

M5 : Moment cinétique

Table des matières

1 Observations préliminaires	1
1.1 Exemples introductifs	1
1.2 Notion intuitive de bras de levier	2
2 Moment cinétique d'un point matériel	2
2.1 Définition du moment cinétique	2
2.1.1 Moment cinétique par rapport à un point O	2
2.1.2 Moment cinétique par rapport à un axe orienté Δ	4
2.2 Cas du mouvement circulaire	4
2.3 Cas général en coordonnées cylindriques	5
3 Moment d'une force	5
3.1 Moment d'une force par rapport à un point	5
3.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté	5
3.3 Calcul en coordonnées cylindriques et notion de bras de levier	6
3.4 Cas où le moment d'une force est nul	7
4 Loi du moment cinétique pour un point matériel	7
4.1 Loi du moment cinétique par rapport à un point fixe	7
4.2 Cas de conservation du moment cinétique	8
4.3 Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe	8

1 Observations préliminaires

1.1 Exemples introductifs

Pour relier mouvement et actions mécaniques, le principe fondamental de la dynamique s'écrit naturellement à l'aide des forces. Cependant, dès que l'on s'intéresse à des situations de **rotation autour d'un axe**, la seule valeur de la force ne suffit plus : le point d'application et l'orientation de la force jouent un rôle déterminant.

Exemple : ouvrir une porte. Pour ouvrir efficacement une porte, on applique une force sur la poignée :

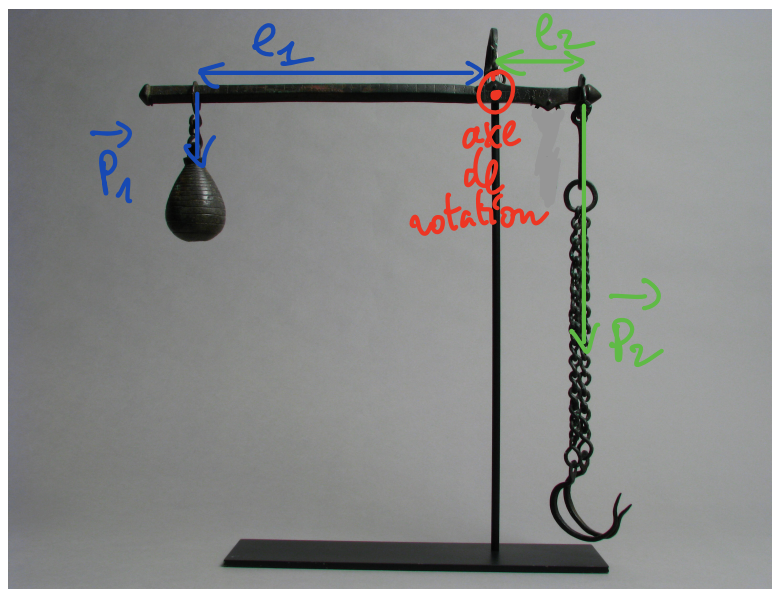
- le plus loin possible des gonds (axe de rotation) ;
- perpendiculairement à la porte.

Cette configuration maximise l'« effet de rotation » produit par la force.

Définition de la droite d'application d'une force

La **droite d'action** (ou droite d'application) d'une force est la droite passant par le point d'application de la force et **parallèle** au vecteur force.

On retrouve la même idée dans de nombreux objets usuels, par exemple dans la **balance romaine** : un même contrepoids peut équilibrer des masses différentes si l'on modifie la position du contrepoids le long du fléau gradué (figure 1). L'idée sous-jacente est l'augmentation (ou la diminution) du **bras de levier**.



à l'équilibre
 $P_2 l_2 = P_1 l_1$

Figure 1 – La balance romaine

1.2 Notion intuitive de bras de levier

Les exemples précédents montrent que, pour les rotations, la grandeur réellement pertinente n'est pas seulement la force mais le produit :

force $\times$ bras de levier

L'objectif du chapitre est d'introduire des grandeurs permettant de formaliser cette intuition : le **moment cinétique** et le **moment d'une force**, puis d'établir la loi qui relie leur évolution.

2 Moment cinétique d'un point matériel

2.1 Définition du moment cinétique

On considère un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On note sa quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

On introduit également un axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$, défini par un point O et un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ donnant le sens positif de l'axe.

2.1.1 Moment cinétique par rapport à un point O

Définition : moment cinétique par rapport à un point

Le **moment cinétique** (figure 2) de M par rapport à un point O est le vecteur :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}.$$

Sa norme s'exprime en $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$, unité équivalente à J s.

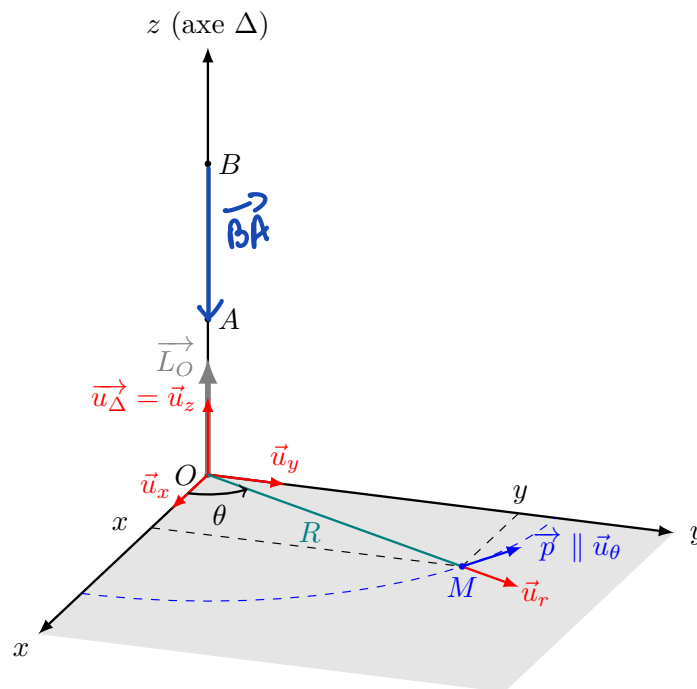


Figure 2 – Moment cinétique en coordonnées cylindriques pour un mouvement circulaire

Comme $\overrightarrow{L_O}$ est défini par un produit vectoriel, on a immédiatement :

$$\overrightarrow{LO} \perp \overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{LO} \perp \overrightarrow{v}$$

Propriétés géométriques

- Si le mouvement de M est **plan** et si O appartient au plan du mouvement, alors $\overrightarrow{LO}$ est **perpendiculaire** à ce plan à tout instant ; sa direction est donc fixe.
- Si le mouvement de M est **rectiligne** sur une droite passant par O , alors $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, d'où :

$$\vec{L}_O = \vec{0}$$

Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel il est calculé (ce point figure en indice). On établit la relation de changement de point ci-dessous.

Relation de changement de point

Soient deux points A et B . On écrit :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \quad (\text{Charles})$$

Alors :

$$\vec{L}_B \stackrel{\Delta}{=} \vec{BM} \wedge \vec{p} = (\vec{BA} + \vec{AM}) \wedge \vec{p} = \vec{BA} \wedge \vec{p} + \vec{AM} \wedge \vec{p}$$

Finalement :

$$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{BA} \wedge \vec{p}$$

2.1.2 Moment cinétique par rapport à un axe orienté Δ

Définition : moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ (figure 2) est la **projection** de $\vec{L}_O$ sur l'axe :

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = m \left(\vec{OM} \wedge \vec{v} \right) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Comme pour $\vec{L}_O$, cette grandeur dépend du référentiel et s'exprime en Js. En revanche, elle ne dépend pas du point choisi sur l'axe, mais seulement de la direction et de l'orientation de l'axe.

Indépendance du point choisi sur l'axe

Soient A et B deux points appartenant à l'axe Δ (figure 2). On a :

$$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{BA} \wedge \vec{p}$$

On projette sur $\vec{u}_\Delta$:

$$\vec{L}_B \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta + \underbrace{(\vec{BA} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{u}_\Delta}_0$$

Or $\vec{BA}$ est colinéaire à $\vec{u}_\Delta$, donc $\vec{BA} \wedge \vec{p}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_\Delta$ et le produit scalaire vaut zéro. Ainsi :

$$\vec{L}_B \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$

2.2 Cas du mouvement circulaire

On suppose que M décrit un cercle de centre O et de rayon R dans un plan perpendiculaire à l'axe (Oz) , en coordonnées cylindriques (figure 2) :

$$\vec{OM} = R \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$



On obtient alors :

$$\vec{L}_O = m \vec{OM} \wedge \vec{v} = m (R \vec{u}_r) \wedge (R \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m R^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

Donc :

$$L_{(Oz)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z = m R^2 \dot{\theta}$$

Remarque sur le sens de rotation

Le signe de $L_{(Oz)}$ permet d'identifier le sens de la rotation :

- $L_{(Oz)} > 0$: rotation dans le sens direct (sens des θ croissants)
- $L_{(Oz)} < 0$: rotation dans le sens indirect (sens des θ décroissants)

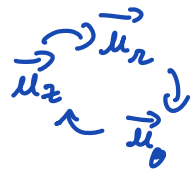
2.3 Cas général en coordonnées cylindriques

Plus généralement, si l'axe Δ est fixe et confondu avec (Oz) , on écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z.$$

Alors :

$$\vec{L}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z) \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z).$$



En développant et en utilisant $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z$, etc., on obtient :

$$\vec{L}_O = m \left(r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z + (-r\dot{z} + z\dot{r}) \vec{u}_\theta - zr\dot{\theta} \vec{u}_r \right)$$

La composante sur (Oz) vaut donc :

$$L_{(Oz)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z = mr^2 \dot{\theta}$$

3 Moment d'une force

3.1 Moment d'une force par rapport à un point

On considère une force $\vec{f}$ appliquée en un point M .

Définition : moment d'une force en un point

Le moment en O de la force $\vec{f}$ appliquée en M est le vecteur :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}.$$

Sa norme s'exprime en N m (même dimension qu'un joule).

Le moment des forces est une grandeur additive. En effet, si deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ s'appliquent en M :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_1 + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_2$$

Donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_2).$$

3.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Définition : moment d'une force par rapport à un axe

Le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ est la projection de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f})$ sur Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

3.3 Calcul en coordonnées cylindriques et notion de bras de levier

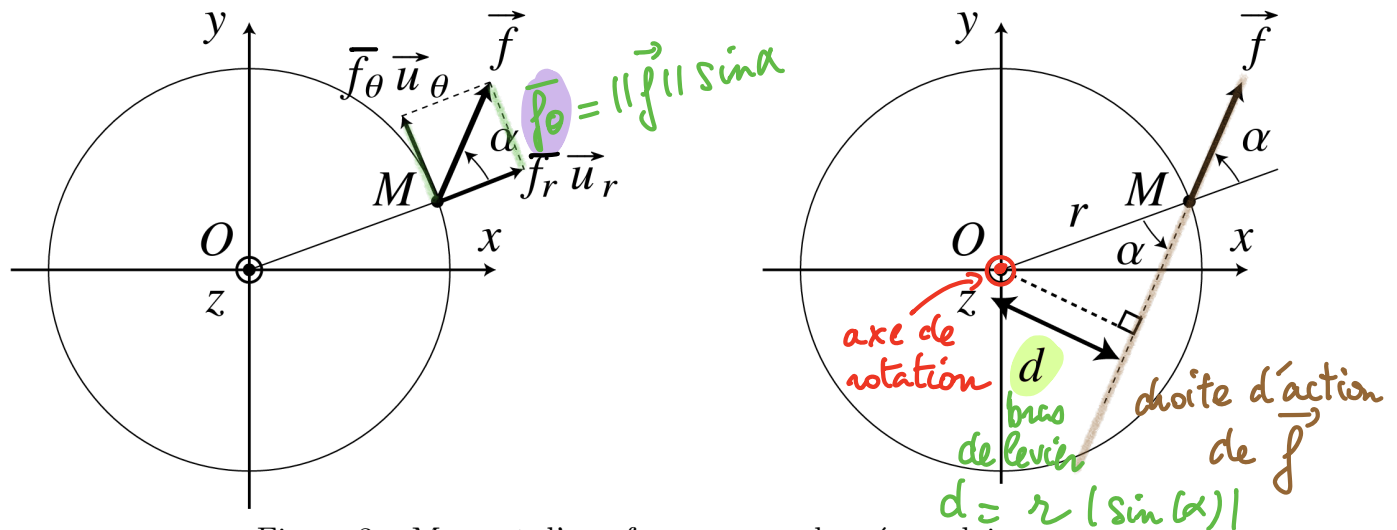


Figure 3 – Moment d'une force en coordonnées polaires

Si l'axe fixe est (Oz) , et si l'on repère M en coordonnées cylindro-polaires (figure 3) :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{f} = f_r \vec{u}_r + f_\theta \vec{u}_\theta + f_z \vec{u}_z$$

alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z) \wedge (f_r \vec{u}_r + f_\theta \vec{u}_\theta + f_z \vec{u}_z)$$

On obtient, pour la composante selon $\vec{u}_z$:

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) \cdot \vec{u}_z = r f_\theta \quad \leftarrow \text{algébrique} \quad f_\theta = \vec{f} \cdot \vec{u}_\theta$$

Dans le plan plan (Oxy) orthogonal à (Oz) , on peut également écrire :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = r f \sin \alpha \quad \text{et} \quad f = \|\vec{f}\|.$$

où α est l'angle entre $\vec{u}_r$ et $\vec{f}$.

Définition du bras de levier

On définit alors le **bras de levier** d comme la distance entre l'axe de rotation (Oz) et la droite d'action de la force.

La distance entre deux droites dans un espace à trois dimensions est la distance minimale entre ces deux droites. C'est la longueur du segment qui relie ces deux droites en restant perpendiculaire à chacune d'elles.

Géométriquement, on a $d = |r \sin \alpha|$, et donc :

$$|\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f})| = f d$$

Signe du moment

Le signe de $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f})$ peut être déterminé de deux manières :

- en étudiant le sens du projeté de $\vec{OM} \wedge \vec{f}$ sur l'axe orienté (Oz)
- ou en regardant le sens dans lequel la force tend à faire tourner M autour de l'axe :
sens direct $\Rightarrow \mathcal{M}_{(Oz)} > 0$, sens indirect $\Rightarrow \mathcal{M}_{(Oz)} < 0$

3.4 Cas où le moment d'une force est nul

Le moment $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})$ d'une force non nulle par rapport à un axe orienté Δ est nul dans deux situations :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) = 0 \iff \begin{cases} \vec{f} \parallel \vec{u}_{\Delta} \\ \text{ou la droite d'action de } \vec{f} \text{ coupe } \Delta \end{cases}$$

Dans le premier cas, $\vec{OM} \wedge \vec{f}$ est perpendiculaire à $\vec{f}$ donc à $\vec{u}_{\Delta}$: sa projection sur l'axe est nulle. Dans le second cas, le bras de levier est nul, donc le moment est nul.

4 Loi du moment cinétique pour un point matériel

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen. Le point est soumis à un ensemble de forces $\vec{f}_i$. On note O un point fixe, et on considère éventuellement un axe fixe Δ passant par O .

4.1 Loi du moment cinétique par rapport à un point fixe

Loi du moment cinétique en un point fixe O

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique de M en O (point fixe) est égale à la somme des moments des forces en O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) \\ &= \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p}}_{\vec{0}} \end{aligned}$$

Comme O est fixe, on a $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}$, et donc :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge (m\vec{v}) = \vec{0}$$

Il vient alors :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

En utilisant le principe fondamental de la dynamique $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i$, on obtient :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{OM} \wedge \vec{f}_i = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i)$$

4.2 Cas de conservation du moment cinétique

Loi de conservation du moment cinétique

Lorsque la somme des moments des forces par rapport à O est nulle le moment cinétique en O est constant au cours du temps :

$$\sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \vec{cst}$$

Le moment cinétique $\vec{L}_O$ est alors **conservé** au cours du temps, égal au moment cinétique initial.

En pratique, cette situation apparaît essentiellement dans deux cas :

- lorsque $\sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$ à tout instant (point isolé ou pseudo-isolé)
- lorsque la résultante des forces est une force **centrale** de centre O (droite d'action passant toujours par O)

4.3 Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Si l'axe (Oz) est fixe, on considère $L_{(Oz)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z$. En projetant la loi vectorielle sur l'axe, on obtient une loi scalaire :

Loi du moment cinétique projeté sur un axe fixe

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces projetés sur cet axe :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

Justification :

On écrit :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \vec{u}_z) = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_z$$

car $\vec{u}_z$ est constant au cours du temps (axe fixe). Avec la loi vectorielle :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i)$$

on obtient :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i) \cdot \vec{u}_z = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

Remarque

La loi projetée sur un axe est une **équation scalaire** : utilisée seule, elle ne permet de traiter que des problèmes à un degré de liberté. Pour des mouvements à plusieurs degrés de liberté, elle doit être complétée par une autre relation mécanique (par exemple une loi énergétique).