

La **cinématique** est l'étude du mouvement en soi. On ne s'intéresse pas aux causes qui ont donné naissance au mouvement.

1 Description et paramétrage du mouvement

1.1 Notion de référentiel et relativité du mouvement

Description d'un mouvement Pour décrire le mouvement d'un objet, on doit :

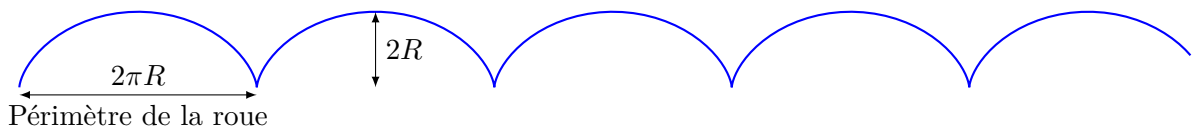
- dire par rapport à quoi il se déplace : on définit alors une **origine** ;
- dire dans quelle direction il se déplace : on fixe alors un **repère** (un système de coordonnées) ;
- sur quel intervalle de temps il se déplace : on définit une référence de temps et l'**instant initial**.

Définition. Un **référentiel** est un solide par rapport auquel on décrit le mouvement d'un objet, complété d'une référence de temps. C'est « Einstein sur une chaise avec une montre ». Il permet de définir un repère et une origine accrochés au référentiel permettant de décrire l'espace.

Un mouvement est toujours relatif, la **description d'un mouvement dépend du référentiel**.

Exemple

- Du point de vue de son voisin, le passager d'un train est immobile. Du point de vue de la vache au bord de la voie qui regarde le train passer, celui-ci est en translation.
- Du point de vue du cycliste, la valve de la roue est en rotation autour de l'axe de la roue. Selon un passant immobile, elle suit un mouvement de cycloïde. Son altitude atteint 0 à chaque tour de roue.



La mesure d'un intervalle de longueur (une distance) ou d'un intervalle de temps (une durée) est **absolue** : elle ne dépend pas du référentiel. Cela est valable en **mécanique classique**, c'est-à-dire si la vitesse des corps est très inférieure à celle de la lumière dans le vide.

Remarque. On peut mettre en évidence la relativité des durées dans plusieurs situations. Donnons un exemple. Les muons sont des particules très instables produits par le rayonnements cosmiques dans la haute atmosphère. Ils se désintègrent suivant la loi :

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec $\tau = 2,2 \times 10^{-6}$ s.

Dans l'expérience de Frisch et Smith (1963), la vitesse des muons est $0,9952c$. Dans le référentiel terrestre, ils mettent $6,392 \times 10^{-6}$ s (durée dans le référentiel terrestre) à parcourir 1 907 m (longueur mesurée dans le référentiel terrestre). Sur un premier compteur en altitude, on détecte 563 muons/heure. On attend donc à en détecter au sol :

$$N(t) = 563 \exp\left(-\frac{6,392 \times 10^{-6}}{2,2 \times 10^{-6}}\right) = 31 \text{ muons par seconde}$$

Or on en détecte 408. Il faut évaluer Δt dans le référentiel des muons, celui-ci diffère significativement de la valeur évaluée dans le référentiel terrestre (d'un facteur $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,098$).

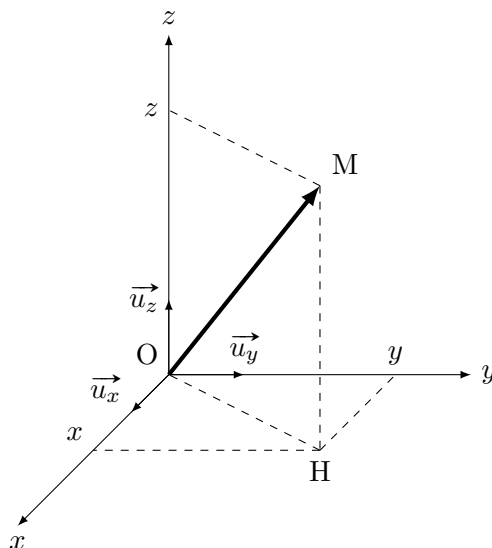
1.2 Système de coordonnées

Pour décrire le mouvement d'un point dans l'espace, on se dote d'un **repère** « accroché » au référentiel. Le plus simple est le repère cartésien, constitué de trois vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux.

La position d'un point M par rapport à un point O est représentée par un **vecteur** $\overrightarrow{OM}$ pouvant éventuellement varier dans le temps. En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$$

Remarque. Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont appelés **vecteurs de base**, ce sont des vecteurs de norme 1. Ils n'ont pas d'unité, tandis que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont des longueurs. Le vecteur position est lui-même une longueur.

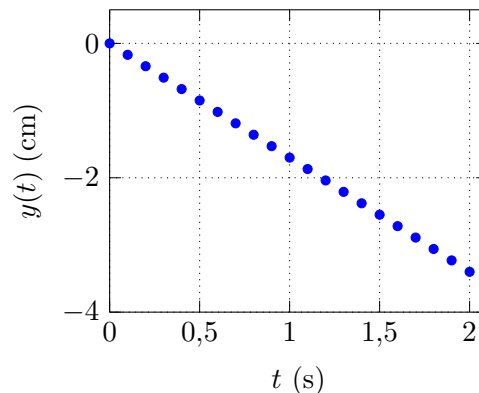
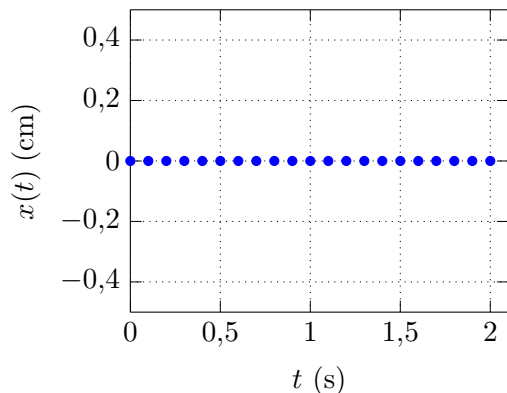


1.3 Équations horaires et trajectoire

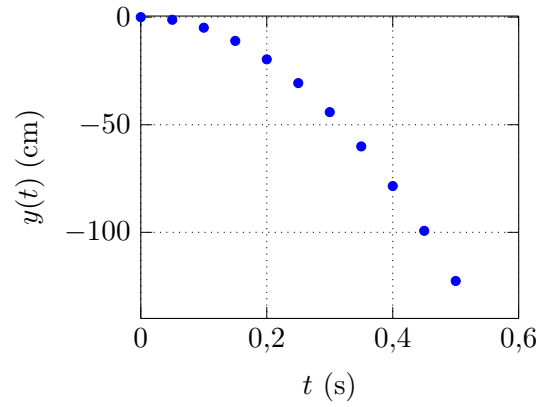
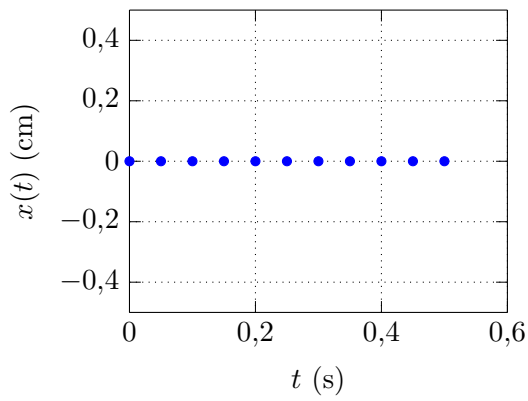
Définition. Les **équations horaires** du mouvement sont les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, exprimées **explicitement** en fonction du temps t .

Observons l'évolution de $x(t)$ et $y(t)$:

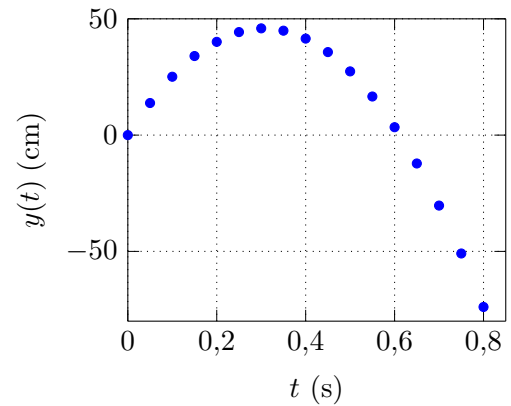
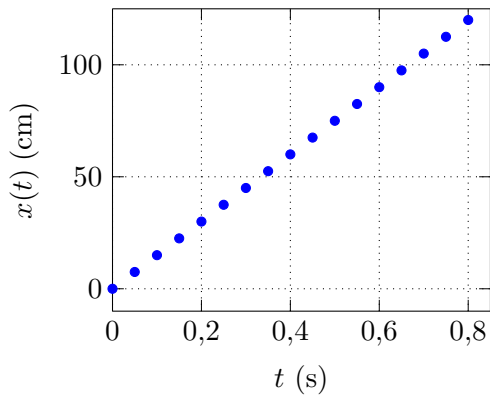
— dans le cas d'une chute dans le glycérol :



— d'une chute libre sans vitesse initiale :



— d'une chute libre avec vitesse initiale :

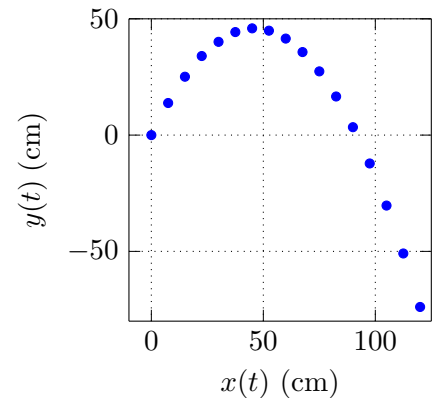
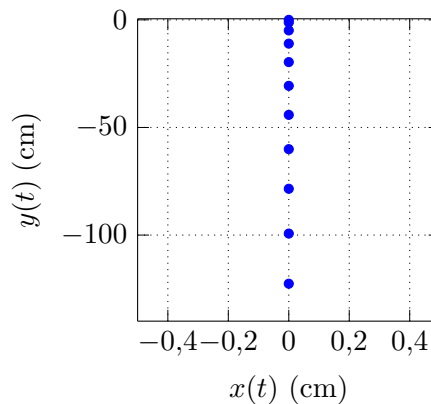
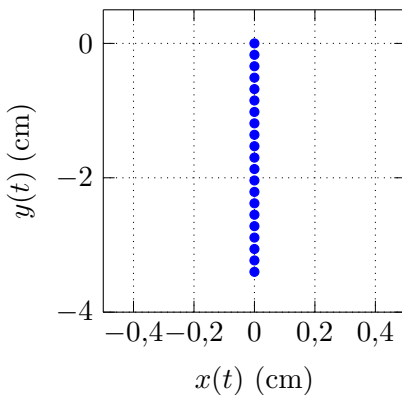


Les équations horaires peuvent être une expression analytique de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ obtenue à partir d'une modélisation du problème.

Trajectoire.

Définition. La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives du point M au cours du temps. C'est le « dessin » fait par le mobile au cours du temps.

Sur ces expériences, la trajectoire est la courbe $y(x)$ car le mouvement est plan. C'est une droite dans les deux premiers cas (chute dans le glycérol et chute libre sans vitesse initiale) et une parabole dans le dernier (chute avec vitesse initiale).



2 Vitesse et accélération

2.1 La vitesse

Vous avez en seconde défini le vecteur vitesse comme le rapport :

$$\vec{v}(t) = \frac{\overrightarrow{\text{OM}(t + \Delta t) - \text{OM}(t)}}{\Delta t}$$

Si on effectue des mesures très rapprochées, on fait tendre Δt vers 0. On définit alors le vecteur vitesse instantanée (désigné simplement comme le vecteur vitesse dans la suite) :

Vecteur vitesse : On définit le vecteur vitesse comme la **dérivée** du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{\text{OM}(t)}}{dt}$$

Composantes de la vitesse. Le vecteur position est :

$$\overrightarrow{\text{OM}(t)} = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$$

Donc :

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z)$$

Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ ne changent pas de direction dans le temps (et restent unitaires), on peut donc les considérer comme des constantes multiplicatives :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}(t)\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}(t)\vec{u}_z$$

Définition. En mécanique, les dérivées par rapport au temps se notent avec un point sur la fonction, autrement dit

$$\frac{dx}{dt}(t) = \dot{x}(t)$$

Ainsi :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$$

Exemple

Revenons aux trois exemples mentionnés précédemment.

- Pour la chute dans le glycérol, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y}$ est constant : le vecteur vitesse est constant, dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y}$ diminue linéairement (sa valeur absolue augmente) : le vecteur vitesse est variable, dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\dot{x}$ est constant et $\dot{y}$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable et change de direction.

Remarque. La norme du vecteur vitesse est :

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

Si il y a possibilité de confusion, il faut bien indiquer de quelle grandeur on parle : le vecteur vitesse ou la norme de la vitesse. Dans le vecteur vitesse, il y a trois informations scalaires ; dans la norme une seule.

2.2 L'accélération

L'accélération est une grandeur physique qui mesure la variation de la vitesse. On peut la définir ainsi :

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

De même, on définit alors l'accélération instantanée (désignée simplement comme l'accélération dans la suite) :

Vecteur accélération : C'est la dérivée du vecteur vitesse. Elle s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$$

Composantes de l'accélération. On reprend le vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$$

Donc :

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z)$$

À nouveau, on peut considérer les vecteurs comme des constantes multiplicatives d'où :

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$$

On a noté $\ddot{x}$ la dérivée seconde de la fonction x .

Exemple

Dans les trois exemples mentionnés précédemment :

- Pour la chute dans le glycérol, $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ sont nuls : le vecteur accélération est nul.
- Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.

Attention

- Une composante du vecteur accélération peut être négative ou nulle.
- En physique, l'accélération est liée à la **variation du vecteur vitesse**, rien de plus. Ce peut être différent de l'utilisation courante de ce mot.
- Pour que l'accélération soit nulle, il faut que toutes les composantes de la vitesse ne varient pas. Un mouvement peut se faire à vitesse constante en norme (on le dit alors uniforme) mais avec une accélération non nulle (exemple du mouvement circulaire uniforme : le vecteur vitesse garde la même norme mais change de direction).

3 Exemples de mouvements

3.1 Rappel

- Si $\dot{x}(t) = 0$, alors $x(t) = x_0$, où x_0 est une constante.
- Si $\dot{x}(t) = v_0$, alors $x(t) = v_0 t + x_0$, où x_0 est une constante.
- Si $\dot{x}(t) = a_0 t$, alors $x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0$, où x_0 est une constante.

Il suffit de dériver les expressions de $x(t)$ pour vérifier ce résultat.

3.2 Le mouvement rectiligne uniforme

Exemple

| Chute d'une bille dans le glycérol.

Définition. Le mouvement est dit rectiligne uniforme si le **vecteur vitesse** est constant.

Par exemple :

$$\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$$

Une égalité de vecteurs donne **trois** égalité de scalaires, une par composante.

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Il faut intégrer ces équations pour connaître les coordonnées du vecteur position :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Où x_0 , y_0 et z_0 sont trois constantes que l'on peut calculer à l'aide des conditions initiales. Ce sont les **équations horaires du mouvement**.

3.3 Le mouvement rectiligne uniformément accéléré

Exemple

| Chute libre sans vitesse initiale.

En mécanique, on doit commencer par :

- dire ce qui bouge, par rapport à quoi (le référentiel) ;
- dire ce que l'on étudie (un point de l'objet qui bouge) ;
- définir le repère et l'origine, fixés au référentiel ;
- définir l'instant initial.

Position du problème. On étudie le mouvement d'une balle dans le référentiel du laboratoire. On repère la position du centre d'inertie de la balle, noté M, dans le repère $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, fixé au référentiel, ainsi défini :

- la verticale ascendante est représentée par le vecteur $\vec{u}_y$;
- on définit deux vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ horizontaux pour constituer une base directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

L'instant initial est défini comme le moment où on lâche la balle, ainsi :

$$\vec{v}(0) = \vec{0}$$

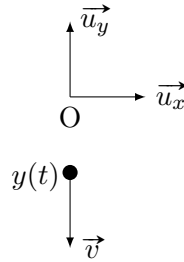
L'origine du repère est défini comme la position de la balle à $t = 0$, ainsi :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$$

Donnée. On considère l'accélération constante pendant le mouvement :

$$\vec{a}(t) = -g\vec{u}_z$$

Schéma. Faisons un schéma de la situation :



L'accélération est :

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$$

Comme $\vec{a}(t) = -g\vec{u}_z$, on a par projection de l'égalité **trois** équations :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

On intègre ces équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \\ \dot{y}(t) = -gt + B \\ \dot{z}(t) = C \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales. D'une part, d'après ce qui précède :

$$\dot{x}(0) = A \quad \dot{y}(0) = B \quad \dot{z}(0) = C$$

Or, la balle est lâchée sans vitesse initiale, $\vec{v}(0) = \vec{0}$, cette égalité vectorielle donne :

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \dot{z}(0) = 0$$

D'où $A = B = C = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

On intègre ces équations une seconde fois pour avoir la position :

$$\begin{cases} x(t) = A' \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + B' \\ z(t) = C' \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales. D'une part, d'après ce qui précède :

$$x(0) = A' \quad y(0) = B' \quad z(0) = C'$$

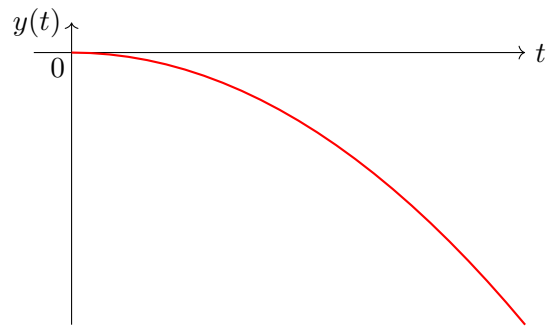
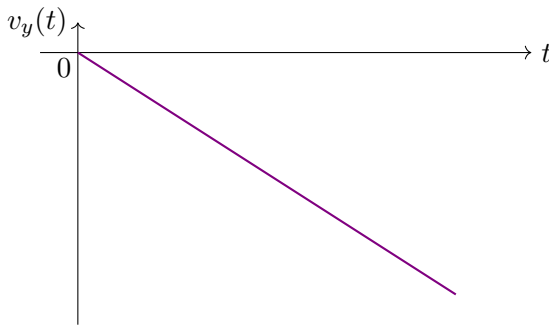
Or l'origine est la position de la balle à l'instant initial ainsi $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ soit :

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad z(0) = 0$$

D'où $A' = B' = C' = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Ce sont les **équations horaires du mouvement**.



La trajectoire dans ce cas une droite.

3.4 Mouvement courbe uniformément accéléré

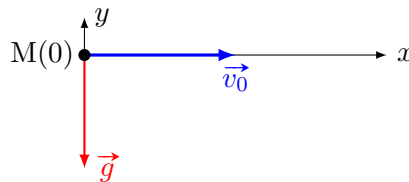
Exemple

| Chute libre avec vitesse initiale.

On considère la même situation que ci-dessus, mais la balle a été lancée avec une vitesse initiale horizontale :

$$\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$$

L'accélération reste $\vec{a} = -g\vec{u}_y$. On conserve le même repère et la même origine ainsi $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$.



Vecteur accélération. L'accélération est :

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$$

Or $\vec{a} = -g\vec{u}_y$ donc, par projection de cette égalité de vecteurs :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Vecteur vitesse. On intègre une à une les coordonnées du vecteur accélération :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \\ \dot{y}(t) = -gt + B \\ \dot{z}(t) = C \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales. D'une part, d'après ce qui précède :

$$\dot{x}(0) = A \quad \dot{y}(0) = B \quad \dot{z}(0) = C$$

Or, la vitesse initiale est $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$ donc la projection de cette égalité vectorielle donne :

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \dot{z}(0) = 0$$

D'où $A = v_0$ et $B = C = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Vecteur position. On intègre une à une les coordonnées du vecteur vitesse :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + A' \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + B' \\ z(t) = C' \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales. D'une part, d'après ce qui précède :

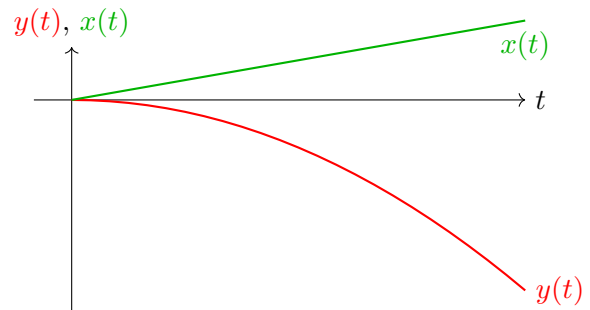
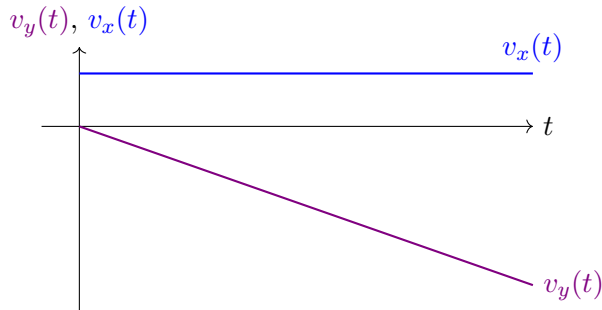
$$x(0) = A' \quad y(0) = B' \quad z(0) = C'$$

Or l'origine est la position de la balle à l'instant initial ainsi $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ donc chacune des coordonnées de position est nulle à l'instant initial :

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad z(0) = 0$$

D'où $A' = B' = C' = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$



Trajectoire Il s'agit d'obtenir la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy . On peut procéder ainsi. On commence par exprimer t en fonction de x :

$$t = \frac{x(t)}{v_0}$$

Donc :

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x(t)}{v_0} \right)^2 = -\frac{g}{2v_0^2} x(t)^2$$

La trajectoire est la parabole d'équation :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2$$

