur le graphique.

► **Exercice n°17**

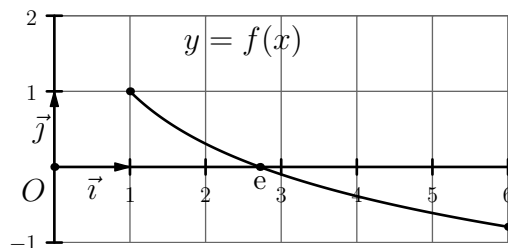
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 20 - 20e^{-0.1t}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, en donner une équation.
d) Dériver f et justifier que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température est donnée, en degrés Celsius, par $f(t)$ où t est le temps exprimé en secondes.
 - a) Quelle est la température du fil au bout de 10 sec ? On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1C près.

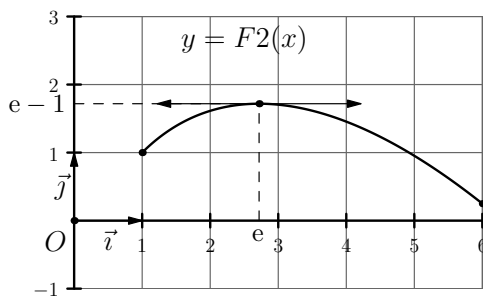
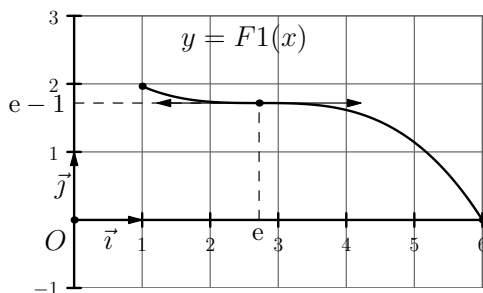
- b) Déterminer, en résolvant une équation, au bout de combien de temps la température du fil sera de 19C. On donnera le résultat à une seconde près.
- c) Déterminer une valeur approchée à 0,1C près de la température moyenne du fil pendant la première minute.

► **Exercice n°18**

La courbe d'une fonction f définie sur $[0; 6]$ est donné ci-dessous :



1. Parmi les deux courbes ci-dessous, une seule représente une primitive de f sur $[0; 6]$. Déterminer laquelle.



2. Déterminer la valeur de $I = \int_1^e f(x) dx$. Que représente graphiquement I ?

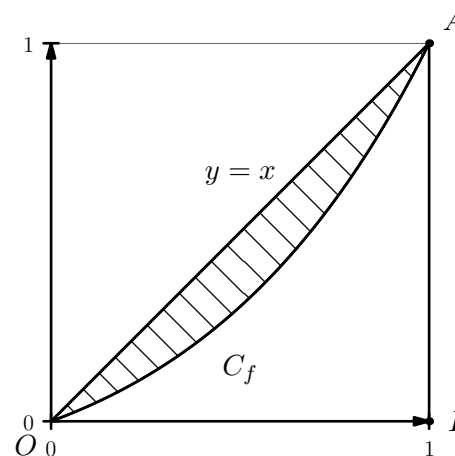
► **Exercice n°19**

1. a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $1 - e^{x-1} \geq 0$.
- b) Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = x(1 - e^{x-1})$. Justifier que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[0; 1]$.
- c) Montrer que la fonction G définie par $G(x) = (1 - x)e^{x-1} + \frac{x^2}{2}$ est une primitive de g sur $[0; 1]$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{x-1}$.
- a) Vérifier que :
- $f(0) = 0$;
 - $f(1) = 1$;
 - f est croissante sur $[0; 1]$;
 - $f(x) \leq x$ pour tout x de $[0; 1]$.

(on utilisera le résultat de la question 1. b)

Remarque : la courbe d'une fonction vérifiant ces conditions est appelée en économie une courbe de Lorenz.

- b) Dans le graphique ci-dessous figure la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.



On appelle coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f le rapport $\frac{\text{aire de la partie hachurée}}{\text{aire du triangle } OIA}$.

En remarquant que l'aire de la partie hachurée est égale à $\int_0^1 g(x) dx$, calculer la valeur du coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f .

Primitives et intégration

► Exercice n°1

- Proposition 1 : FAUSSE - $F'(3) = f(3) = 4$
- Proposition 2 : VRAIE - F est bien croissante sur $]1; 5[$ car $F'(x) = f(x) \geq 0$ pour x dans $]1; 5[$
- Proposition 3 : FAUSSE - le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est égal à $F'(2) = f(2) = 3$ et ne peut être égal à 4 comme proposé.
- Proposition 4 : FAUSSE - $F''(x) = f'(x)$. Or f n'est pas croissante sur tout l'intervalle $]1; 5[$ mais uniquement sur $]1; 3[$, donc $f'(x)$ n'est positive que sur $]1; 3[$ et pas sur tout l'intervalle $]1; 5[$.

► Exercice n°2

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec $x \in [0; 15]$.

1. $C'_m(x) = 6x - 36$.

x	0	6	15
$C'_m(x)$	-	0	+
$C_m(x)$	750	642	885

Il faut donc fabriquer 6 milliers d'objets pour avoir un coût marginal minimum.

2. C_T est une primitive de C_m sur $[0; 15]$.

On a donc $C_T(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} - 36 \times \frac{x^2}{2} + 750x + C = x^3 - 18x^2 + 750x + C$ où C est la constante telle que $C_T(0) = 200 \Leftrightarrow 0^3 - 18 \times 0^2 + 750 \times 0 + C = 200 \Leftrightarrow C = 200$. C_T est donc définie par $C_T(x) = x^3 - 18x^2 + 750x + 200$.

► Exercice n°3

- Si $v(t) = d'(t)$ alors on peut dire que la fonction d est une primitive de la fonction v .
- Mouvement entre 0 et 15 secondes :
 - Une équation de la droite (AB) est $y = 2x$. Donc, $v(t) = 2t$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.
 - $d(t) = t^2 + C$. Or, $d(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$. On a donc finalement $d(t) = t^2$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.

c) $d(15) = 15^2 = 225$ mètres.

3. Mouvement entre 15 et 70 secondes :

a) $v(t) = 30$ pour t compris entre 15 et 70 secondes
Donc, $d(t) = 30t + C$ pour t compris entre 15 et 70 secondes. Or, $d(15) = 225 \Leftrightarrow 30 \times 15 + C = 225 \Leftrightarrow C = -225$. On a donc finalement $d(t) = 30t - 225$ pour t compris entre 15 et 70 secondes.

b) $d(70) = 30 \times 70 - 225 = 1875$ mètres.

4. Mouvement entre 70 et 90 secondes :

a) Le coefficient directeur de (CD) est égal à $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0 - 30}{90 - 70} = -1,5$.

(CD) admet donc une équation de la forme $y = -1,5x + p$. Or, on doit avoir $y_D = -1,5x_D + p \Leftrightarrow 0 = -1,5 \times 90 + p \Leftrightarrow p = 135$. Une équation de (CD) est donc $y = -1,5x + 135$.

Ainsi $v(t) = -1,5t + 135$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.

b) $d(t) = -1,5 \times \frac{t^2}{2} + 135t + C = -0,75t^2 + 135t + C$. Or, $d(70) = 1875 \Leftrightarrow -0,75 \times 70^2 + 135 \times 70 + C = 1875 \Leftrightarrow C = -3900$. On a donc finalement $d(t) = -0,75t^2 + 135t - 3900$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.

c) $d(90) = -0,75 \times 90^2 + 135 \times 90 - 3900 = 2175$ mètres.

► Exercice n°4

1. $\int_2^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_2^3 = \frac{22}{3}$

2. $\int_1^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[3 \frac{x^2}{2} + x + \ln x \right]_1^2 = \frac{11}{2} + \ln 2$

3. $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x}]_1^4 = 1$

4. $\int_1^e \frac{1}{x} (\ln x) dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}$ (forme $U'U$)

5. $\int_{-1}^0 3e^{-x} dx = [-3e^{-x}]_{-1}^0 = -3 + 3e$

6. $\int_0^{\ln 2} (e^x - e^{2x}) dx = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\ln 2} = \left(2 - \frac{1}{2} \times 4 \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$

7. $\int_0^1 xe^{-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2} (-2xe^{-x^2}) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}$
(utilisation de la forme $U'e^U$)

► **Exercice n°5**

$$1. f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = f(x).$$

$$2. \int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = [x \ln x]_1^2 = 2 \ln 2$$

► **Exercice n°6**

$$1. f'(x) = -2e^{-x} + (-2x - 3)(-e^{-x}) = e^{-x}(-2 + 2x + 3) = f(x)$$

$$2. \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = [(-2x - 3)e^{-x}]_0^1 = -5e^{-1} + 3$$

► **Exercice n°7**

$$1. P(a) = \int_0^a 0,4x e^{-0,2x^2} dx = \int_0^a -(-0,4x e^{-0,2x^2}) dx = [-e^{-0,2x^2}]_0^a = -e^{-0,2a^2} + 1 \quad (\text{utilisation de la forme } U'e^U)$$

$$2. P(a) = 0,99 \Leftrightarrow -e^{-0,2a^2} + 1 = 0,99 \Leftrightarrow e^{-0,2a^2} = 0,01 \Leftrightarrow -0,2a^2 = \ln 0,01 \\ \Leftrightarrow a^2 = \frac{\ln 0,01}{-0,2} \Leftrightarrow a = \sqrt{-\frac{\ln 0,01}{0,2}} \approx 4,8$$

► **Exercice n°8**

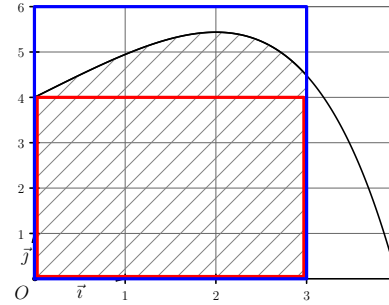
$$\text{aire} = \int_{-1}^2 -x^3 + 3x^2 dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-1}^2 = (-4 + 8) - \left(-\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{21}{4} \text{ unités d'aire}$$

► **Exercice n°9**

$$\text{aire} = \int_0^{\ln 3} 4e^x - e^{2x} dx = \int_0^{\ln 3} 4e^x - \frac{1}{2}(2e^{2x}) dx = \left[4e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 3} \\ = \left(4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 9\right) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 4 \text{ unités d'aire}$$

► **Exercice n°10**

$\int_0^3 f(x) dx$ correspond à l'aire sous la courbe hachurée ci-dessous. Elle est comprise entre l'aire du rectangle rouge, qui est égale à 3×4 , et l'aire du rectangle bleu, qui est égale à 3×6 .



On a donc bien $12 \leq \int_0^3 f(x) dx \leq 18$.

► **Exercice n°11**

$$\text{aire} = \int_0^1 2 - e^{-x} - e^{-x} dx \quad (\text{« intégrale de la plus grande - plus petite »}) \\ = \int_0^1 2 - 2e^{-x} dx = [2x + 2e^{-x}]_0^1 = 2 + 2e^{-1} - 2 = 2e^{-1} \text{ unités d'aire}$$

► **Exercice n°12**

$$1. \text{ Pour tout } x > 0, f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}.$$

Si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ donc $-\ln x > 0$ et $-\frac{\ln x}{x} > 0$. C_f est au dessus de D sur $]0; 1[$.

Si $x > 1$, $\ln x > 0$ donc $-\ln x < 0$ et $-\frac{\ln x}{x} < 0$. C_f est en dessous de D sur $]0; 1[$.

$$2. A \text{ (en unités d'aire)} = \text{« intégrale de la plus grande - plus petite »}$$

$$= \int_1^e x - f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x dx \quad (\text{forme } U'U) \\ = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$$

A en $\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \times (\text{la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses}) \times (\text{la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées})$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

► **Exercice n°13**

$$\text{valeur moyenne} = \frac{1}{4-1} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 2 \times \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} [2 \ln x]_1^4 \\ = \frac{1}{3} (2 \ln 4 - 0) = \frac{2}{3} \ln 4$$

► **Exercice n°14**

$$\begin{aligned} \text{vitesse moyenne} &= \frac{1}{2-1} \int_1^2 v(t) dt = \int_1^2 25(1 - e^{-2t}) dt \\ &= \int_1^2 25 + 12,5(-2e^{-2t}) dt = [25t + 12,5e^{-2t}]_1^2 \\ &= (50 + 12,5e^{-4}) - (25 + 12,5e^{-2}) = 25 + 12,5e^{-4} - 12,5e^{-2} \approx 23,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

► **Exercice n°15**

1. $f'(t) = 20 - 80 \times \frac{1}{t} = \frac{20t - 80}{t}$.

t	1	4	13
$20t - 80$	-	0	+
t	+		+
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	↘		↗

2. $F'(t) = 20t + 120 - 80 \left(1 \times \ln t + t \times \frac{1}{t} \right) = 20t + 120 - 80 - 80 \ln t = 20t + 40 - 80 \ln t = f(t)$

3. valeur moyenne = $\frac{1}{13-1} \int_1^{13} f(t) dt = \frac{1}{12} [F(t)]_1^{13}$
 $= \frac{1}{12} (3250 - 1040 \ln 13 - 130) = \frac{1}{12} (3120 - 1040 \ln 13) \approx 37,70$ euros

► **Exercice n°16**

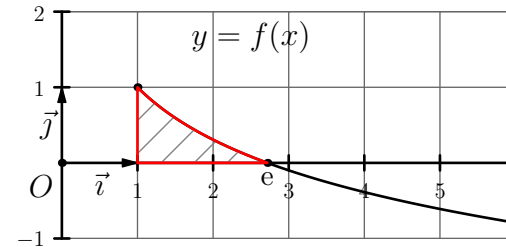
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 4e^{0,5x-3} = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x-3} = 1,5 \Leftrightarrow 0,5x - 3 = \ln(1,5)$
 $\Leftrightarrow 0,5x = 3 + \ln(1,5) \Leftrightarrow x = 6 + 2 \ln(1,5)$.
- $f(6) = 6 - 4e^{0,5 \times 6 - 3} = 6 - 4e^0 = 6 - 4 = 2$.
- Cela revient à chercher $x \geq 0$ tel que $f'(x) = -2$
 $\Leftrightarrow -4 \times 0,5e^{0,5x-3} = -2 \Leftrightarrow -2e^{0,5x-3} = -2 \Leftrightarrow e^{0,5x-3} = 1 \Leftrightarrow 0,5x - 3 = \ln 1$
 $\Leftrightarrow 0,5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 0,5x = 3 \Leftrightarrow x = 6$. Le point d'abscisse 6 convient.
- $f''(x) = -2 \times 0,5e^{0,5x-3} = -e^{0,5x-3} < 0$ car un exponentiel est toujours strictement positif, donc f est bien concave sur $[0; +\infty[$.
- aire (en unités d'aire) = « intégrale de la plus grande - plus petite »
 $= \int_0^6 f(x) - 2 dx = \int_0^6 4 - 4e^{0,5x-3} dx = \int_0^6 4 - 8(0,5e^{0,5x-3}) dx$
 $= [4x - 8e^{0,5x-3}]_0^6 = (24 - 8e^0) - (0 - 8e^{-3}) = 16 + 8e^{-3} \approx 16,4$

► **Exercice n°17**

- $\lim_{t \rightarrow -\infty} -0,1t = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-0,1t} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$.
 - $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,1t = -\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,1t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$.
 - La droite d'équation $y = 20$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.
 - $f'(t) = 0 - 20(-0,1e^{-0,1t}) = 2e^{-0,1t} > 0$ sur \mathbb{R} car un exponentiel est toujours strictement positif. Donc f est bien strictement croissante sur \mathbb{R} .
- $f(10) = 20 - 20e^{-1} \approx 12,6C$.
 - $f(t) = 19 \Leftrightarrow 20 - 20e^{-0,1t} = 19 \Leftrightarrow -20e^{-0,1t} = -1 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = 0,05$
 $\Leftrightarrow -0,1t = \ln(0,05) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,05)}{-0,1} \approx t = 30$ secondes.
 - température moyenne = $\frac{1}{60-0} \int_0^{60} f(t) dt =$
 $\frac{1}{60} \left[20t - 20 \times \frac{1}{-0,1} e^{-0,1t} \right]_0^{60} = \frac{1}{60} [20 \times 60 + 200e^{-0,1 \times 60} - 200e^0]$
 $= \frac{1}{60} [1200 + 200e^{-6} - 200] = \frac{1}{60} [1000 + 200e^{-6}] \approx 16,7C$

► **Exercice n°18**

- $F'(x) = f(x)$. Donc le signe de $f(x)$ donne les variations de F . Or $f(x)$ est d'abord positif, puis négatif, donc F doit être croissante, puis décroissante. Seule F_2 correspond.
- $I = \int_1^e f(x) dx = [F_2(x)]_1^e = F_2(e) - F_2(1) = e - 1 - 1 = e - 2$.
 I représente l'aire de la partie hachurée :



► Exercice n°19

1. a) $1 - e^{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{x-1} \Leftrightarrow \ln 1 \geq x - 1 \Leftrightarrow 1 \geq x$. $S =]-\infty; 1]$
b) Sur $[0; 1]$, on a $x \geq 0$ et $1 - e^{x-1} \geq 0$ d'après la question précédente.
c) $G'(x) = -1 \times e^{x-1} + (1-x) \times e^{x-1} + x = -e^{x-1} + e^{x-1} - xe^{x-1} + x$
 $= -xe^{x-1} + x = x(1 - e^{x-1}) = g(x)$
2. a)
 - $f(0) = 0 \times e^{-1} = 0$;
 - $f(1) = 1 \times e^0 = 1$;
 - $f'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times e^{x-1} = e^{x-1} + xe^{x-1} = (1+x)e^{x-1}$.
 $1+x$ et e^{x-1} sont positifs sur $[0; 1]$ donc f est bien croissante sur $[0; 1]$;
 - $x - f(x) = x - xe^{x-1} = x(1 - e^{x-1}) = g(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$ d'après la question 1. b). On a donc bien $f(x) \leq x$ sur $[0; 1]$
- b) aire de la partie hachurée $= \int_0^1 x - f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = [G(x)]_0^1 =$
 $G(1) - G(0) = \left(0 + \frac{1}{2}\right) - (e^{-1} + 0) = \frac{1}{2} - e^{-1}$.
coefficient de Gini $= \frac{\frac{1}{2} - e^{-1}}{\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right) = 1 - 2e^{-1}$