

Réduction des endomorphismes – TD₅

Un peu d'algèbre linéaire sans réduction

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 = 0$ et $\text{rg}(A) = r$. Montrer que la matrice A et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Réponse

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .

► On considère $(u_1, \dots, u_r)$ une base de $\text{Im}(f)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on considère $e_k \in E$ un antécédent de u_k par f . Autrement dit, on a l'égalité $u_k = f(e_k)$.

► On a $A^2 = 0$, donc $f^2 = 0$. Montrons alors que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$, on a $y = f(x)$ où $x \in \mathbb{K}^n$. Donc, $f(y) = f^2(x) = 0$. Donc, $y \in \text{Ker}(f)$.

La famille $(u_1, \dots, u_r)$ est alors une famille libre de $\text{Ker}(f)$, qui est de dimension $n - r$ (théorème du rang). On la complète en $(u_1, \dots, u_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2r})$ en une base de $\text{Ker}(f)$.

► Montrons que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2r}, e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_{n-2r}, \gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_r.u_r + \mu_1.\varepsilon_1 + \dots + \mu_{n-2r}.\varepsilon_{n-2r} + \gamma_1.e_1 + \dots + \gamma_r.e_r = 0. \quad (\star)$$

Comme les u_k et ε_k sont dans $\text{Ker}(f)$, en prenant l'image par f , on a :

$$\gamma_1.f(e_1) + \dots + \gamma_r.f(e_r) = 0.$$

D'où,

$$\gamma_1.u_1 + \dots + \gamma_r.u_r = 0.$$

Or, $(u_1, \dots, u_r)$ est une base de $\text{Im}(f)$, donc, $\gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$.

D'où,

$$\lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_r.u_r + \mu_1.\varepsilon_1 + \dots + \mu_{n-2r}.\varepsilon_{n-2r} = 0. \quad (\star)$$

Comme $(u_1, \dots, u_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2r})$ en une base de $\text{Ker}(f)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n-2r} = 0$.

Donc, $\mathcal{B}$ est une famille libre de $n = \dim(\mathbb{K}^n)$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Donc, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. De plus, dans cette base

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$A \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}$$

Exercice 2 :

Soit D une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont distincts deux à deux. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et D commutent.

Montrer que A est diagonale.

Réponse

On $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Comme D est diagonale, si $i \neq j$, alors $d_{i,j} = 0$.

Soit $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$.

Le coefficient en position ligne i et colonne j de $A \times D$ est :

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} d_{k,j} = a_{i,j} d_{j,j}.$$

De même, le coefficient en position ligne i et colonne j de $D \times A$ est :

$$\sum_{k=1}^n d_{i,k} a_{k,j} = d_{i,i} a_{i,j}.$$

Comme A et D commutent, on a : $a_{i,j} d_{j,j} = a_{i,j} d_{i,i}$, donc, $a_{i,j} \times (d_{j,j} - d_{i,i}) = 0$.

Comme les éléments diagonaux de D sont distincts deux à deux, on a $d_{j,j} - d_{i,i} \neq 0$, puis, $a_{i,j} = 0$.

Donc,

A est diagonale.

Exercice 3 :

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre.

Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u est l'ensemble de polynômes en u .

Réponse

► On sait qu'un polynôme en u commute avec u .

► Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u .

On sait que $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E , donc, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$v(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot u^i(x_0).$$

Montrons que, pour tout $x \in E$,

$$v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot u^i(x).$$

Pour cela, il suffit de le vérifier pour les vecteurs d'une base de E , ici, on utilise la base $\mathcal{B}$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Comme u et v commutent,

$$v(u^k(x_0)) = u^k(v(x_0)) = u^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot u^i(x_0) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot u^{k+i}(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot u^i(u^k(x_0)).$$

Donc, v et $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot u^i$ coïncident sur les vecteurs d'une base de E , donc, pour tout $x \in E$,

$$v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot u^i(x).$$

Donc, $v = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot u^i$.

On en déduit que v est un polynôme en u .

Éléments propres d'une matrice, d'un endomorphisme (exercice théorique)

Exercice 4 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $0 \in \text{Sp}(f^p)$, alors $0 \in \text{Sp}(f)$
2. On suppose dans cette question que $f \in \text{GL}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\text{Sp}(f^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(f) \right\}.$$

3. On suppose dans cette question que E est de dimension finie. Montrer que 0 est valeur propre de f si, et seulement si, f n'est pas surjective.

L'équivalence est-elle encore vraie en dimension infinie? Si oui, la démontrer, sinon une implication est-elle vraie?

Exercice 5 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul.
Montrer que λ est une valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, λ est valeur propre de $g \circ f$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que 0 est une valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, 0 est valeur propre de $g \circ f$.
3. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si E n'est pas supposé de dimension finie.

Réponse

1. ($\Rightarrow$) On suppose que λ est une valeur propre de $f \circ g$.

Il existe $x \neq 0$ tel que $f(g(x)) = \lambda.x$.

En prenant l'image par g , on a : $g(f(g(x))) = \lambda.g(x)$.

Par l'absurde, supposons que $g(x) = 0$, alors, par linéarité de f , $f(g(x)) = 0$, donc, $\lambda.x = 0$.

Comme $\lambda \neq 0$, on a $x = 0$. Contradiction.

Donc, $g(x) \neq 0$ et est un vecteur propre de $g \circ f$ pour la valeur propre λ .

Donc, λ est une valeur propre de $g \circ f$.

($\Leftarrow$) En échangeant les rôles de f et g , si λ est une valeur propre de $g \circ f$, alors λ est une valeur propre de $f \circ g$.

2. On sait que 0 est valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, $\chi_{f \circ g}(0) = 0$. Ce qui est équivalent à $\det(f \circ g) = 0$.

De plus,

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(g \circ f).$$

D'où, 0 est valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, $\det(g \circ f) = 0$. Donc,

0 est une valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, 0 est valeur propre de $g \circ f$.

3. Considérons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f: E \rightarrow E$ et $g: E \rightarrow E$
 $u \mapsto u' \qquad u \mapsto \text{l'unique primitive de } u \text{ qui s'annule en } 0.$

On a :

$$f \circ g = \text{id}_E.$$

Donc, 0 n'est pas valeur propre de $f \circ g$.

De plus,

$$\text{Ker}(g \circ f) = \{u \mid g(f(u)) = 0\} = \{u \mid g(u') = 0\} = \{\text{fonction constante}\}.$$

Donc, 0 est valeur propre de $g \circ f$. Une autre rédaction consiste à remarquer que la fonction constante égale à 1 est un vecteur propre de $g \circ f$ pour la valeur propre 0.

Exercice 6 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \neq 0_E$, x est un vecteur propre de f . Montrer que f est une homothétie.

Réponse

Par hypothèse, pour tout $x \neq 0_E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$.

Soit $u \in E$ non nul fixé. Montrons que, pour tout $x \neq 0_E$, $\lambda_x = \lambda_u$.

Soit $x \neq 0_E$ quelconque.

► **Cas 1** : (x, u) est une famille libre. On a :

$$f(x+u) = \lambda_{x+u} \cdot (x+u) = \lambda_{x+u} \cdot x + \lambda_{x+u} \cdot u \quad \text{et} \quad f(x+u) = f(x) + f(u) = \lambda_x \cdot x + \lambda_u \cdot u.$$

En faisant la différence des deux égalités, on a :

$$(\lambda_{x+u} - \lambda_x) \cdot x + (\lambda_{x+u} - \lambda_u) \cdot u = 0_E.$$

Or, la famille (x, u) est libre, donc, $\lambda_{x+u} - \lambda_x = \lambda_{x+u} - \lambda_u = 0$.

Donc, $\lambda_x = \lambda_{x+u} = \lambda_u$.

► **Cas 2** : (x, u) est une famille liée. Comme $u \neq 0_E$, on a $x = \mu \cdot u$ où $\mu \in \mathbb{K}$.

On a :

$$f(x) = \lambda_x \cdot x \quad \text{et} \quad f(x) = f(\mu \cdot u) = \mu \cdot \lambda_u \cdot u = \lambda_u \cdot x.$$

En faisant la différence des deux égalités,

$$(\lambda_x - \lambda_u) \cdot x = 0_E.$$

Comme $x \neq 0_E$, $\lambda_x = \lambda_u$.

► On donc montré que, pour tout $x \neq 0_E$, $f(x) = \lambda_u \cdot x$.

De plus, par linéarité, $f(0_E) = 0_E = \lambda_u \cdot 0_E$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda_u \cdot x$. Autrement dit,

f est l'homothétie de rapport λ_u .

Exercice 7 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0$.

Montrer que 0 est valeur propre de A .

Réponse

On remarque que $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc,

0 est valeur propre de A .

Exercice 8 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .

2. Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module inférieur à 1.

Réponse

1. On remarque que $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc,

1 est valeur propre de A .

2. Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A pour la valeur propre λ .

On a $A.X = \lambda.X$ et $X \neq 0$.

On note $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

Comme $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$.

De plus, le coefficient en position i_0 de l'égalité $A.X = \lambda.X$ donne :

$$\lambda.x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j}x_j.$$

D'où, par inégalité triangulaire,

$$|\lambda.x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}x_j|.$$

Comme les coefficients de A sont positifs ou nuls, on a :

$$|\lambda| \cdot |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j}|x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j}|x_{i_0}| \leq |x_{i_0}| \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}}_{=1} \leq |x_{i_0}|.$$

Donc, comme $|x_{i_0}| > 0$, on a $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 9 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On considère P un polynôme annulateur de f . Montrer que toute valeur propre de f est une racine de P . Étudier la réciproque.

Éléments propres d'une matrice, d'un endomorphisme (exercice pratique, sans polynôme caractéristique)

Exercice 10 :

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'application φ qui à une fonction $f \in E$ associe son unique primitive qui s'annule en 0.

Déterminer le spectre de φ .

Exercice 11 :

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme D de E défini pour tout $f \in E$ par $D(f) = f''$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de D .

Exercice 12 :

Déterminer les éléments propres de $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 $A \mapsto A^\top$

Réponse

On remarque que $\psi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. De plus, ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que ψ est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(\psi - \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ parallèlement à $\text{Ker}(\psi + \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$. De plus,

$$\text{Ker}(\psi - \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Ker}(\psi + \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\psi - \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \text{Ker}(\psi + \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Dans une base adaptée à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, la matrice de ψ est :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad r = (\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad s = (\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Donc,

- 1 est valeur propre de ψ et le sous-espace propre associé est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- -1 est valeur propre de ψ et le sous-espace propre associé est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13 :

Soit $n \geq 2$.

1. Déterminer les éléments propres de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \alpha J + \beta I_n$.

Réponse

1. La matrice J est de rang 1, donc, par le théorème du rang, $\text{Ker}(J)$ est de dimension $n - 1$.

On en déduit que 0 est valeur propre de J de multiplicité au moins $n - 1$.

D'où, X^{n-1} divise χ_J . Comme χ_J est de degré n et unitaire, on a :

$$\chi_J = X^{n-1} \times (X - \lambda).$$

On en déduit que χ_J est scindé, donc $(n - 1) \times 0 + \lambda = \text{tr}(J)$. D'où, $\lambda = n$.

On en déduit que

$$\chi_J = X^{n-1} \times (X - n).$$

Donc,

- 0 est valeur propre de J de multiplicité $n - 1$.
- n est valeur propre de J de multiplicité 1.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J pour la valeur propre n . Donc,

$$E_n(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, on remarque que $C_1 = C_2, \dots, C_1 = C_n$.

Donc, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\text{Ker}(J)$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_{n-2} \\ -\lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

Donc, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\text{Ker}(J)$ composée de $n-1 = \dim(\text{Ker}(J))$ vecteurs.

Donc,

$$E_0(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathbb{K}^n$.

On a :

$$A.X = \lambda.X \iff \alpha.J.X + \beta.X = \lambda.X \iff \alpha.J.X = (\lambda - \beta).X.$$

Cas 1 : $\alpha \neq 0$.

On a :

$$A.X = \lambda.X \iff J.X = \left(\frac{\lambda - \beta}{\alpha} \right).X$$

Donc, λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\frac{\lambda - \beta}{\alpha}$ est valeur propre de J .

Par la question 1.,

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \frac{\lambda - \beta}{\alpha} = 0 \text{ ou } \frac{\lambda - \beta}{\alpha} = n \iff \lambda = \beta \text{ ou } \lambda = \alpha n + \beta.$$

De plus, X est un vecteur propre de A pour la valeur propre de λ si, et seulement si, X est un vecteur propre de A pour la valeur propre de $\frac{\lambda - \beta}{\alpha}$.

On en déduit que $E_\beta(A) = E_0(J)$ et $E_{\alpha n + \beta}(A) = E_n(J)$.

Cas 2 : $\alpha = 0$. Dans ce cas $A = \beta.I_n$ est triangulaire supérieure.

Donc, β est la seule valeur propre de A , cette valeur propre des de multiplicité n et $E_\beta(A) = \text{Ker}(A - \beta.I_n) = \mathbb{K}^n$.

Exercice 14 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme : $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $M \mapsto \text{tr}(A).M - \text{tr}(M).A.$

Polynôme caractéristique

Exercice 15 :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et M la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\chi_M = \chi_{A+B} \times \chi_{A-B}$.

Réponse

On a :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X.I_n - A & -B \\ -B & X.I_n - A \end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n + C_{2n}$. On a alors,

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X.I_n - (A+B) & -B \\ X.I_n - (A+B) & X.I_n - A \end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_1, \dots, L_{2n} \leftarrow L_{2n} - L_n$. On a alors,

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X.I_n - (A+B) & -B \\ 0_n & X.I_n - (A-B) \end{vmatrix}.$$

On reconnaît le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, donc,

$$\chi_M = \det(X.I_n - (A+B)) \times \det(X.I_n - (A-B)) = \chi_{A+B} \times \chi_{A-B}.$$

Exercice 16 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que $\chi_A(A) = 0$.

Réponse

On note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On a $\chi_A = X^2 - (a+d).X + ad - bc$.

Il suffit ensuite de faire le calcul,

$$\chi_A(A) = A^2 - (a+d).A + (ad - bc).I_2 = \dots = 0.$$

Exercice 17 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On suppose que $f^{2023} = 0$. Montrer que $f^n = 0$.

Réponse

On note A la matrice de f dans une base de E .

On peut voir A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a $A^{2023} = 0_n$.

On en déduit que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$.

Donc, la seule valeur propre possible de A est 0.

Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et est unitaire de degré n , on a $\chi_A = X^n$.

Donc, par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.

Donc,

$$f^n = 0.$$

Exercice 18 :

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.
On dit que l'inverse de A est un polynôme en A .
2. Traduire le résultat de la question 1. en termes d'endomorphismes.

Réponse

1. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$.
Or, $\chi_A(A) = A^n - \text{tr}(A).A^{n-1} + \dots + \alpha.A + (-1)^n.\det(A).I_n$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.
Donc, $I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)} (A^{n-1} - \text{tr}(A).A^{n-2} + \dots + \alpha.I_n) \times A$.
Donc, $A^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)} (A^{n-1} - \text{tr}(A).A^{n-2} + \dots + \alpha.I_n)$ est un polynôme en A et $P = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)} (X^{n-1} - \text{tr}(A).X^{n-2} + \dots + \alpha)$ est de degré $n-1$.
2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie**. La bijection réciproque de f est un polynôme en f .

Exercice 19 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B n'ont pas de valeurs propres communes.

1. Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \times M = M \times B$ si, et seulement si, M est la matrice nulle.

Réponse

1. Dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

D'où,

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i.I_n).$$

Or, λ_i n'est pas valeur propre de B , donc, $\chi_B(\lambda_i) = \det(B - \lambda_i.I_n) \neq 0$, donc, $B - \lambda_i.I_n$ est inversible.

Donc, comme produit de matrices inversibles,

la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

2. ($\Leftarrow$) Si $M = 0$, alors $A \times M = 0 = M \times B$.

($\Rightarrow$) On suppose que $A \times M = M \times B$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \times M = M \times B^k$.

D'où en écrivant $P = \sum_{k=0}^d \alpha_k.X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) \times M = M \times P(B)$.

En posant $P = \chi_A$, on a :

$$\chi_A(A) \times M = M \times \chi_A(B).$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$0 = M \times \chi_A(B).$$

Donc, en multipliant par $(\chi_A(B))^{-1}$ à droite, on a : $M = 0$.

Exercice 20 :

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant $f \circ g - g \circ f = f$.

1. On considère $\varphi : f \mapsto f \circ g - g \circ f$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Simplifier $\varphi(f^n)$.
- En déduire que f est nilpotent

Réponse

► On raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n : \ll f^n \circ g - g \circ f^n = n.f^n \gg$.

Initialisation. $n = 0$. On a : $f^0 \circ g - g \circ f^0 = \text{id}_E \circ g - g \circ \text{id}_E = g - g = 0$ et $n.f^n = 0$. Donc, $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

On a : $f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = f \circ f^n \circ g - g \circ f^n \circ f$.

Or, par $\mathcal{H}_n$, on a $f^n \circ g = g \circ f^n + n.f^n$.

D'où, par linéarité de f et g ,

$$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = f \circ (g \circ f^n + n.f^n) - g \circ f^{n+1} = f \circ g \circ f^n - g \circ f \circ f^n + n.f^{n+1} = (f \circ g - g \circ f) \circ f^n + n.f^{n+1}.$$

Or, $f \circ g - g \circ f = f$, donc,

$$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = f \circ f^n + n.f^{n+1} = (n+1).f^{n+1}.$$

Donc, $\mathcal{H}_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

► On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ h &\mapsto h \circ g - g \circ h \end{aligned}$$

On vérifie sans mal que ϕ est linéaire (utiliser la linéarité de g) et est donc un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

► L'égalité montrée par récurrence se réécrit alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(f^n) = n.f^n$.

Par l'absurde, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est un vecteur propre de ϕ pour la valeur propre n .

D'où, ϕ possède une infinité de valeurs. Contradiction : en effet, ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension $(\dim(E))^2$, donc ϕ possède au plus $(\dim(E))^2$ valeurs propres comptées avec multiplicité.

Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)} : f$ est nilpotent.

Exercice 21 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé. Calculer $D_n(\theta) = \det(A + 2 \cos(\theta).I_n)$.
- En déduire les valeurs propres de A .
- Déterminer le sous-espaces propres de A .

Réponse

$$1. \text{ On a : } D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2 \cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant tridiagonal (**classique!**). On calcule $D_{n+2}(\theta)$ en développant par rapport à la première colonne, ce qui fait apparaître $D_{n+1}(\theta)$ et un autre déterminant qu'on développe par rapport la première colonne ce qui fait apparaître $D_{n+2}(\theta)$.

On trouve $D_{n+2}(\theta) = 2 \cos(\theta) \times D_{n+1}(\theta) - D_n(\theta)$. On reconnaît une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique est : $r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4(\cos(\theta))^2 - 4 = -4(\sin(\theta))^2 = (2i \sin(\theta))^2$.

Comme $\theta \in]0, \pi[$, $\Delta < 0$ et l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$ et $\cos(\theta) - i \sin(\theta) = e^{-i\theta}$.

Par théorème, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, $D_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$.

Or, $D_1(\theta) = |2\cos(\theta)|_1 = 2\cos(\theta)$ et $D_2(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}_2 = 4\cos(\theta)^2 - 1$.

On résout alors le système

$$\begin{cases} \lambda \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) &= 2\cos(\theta) \\ \lambda \cos(2\theta) + \mu \sin(2\theta) &= 4\cos(\theta)^2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) &= 2\cos(\theta) \\ \lambda(2\cos(\theta)^2 - 1) + 2\mu \cos(\theta) \sin(\theta) &= 4\cos(\theta)^2 - 1 \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2\cos(\theta)L_1$ donne $\lambda = 1$. Puis, $\mu = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$D_n = \cos(n\theta) + \frac{\cos(\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\cos(n\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

2. On a $\chi_A(-2\cos(\theta)) = \det(-2\cos(\theta).I_n - A) = (-1)^n \det(A + 2\cos(\theta).I_n) = (-1)^n \times D_n(\theta)$.

Donc, $-\cos(\theta)$ est valeur propre de χ_A si, et seulement si $D_n(\theta) = 0$. On résout donc l'équation $\sin((n+1)\theta) = 0$. Les solutions sont $\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \frac{3\pi}{n+1}, \dots, \frac{n\pi}{n+1}$. Elles appartiennent toutes à $[0, \pi]$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\lambda_k = -2\cos\left(\frac{k \times \pi}{n+1}\right)$. La fonction $\cos$ est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, donc les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont 2 à 2 distincts.

On a trouvé n valeurs propres distinctes de A qui est carrée de taille n , donc on les a toutes.

3. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On résout le système $A \times X = -2\cos\left(\frac{k \times \pi}{n+1}\right).X$ où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé.

En notant $x_0 = x_{n+1} = 0$, on a : pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_{j-1} + x_{j+1} = -2\cos\left(\frac{k \times \pi}{n+1}\right) \times x_j$. On se retrouve avec une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à résoudre. Après calculs (équation caractéristique...), on trouve $x_j = (-1)^j \sin\left(j \times \frac{k \times \pi}{n+1}\right)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{k \times \pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(2 \times \frac{k \times \pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ (-1)^n \times \sin\left(n \times \frac{k \times \pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ est quelconque. Donc,

$$E_{-2\cos\left(\frac{k \times \pi}{n+1}\right)} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{k \times \pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(2 \times \frac{k \times \pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ (-1)^n \times \sin\left(n \times \frac{k \times \pi}{n+1}\right) \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 22 : démonstration du théorème de Cayley-Hamilton par les matrices compagnons

1. $P = a_0 + a_1 \times X + \dots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p \in \mathbb{K}[X]$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Montrer que $\chi_A = P$.

2. *Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $u \in E$ quelconque. On cherche à montrer que $(\chi_f(f))(u) = 0_E$.

(a) Justifier que le résultat est clair lorsque $u = 0_E$.

Dans la suite, on suppose $u \neq 0_E$

(b) Justifier l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.

(c) Justifier l'existence de $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $a_0 \cdot u + a_1 \cdot f(u) + \dots + a_{p-1} \cdot f^{p-1}(u) + f^p(u) = 0_E$.

Dans la suite, on note $P = a_0 + a_1 \times X + \dots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p$.

(d) Montrer que P divise χ_f .

(e) En déduire que $(\chi_f(f))(u) = 0_E$.

(f) Conclure.

Exercice 23 :

Déterminer les sous-espaces stables de f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

La dimension de F est 0, 1, 2 ou 3.

► Cas 1 : $\dim(F) = 0$. Dans ce cas, $F = \{(0, 0, 0)\}$ et F est stable par f .

► Cas 2 : $\dim(F) = 3$. Dans ce cas, $F = \mathbb{R}^3$ et F est stable par f .

► Cas 3 : $\dim(F) = 1$. Dans ce cas, F est une droite vectorielle. Donc F est stable par f si, et seulement si, F est engendré par une droite vectorielle.

Le calcul (je ne détaille pas) montre que $\chi_A = (X - 1)^2 \times (X + 1)$, $E_1(A) = \text{Vect}((1, 1, 0))$ et $E_{-1}(A) = \text{Vect}((1, -1, 0))$.

Ainsi, F est stable par f si, et seulement, $F = \text{Vect}((1, 1, 0))$ ou $F = \text{Vect}((1, -1, 0))$.

► Cas 4 : $\dim(F) = 2$. Dans ce cas, F est un plan vectoriel

Analyse. Supposons F stable par f .

On sait alors que χ_{f_F} divise χ_f . Or F est de dimension 2, donc $\deg(\chi_{f_F}) = 2$. Donc, $\chi_{f_F} = (X - 1)^2$ ou $\chi_{f_F} = (X - 1) \times (X + 1)$.

• Sous-cas 1 : $\chi_{f_F} = (X - 1) \times (X + 1)$.

Le polynôme caractéristique de f_F est scindé à racines simples, donc f_F est diagonalisable.

D'où $F = E_1(f_F) \oplus E_{-1}(f_F)$.

Or, $E_1(f_F) \subset E_1(f)$ et, $\dim(E_1(f_F)) = \dim(E_1(f)) = 1$ (1 est valeur propre simple de f_F). Donc, $E_1(f_F) = E_1(f)$.

De même, $E_{-1}(f_F) \subset E_{-1}(f)$ et, $\dim(E_{-1}(f_F)) = \dim(E_{-1}(f)) = 1$. Donc, $E_{-1}(f_F) = E_{-1}(f)$.

Donc, $F = \text{Vect}((1, 1, 0)) \oplus \text{Vect}((1, -1, 0))$

• Sous-cas 2 : $\chi_{f_F} = (X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de f_F est annulateur de f_F .

D'où, $0_{\mathcal{L}(F)} = (f_F - \text{Id}_F)^2 F = E_1(f_F) \oplus E_{-1}(f_F)$. Donc, $F = \text{Ker}((f_F - \text{Id}_F)^2)$.

Or,

$$x \in \text{Ker}((f_F - \text{Id}_F)^2) \Rightarrow (f - \text{Id}_F)^2(x) = 0 \Rightarrow f_F^2(x) - 2f_F(x) + x = 0 \Rightarrow f^2(x) - 2f(x) + x = 0 \Rightarrow (f - \text{Id}_E)^2(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}((f - \text{Id}_E)^2).$$

D'où, $F = \text{Ker}((f_F - \text{Id}_F)^2) \subset \text{Ker}((f - \text{Id}_E)^2)$.

$$\text{Or, } (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \text{Ker}((f - \text{Id}_E)^2) = \text{Ker}((A - I_3)^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y - z = 0\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 2)).$$

D'où, $\dim(F) = \dim(\text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 2))) = 2$.

Donc, $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 2))$

Synthèse. Les sous-espaces propres de f sont stables par f , donc $\text{Vect}((1, 1, 0)) \oplus \text{Vect}((1, -1, 0))$ est stable par f . De plus, $(f - \text{Id}_E)^2$ est un polynôme en f , donc commute avec f , donc $\text{Ker}((f - \text{Id}_E)^2) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 2))$ est stable par f .

Ainsi,

Les sous-espaces stables par f sont : $\{(0, 0, 0)\}$, $\text{Vect}((1, 1, 0))$, $\text{Vect}((1, -1, 0))$, $\text{Vect}((1, 1, 0)) \oplus \text{Vect}((1, -1, 0))$, $\text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 2))$ et F .

Diagonalisation (exercices pratiques)

Exercice 24 :

Diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Réponse

- A. On trouve : $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(6, -1)$.
- B. On trouve : $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(-3, 2)$.
- C. On trouve : $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(-2, 7)$.

Exercice 25 :

Diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Réponse

- A : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(0, 2, -2)$.
- B : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(-1, -3, 6)$.
- C : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(1+i, 1-i, 2)$.
- M. $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(0, 2, 2)$.
- N. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(0, 0, 2)$.

Exercice 26 :

Diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Réponse

- A. On trouve : $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(1, -1, 3, -3)$.

- B. On trouve : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(2, 2, 2, -2)$.
- C. On trouve : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -99 \\ 0 & 0 & 21 & 99 \\ 0 & 1 & -11 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(-5, 2, -4, -16)$.

Exercice 27 :

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 28 :

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Réponse

- On montre que la matrice A est diagonalisable et que $P^{-1} \times A \times P = D$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a : $A \times M = M \times A$ si, et seulement si, $D \times P^{-1} \times M \times P = P^{-1} \times M \times P \times D$.

Ne pas oublier de raisonner par équivalence pour trouver TOUTES les matrices qui commutent avec A .

- On montre que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales. Pour cela on écrit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et

on calcule $N \times D = D \times N$. On trouve que N commute avec D si, et seulement si, N est diagonale.

Ne pas oublier de raisonner par équivalence pour trouver TOUTES les matrices qui commutent avec D .

- Des deux points précédents, on déduit que : M commute avec A si, et seulement si, $D \times P^{-1} \times M \times P = P^{-1} \times M \times P \times D$ si, et seulement si, $P^{-1} \times M \times P$ est diagonale si, et seulement si, $P^{-1} \times M \times P \in \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est diagonale si, et seulement si, $M \in \text{Vect}(P \times E_{1,1} \times P^{-1}, P \times E_{2,2} \times P^{-1}, P \times E_{3,3} \times P^{-1})$.

- En notant $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A , on en déduit que $C(A) = \text{Vect}(P \times E_{1,1} \times P^{-1}, P \times E_{2,2} \times P^{-1}, P \times E_{3,3} \times P^{-1})$.

Donc, $C(A)$ est de dimension finie et sa dimension est inférieure à 3 (car on a trouvé une famille génératrice composée de 3 vecteurs)

- Les matrices I_3 , A et A^2 commutent avec A donc appartiennent à $C(A)$.

De plus, la famille (I_3, A, A^2) est libre (à vous de le vérifier en considérant une combinaison linéaire nulle). On en déduit que la dimension de $C(A)$ est supérieure à 3.

Donc, $C(A)$ est de dimension 3 et (I_3, A, A^2) est une famille libre composée de 3 vecteurs de $C(A)$.

Ainsi, $C(A) = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Exercice 29 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A .

2. Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 30 :

Discuter selon les valeurs de $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{C}^6$ la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & d \\ 0 & 1 & c & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Exercice 31 :

Soient a, b et c trois réels non nuls. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ \frac{1}{a} & 0 & b \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a, b et c , la matrice A est-elle diagonalisable?

Réponse

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^3 - 3X - \frac{c^2 + a^2 \times b^2}{a \times b \times c}$.

Variations de $x \mapsto \chi_A(x)$ (obtenues par étude du signe de la dérivée, qui ne dépend pas de a, b et c) :

- $x \mapsto \chi_A(x)$ est croissante sur $]-\infty, -1]$,
- $x \mapsto \chi_A(x)$ est décroissante sur $[-1, 1]$,
- $x \mapsto \chi_A(x)$ est croissante sur $[1, +\infty[$.
- $\chi_A(-1) = -\frac{(c - a \times b)^2}{a \times b \times c} \leq 0$ et $\chi_A(1) = -\frac{(c + a \times b)^2}{a \times b \times c} \leq 0$

Cas 1 : $c \neq a \times b$ et $c \neq -a \times b$.

Dans ce cas, les variations de $x \mapsto \chi_A(x)$ montrent que $x \mapsto \chi_A(x)$ ne s'annule qu'une fois en un certain $\lambda > 1$.

De plus, les racines de χ'_A sont -1 et 1 .

Donc, $\chi'_A(\lambda) \neq 0$ et λ est racine simple de χ_A .

On en déduit que χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cas 2 : $c = a \times b$. Dans ce cas, $\chi_A = X^3 - 3X - 2 = (X - 2) \times (X + 1)^2$.

Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$.

L'étude des dimensions des sous-espaces propres (utiliser le théorème du rang sauf pour les valeurs propres simples où on sait directement que la dimension du sous-espace propre associé est 1) montre que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cas 3 : $c = -a \times b$. Dans ce cas, $\chi_A = X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2 \times (X + 2)$.

Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$.

L'étude des dimensions des sous-espaces propres (utiliser le théorème du rang sauf pour les valeurs propres simples où on sait directement que la dimension du sous-espace propre associé est 1) montre que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $c = a \times b$ ou $c = -a \times b$.

Exercice 32 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable?

Réponse

On calcule le polynôme caractéristique : $\chi_A = (X - 2) \times (X^2 - aX + 2)$.

Son discriminant est $\Delta = a^2 - 8$.

► *Cas 1 : $a \in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$ (autrement dit : $\Delta < 0$).*

χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par contre, χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

► *Cas 2 : $\Delta = 0$.*

Sous-cas 1 : $a = 2\sqrt{2}$. Dans ce cas, $\chi_A = (X - 2) \times (X - \sqrt{2})^2$. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$. L'étude des dimensions des sous-espaces propres (utiliser le théorème du rang sauf pour les valeurs propres simples où on sait directement que la dimension du sous-espace propre associé est 1) montre que A n'est pas diagonalisable

Sous-cas 2 : $a = -2\sqrt{2}$. Dans ce cas, $\chi_A = (X-2) \times (X+\sqrt{2})^2$. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$. L'étude des dimensions des sous-espaces propres (utiliser le théorème du rang sauf pour les valeurs propres simples où on sait directement que la dimension du sous-espace propre associé est 1) montre que A n'est pas diagonalisable.

► *Cas 3 : $a \in]-\infty, -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}, +\infty[$ (autrement dit : $\Delta > 0$).*

χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, mais pas nécessairement à racines simples. Les racines (comptées avec multiplicité) de χ_A sont $2, \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}$ et $\frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}$.

Comme $\Delta > 0$, on a $\frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2} \neq \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}$.

De plus, l'équation $\frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2} = 2$ ne possède pas de solution.

De plus, $\frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2} = 2$ si, et seulement si, $a = 3$.

Sous-cas 1 : $a = 3$. Dans ce cas, $\chi_A = (X-2)^2 \times (X-1)$. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$. L'étude des dimensions des sous-espaces propres (utiliser le théorème du rang sauf pour les valeurs propres simples où on sait directement que la dimension du sous-espace propre associé est 1) montre que A est diagonalisable.

Sous-cas 2 : $a \neq 3$. Dans ce cas, χ_A est scindé à racines simples. Donc A est diagonalisable.

Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $a \in]-\infty, -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}, +\infty[$.

De plus, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $a \neq 2\sqrt{2}$ ou $a \neq -2\sqrt{2}$.

Exercice 33 :

On note $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : E \rightarrow E$

$$P \mapsto (X^2 - 1) \times P'' + (2X + 1) \times P'$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.

Réponse

Indications.

La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux sont distincts 2 à 2.

On en déduit que χ_u est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

Diagonalisation (exercices théoriques)

Exercice 34 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 35 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

Montrer que u est un projecteur si, et seulement si, $\text{tr}(u) = 1$.

Exercice 36 :

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_3$ et $A \neq I_3$.

1. Déterminer le spectre réel de A .
2. Déterminer le spectre complexe de A .

Réponse

1. Le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de A et les racines de $X^3 - 1$ sont $1, j$ et $\bar{j}$.

Donc, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1\}$.

De plus comme A est carrée d'ordre 3, χ_A est de degré 3.

Or, χ_A est unitaire, donc $\chi_A(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $\chi_A(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

De plus, $x \mapsto \chi_A(x)$ est continue (car polynomiale).

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, χ_A s'annule au moins un fois.

Donc, A possède une valeur propre réelle et cette valeur propre ne peut être que 1.

Donc,

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}.$$

2. Comme dans la question précédente, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, \bar{j}\}$.

De plus, $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - \bar{j})$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Par l'absurde, si 1 est la seule valeur propre de A , alors A est semblable à la matrice I_3 .

Or, la seule matrice semblable à I_3 est I_3 , donc, $A = I_3$. Contradiction.

Donc, j ou $\bar{j}$ est valeur propre de A .

Comme A est à coefficient réelle, si λ est valeur propre de A , alors $\bar{\lambda}$ est valeur propre de A (de même multiplicité).

Donc, j et $\bar{j}$ sont valeurs propres de A .

Ainsi,

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, j, \bar{j}\}.$$

Remarque : comme A est carrée d'ordre 3, A est semblable à $\text{diag}(1, j, \bar{j})$.

Exercice 37 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A^T = I_n$.

Montrer que A est diagonalisable.

Réponse

On transpose l'égalité de l'énoncé : $(A^T)^2 - A = I_n$. Or, $A^T = A^2 - I_n$. Donc,

$$I_n = (A^T)^2 - A = (A^2 - I_n)^2 - A = A^4 - 2A^2 - A + I_n.$$

On en déduit que $A^4 - 2A^2 - A = 0_n$. Donc, le polynôme $P = X^4 - 2X^2 - X = X \times (X - 1) \times \left(X - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \times \left(X - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

scindé à racine simple est annulateur de A .

Donc A est diagonalisable.

Exercice 38 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $u(M) = A \times M$.

1. Montrer que u est un automorphisme si, et seulement si, A est inversible.
2. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Réponse

1. ► On suppose que u est un automorphisme.

Dans ce cas, $\text{Im}(u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, u est surjectif). D'où, $I_n \in \text{Im}(u)$.

On en déduit qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $u(B) = I_n$. Donc, $A \times B = I_n$. Donc, A est inversible.

► Réciproquement, on suppose A inversible. On pose, $v : M \mapsto A^{-1} \times M$. On vérifie alors que $v \circ u = u \circ v = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
Donc, u est bijectif et est un endomorphisme. C'est donc un automorphisme.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u^n(M) = A^n \times M$.

Donc, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $(P(u))(M) = P(A) \times M$

► On suppose A diagonalisable.

Il existe alors P un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.

De plus, on a alors, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(P(u))(M) = P(A) \times M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Donc, P est annulateur de u . Comme P est scindé à racines simples, on en déduit que u est diagonalisable.

► Réciproquement, on suppose u , alors il existe P un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

De plus, on a alors, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(P(u))(M) = P(A) \times M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

En prenant $M = I_n$, il vient $P(A) = 0$.

Donc, P est annulateur de A . Comme P est scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.

Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 39 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = a \times M + \text{tr}(M).I_n$.

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de φ .
2. Déterminer le déterminant de φ .

Réponse

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\varphi^2(M) = \varphi(a \times M + \text{tr}(M).I_n) = a.\varphi(M) + \text{tr}(M).\varphi(I_n) = a.\varphi(M) + \text{tr}(M).(a.I_n + n.I_n) = a.\varphi(M) + (a+n).\text{tr}(M).I_n.$$

Or, $\text{tr}(M).I_n = \varphi(M) - a.M$, donc,

$$\varphi^2(M) = a.\varphi(M) + (a+n).(\varphi(M) - a.M) = (2a+n).\varphi(M) - a(a+n).I_n.$$

Donc,

$$P = X^2 - (2a+n).X + a(a+n) \text{ est annulateur de } \varphi.$$

2. On a $P = (X - (a+n))(X - a)$.

Donc, φ est annulateur de φ et est scindé à racines simples, donc, φ est diagonalisable et $\text{Sp}(\varphi) \subset \{a, a+n\}$.

Donc, $\det(\varphi)$ est le produit des valeurs propres de φ comptées avec multiplicité.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\varphi(M) = a.M \iff a.M + \text{tr}(M).I_n = a.M \iff \text{tr}(M).I_n = 0.$$

Comme $I_n \neq 0$,

$$\varphi(M) = a.M \iff \text{tr}(M) = 0.$$

Le noyau de la trace n'étant pas réduit à $\{0\}$, on en déduit que a est valeur propre de φ et $E_a(\varphi) = \text{Ker}(\text{tr})$.

De plus, comme a est diagonalisable, la multiplicité de a est $\dim(\text{Ker}(\text{tr})) = n^2 - 1$ (tr est une forme linéaire non nulle).

Comme φ est diagonalisable, $n^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim(E_\lambda(\varphi))$.

On en déduit que φ possède une seconde valeur propre dont la dimension du sous-espace propre associé est 1.

Or, la seule autre valeur propre de φ possible est $a+n$.

Donc, $a+n$ est valeur propre de φ de multiplicité 1 (cela ne sera pas utile mais I_n est un vecteur propre pour cette valeur propre et $E_{a+n}(\varphi) = \text{Vect}(I_n)$).

Donc,

$$\det(\varphi) = a^{n^2-1} \times (a+n).$$

Exercice 40 :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . On suppose que f possède n valeurs propres distinctes.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

Équations matricielles

Exercice 41 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -20 & -20 \\ 8 & -22 & -23 \\ -8 & 26 & 27 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Exercice 42 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 15 & 8 \\ -8 & 16 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$.

Réponse

1. On a $\chi_A = X \times (X-1) \times (X-8)$. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

Après calculs des différents sous espaces propres, on a : $D = P^{-1} \times A \times P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$M^3 = A \iff M^3 = P \times D \times P^{-1} \iff P^{-1} \times M^3 \times P = D \iff (P^{-1} \times M \times P)^3 = D.$$

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $N^3 = D$, alors N et D commutent (en effet, $N \times D = N^4 = D \times N$), donc (exercice 2), N est diagonale.

On cherche donc $P^{-1} \times M \times P$ sous la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. On a

$$M^3 = A \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^3 = D \iff \begin{cases} a^3 = 0 \\ b^3 = 1 \\ c^3 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$M^3 = A \iff P^{-1} \times M \times P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \iff M = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times P^{-1} \iff M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $M^3 = A$ est $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 43 :

1. Donner un polynôme annulateur (non nul) de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. Montrer que M est diagonalisable et donner les valeurs propres possibles de M .
3. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Réponse

1. **Méthode 1** : On remarque que $A^2 = 2A$. Donc, $X^2 - 2X = X(X - 2)$ est annulateur de A .

Méthode 2 : On $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1 = X^2 - 2X$. Par le théorème de Cayley-Hamilton χ_A est un polynôme annulateur de A .

2. On a : $A^2 = (M^2 + M)^2 = M^4 + 2M^3 + M^2$.

D'où,

$$0 = A^2 - 2A = M^4 + 2M^3 - M^2 - 2M.$$

Donc, $P = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X$ est annulateur de M .

En remarquant des racines évidentes, on a :

$$P = (X + 2)(X + 1)X(X - 1).$$

Donc, M est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc, par théorème, M est diagonalisable. D'autre part, $\text{Sp}(M) \subset \{-2, -1, 0, 1\}$.

3. ► Supposons M solution.

Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable : il existe P inversible telle que $A = P \text{diag}(0, 2) P^{-1}$.

D'où,

$$\text{diag}(0, 2) = P^{-1}AP = P^{-1}(M^2 + M)P = P^{-1}M^2P + P^{-1}MP = (P^{-1}MP)^2 + P^{-1}MP.$$

De plus,

$$\begin{aligned} P^{-1}MP \times \text{diag}(0, 2) &= P^{-1}MP \times ((P^{-1}MP)^2 + P^{-1}MP) \\ &= (P^{-1}MP)^3 + (P^{-1}MP)^2 \\ &= ((P^{-1}MP)^2 + P^{-1}MP) \times P^{-1}MP \\ &= \text{diag}(0, 2) \times P^{-1}MP. \end{aligned}$$

Donc, $P^{-1}MP$ et $\text{diag}(0, 2)$ commutent.

D'où (exercice 2), $P^{-1}MP$ est diagonale.

On note $P^{-1}MP = \text{diag}(\lambda, \mu)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On en déduit que :

$$\text{diag}(0, 2) = \text{diag}(\lambda^2 + \lambda, \mu^2 + \mu) Q^{-1}.$$

Donc, on a $\lambda^2 + \lambda = 0$ et $\mu^2 + \mu = 2$.

Donc, $M = P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1}$ où $\lambda \in \{-1, 0\}$ et $\mu \in \{-2, 1\}$.

► Réciproquement, on suppose que : $M = P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1}$ où $\lambda \in \{-1, 0\}$ et $\mu \in \{-2, 1\}$.

On a alors,

$$M^2 + M = (P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1})^2 + P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1} = P \text{diag}(\lambda^2 + \lambda, \mu^2 + \mu) P^{-1} = P \text{diag}(0, 2) P^{-1} = A.$$

► Ainsi, les solutions de l'équation sont les matrices $P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1}$ où $\lambda \in \{-1, 0\}$ et $\mu \in \{-2, 1\}$.

Exercice 44 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .

2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Réponse

Fait en classe. Étapes pour la question 2 :

- M commute avec ssi $P^{-1}MD$ commute avec D où P est une matrice inversible
- en déduire une famille génératrice de $C(A)$ (l'ensemble des matrices qui commutent avec A), puis majorer la dimension de $C(A)$.
- vérifier que (I_2, A) est une famille libre de $C(A)$, puis minorer la dimension de $C(A)$.
- Conclure

Matrices définies par blocs

Exercice 45 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme fixé.

1. Écrire par blocs la matrice $P(M)$ à l'aide de $P(A)$ et $P'(A)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 46 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 47 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Réponse

► On commence par traiter le cas $n = 1$. On s'intéresse à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\chi_B = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$. Le polynôme caractéristique de B est scindé à racines simples, donc B est diagonalisable et après calculs des sous-espaces propres, on trouve que $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} \times B \times P$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

► On s'inspire du cas $n = 1$ pour traiter le cas général. On pose $P = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$

On vérifie en faisant les calculs par blocs que $P \times Q = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$. Donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

De plus, toujours en effectuant les calculs par blocs, on a :

$$P^{-1} \times M \times P = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2A & 6A \\ A & 3A \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4A & 0_n \\ 0_n & 12A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}$$

► Supposons la matrice M diagonalisable. On sait qu'il existe $R = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ un polynôme scindé à racine simple annulateur de M .

D'où, $R(P^{-1} \times M \times P) = \sum_{k=0}^N a_k (P^{-1} \times M \times P)^k = \sum_{k=0}^N a_k P^{-1} \times M^k \times P = P^{-1} \times \left(\sum_{k=0}^N a_k M^k \right) \times P = P^{-1} \times R(M) \times P = 0_{2n}$.

D'un autre côté, on a : $R(P^{-1} \times M \times P) = \sum_{k=0}^N a_k \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^N a_k \begin{pmatrix} (-A)^k & 0_n \\ 0_n & (3A)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(-A) & 0_n \\ 0_n & R(3A) \end{pmatrix}$.

Donc, $R(-A) = 0_n$ et $R(3A) = 0_n$. Il existe donc un polynôme annulateur de $-A$ scindé à racines simples, donc $-A$ est diagonalisable. Donc, A est diagonalisable.

Remarque : en effet si $-A$ est semblable à D une matrice diagonale, alors A est semblable à la matrice diagonale $-D$.

Donc, si M est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Réciproquement, on suppose A diagonalisable. Il existe alors $P_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = P_1 \times D \times P_1^{-1}$. De plus, on a

$$\begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1 \times D \times P_1^{-1} & 0_n \\ 0_n & 3P_1 \times D \times P_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_n \\ 0_n & P_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans peine que $\begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_n \\ 0_n & P_1^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}$. Donc, $\begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_n \\ 0_n & P_1^{-1} \end{pmatrix}$.

Donc,

$$M = P \times \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} \times P^{-1} = P \times \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix}^{-1} \times P^{-1} = Q_1 \times \begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix} \times Q_1^{-1}$$

où $Q_1 = P \times \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

La matrice M est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix}$ qui est diagonale. Donc, M est inversible.

Donc, si A est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

Ainsi,

M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 48 :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Applications de la réduction

Exercice 49 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les puissances de A .

Exercice 50 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 , v_0 et w_0 pour que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes.

Exercice 51 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} + 4u_{n+2} + 5u_{n+1} + 2u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A \times X_n$.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 , u_1 , u_2 et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 52 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A \times B = B \times A$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B .
2. Montrer que $B = P(A)$ où $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.