

Chapitre I

Espaces vectoriels

1. Structures vectorielles

La notion d'*espace vectoriel* naît conceptuellement de la géométrie affine avec l'introduction au XVII^e siècle des coordonnées dans un repère du plan ou de l'espace usuel. Les *vecteurs* sont introduits progressivement au cours de la première moitié du XIX^e siècle, et en 1857, Cayley introduit la notation *matricielle*, qui permet d'harmoniser les notations et de simplifier l'écriture des applications linéaires entre espaces vectoriels.

1.1 Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La structure d'*espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$ -espace vectoriel) a été décrite en première année : un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E dispose de deux opérations, une addition entre vecteurs et une multiplication entre un scalaire et un vecteur. On conviendra de noter 0_E le vecteur nul de E , pour éviter de le confondre avec le scalaire nul 0.

Lorsqu'on veut illustrer graphiquement un concept lié aux espaces vectoriels, on se réfère à la géométrie : à condition de fixer un point qui représentera par convention le vecteur nul, on peut identifier tout point du plan à un unique vecteur d'un espace vectoriel de dimension 2, ou tout point de l'espace à un vecteur d'un espace vectoriel de dimension 3 (illustration figure 1).

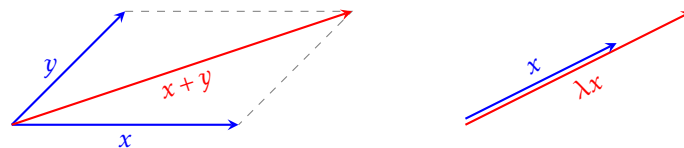


FIGURE 1 – Représentation graphique de l'addition et de la multiplication par un scalaire.

DÉFINITION. (Produit de deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels) — Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, on munit leur produit cartésien $E \times F$ d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel en définissant somme et produit externe de la façon suivante :

- (i) pour tout (x, y) et (x', y') dans $E \times F$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$;
- (ii) pour tout $(x, y) \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Cette définition s'étend naturellement au produit d'un nombre fini quelconque de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

■ Quelques exemples de référence

- Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ est l'espace vectoriel obtenu sur le produit cartésien $\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$, autrement dit sur l'ensemble des p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont éléments de $\mathbb{K}$;
- le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On conviendra d'identifier les espaces vectoriels $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, autrement dit de confondre le vecteur $(x_1, \dots, x_p)$

de $\mathbb{K}^p$ avec la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, un *sous-espace vectoriel* de E est une partie H non vide et stable par combinaison linéaire. H est alors lui aussi muni d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, ce qui justifie sa dénomination.

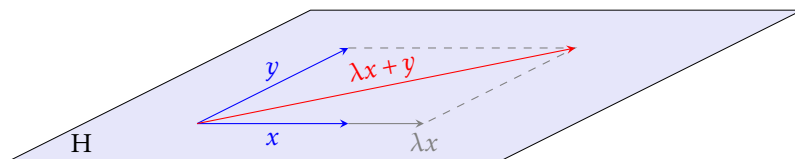


FIGURE 2 – Une représentation graphique en perspective d'un sous-espace vectoriel.

Pour prouver qu'une partie H est un sous-espace vectoriel de E , on utilise le plus souvent le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1 — H est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- (i) $0_E \in H$ (ou $H \neq \emptyset$);
- (ii) $\forall (x, y) \in H^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in H$.

Exercice 1

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. parmi les sous-ensembles suivants, indiquez ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E :

- a. L'ensemble des fonctions 1-périodiques;
- b. l'ensemble des fonctions croissantes;
- c. l'ensemble des fonctions monotones;
- d. l'ensemble des fonctions majorées;
- e. l'ensemble des fonctions bornées;
- f. l'ensemble des fonctions lipschitziennes.

PROPOSITION 1.2 — Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels. Alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

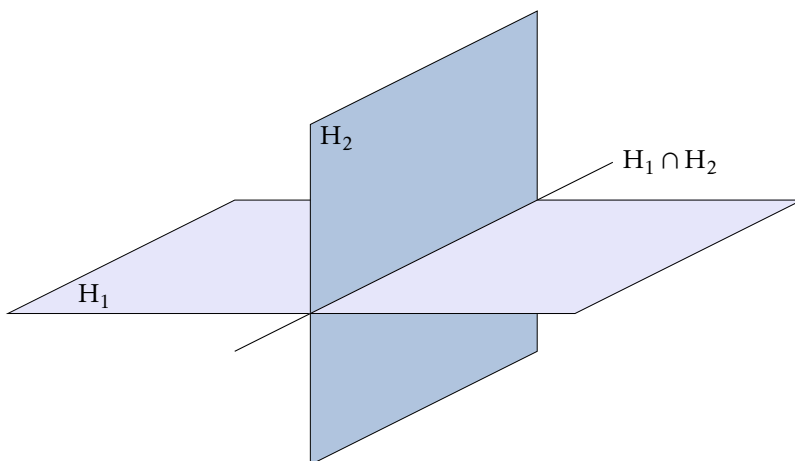


FIGURE 3 – L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Attention. En revanche, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas, sauf dans le cas trivial où l'un est inclus dans l'autre, un sous-espace vectoriel.

■ Familles génératrices d'un sous-espace vectoriel

DÉFINITION. — Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ une famille finie de vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{A}$ tout vecteur x pouvant s'écrire sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \quad \text{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

THÉORÈME 1.3 — L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{A}$ forme un sous-espace vectoriel de E , que l'on note $\text{Vect}(\mathcal{A})$ ou $\text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$. C'est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{A}$.

À l'inverse, on dira que la famille $\mathcal{A}$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\mathcal{A})$. Lorsqu'on parle de famille génératrice sans préciser le sous-espace vectoriel dont il est question, c'est qu'il s'agit d'une famille génératrice de l'espace E tout entier.

Remarque. $\text{Vect}(\mathcal{A})$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels contenant $\mathcal{A}$.

Remarque. Lorsque $\mathcal{A} = \{a\}$ est composé d'un seul vecteur, on peut écrire $\text{Vect}(a) = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ sous la forme plus concise : $\text{Vect}(a) = \mathbb{K}a$.

1.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Lorsque H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , on note

$$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in H_1 \text{ et } x_2 \in H_2\}.$$

PROPOSITION 1.4 — $H_1 + H_2$ est un sous-espace vectoriel. En outre, si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des parties génératrices respectivement de H_1 et H_2 , $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est une partie génératrice de $H_1 + H_2$.

En d'autres termes, $H_1 + H_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant H_1 et H_2 .

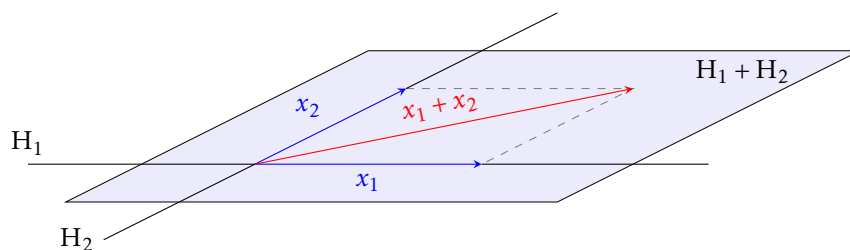


FIGURE 4 – La somme de deux droites vectorielles est en général un plan.

Tout vecteur x de $H_1 + H_2$ peut donc se décomposer sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$, mais cette décomposition est-elle unique ? Le résultat suivant a pour objet de répondre à cette question.

PROPOSITION 1.5 — Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Il y a équivalence entre :

- (i) $\forall x \in H_1 + H_2, \quad \exists!(x_1, x_2) \in H_1 \times H_2 \mid x = x_1 + x_2$
- (ii) $H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$

Autrement dit, pour qu'il y ait unicité de la décomposition, il faut et il suffit que $H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$. On dit dans ce cas que la somme $H_1 + H_2$ est directe, et on la note : $H_1 \oplus H_2$.

Pour finir, notons que de cette notion de somme de deux sous-espaces vectoriels découle la notion de sous-espaces supplémentaires :

DÉFINITION. — Lorsque H_1 et H_2 vérifient : $E = H_1 \oplus H_2$, on dit que ces deux sous-espaces sont supplémentaires.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On note H_1 l'ensemble des fonctions constantes et H_2 l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Montrer que H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

L'exemple de la division euclidienne

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$; il s'agit d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si M est un polynôme non nul, l'ensemble des multiples de M , noté : $M.\mathbb{K}[X] = \{MQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En posant $n = \deg M$, l'identité de la division euclidienne affirme pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ l'existence d'un *unique* couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$P = MQ + R \quad \text{et} \quad \deg R \leq n - 1.$$

Autrement dit, tout polynôme P se décompose de manière unique comme somme d'un polynôme $MQ \in M.\mathbb{K}[X]$ et d'un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Ainsi, les sous-espaces vectoriels $M.\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$. On peut donc écrire $\mathbb{K}[X] = M.\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ lorsque $n = \deg M$.

■ Projections vectorielles

Considérons deux sous-espaces vectoriels supplémentaires H_1 et H_2 de E : $E = H_1 \oplus H_2$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On définit l'application $p : E \rightarrow E$ qui à tout $x \in E$ associe $p(x) = x_1$; il s'agit de la *projection vectorielle* sur H_1 *parallèlement à* H_2 .

On a $H_1 = \text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $H_2 = \text{Ker } p$ donc on peut écrire : $E = \text{Ker } p \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.

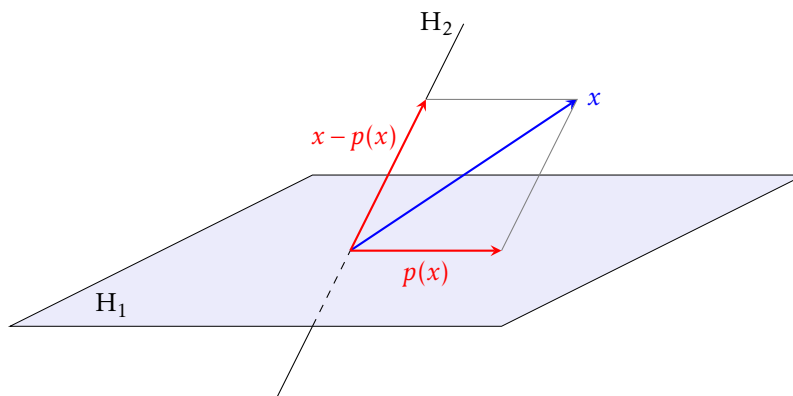


FIGURE 5 – La projection sur H_1 parallèlement à H_2 .

Remarque. Si p est la projection vectorielle sur H_1 parallèlement à H_2 , alors $\text{Id}_E - p$ est la projection sur H_2 parallèlement à H_1 .

THÉORÈME 1.6 — Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, p est la projection sur $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Exercice 3

On considère deux projections p et q d'un même espace vectoriel E . Montrer que $\text{Im } p = \text{Im } q$ si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

Donner une condition analogue pour caractériser l'égalité $\text{Ker } p = \text{Ker } q$.

■ Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels

Si $H_1, \dots, H_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E , on peut définir de manière analogue leur somme :

$$H_1 + H_2 + \dots + H_p = \{x_1 + x_2 + \dots + x_p \mid x_i \in H_i, 1 \leq i \leq p\}.$$

Lorsque la décomposition d'un vecteur $x \in H_1 + H_2 + \dots + H_p$ est unique, on dira que cette somme est *directe*, et on la notera $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_p$.

Comment caractériser une somme directe ? Pour répondre à cette question, on peut adopter une démarche récursive en écrivant : $x = \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1})}_{\in H_1 + H_2 + \dots + H_{p-1}} + \underbrace{x_p}_{\in H_p}$

Ainsi, la somme est directe si et seulement si les sommes $H = H_1 + H_2 + \dots + H_{p-1}$ et $H + H_p$ sont directes. Cela conduit au résultat suivant :

THÉORÈME 1.7 — La somme $H_1 + H_2 + \dots + H_p$ est directe si et seulement si :

- (i) la somme $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{p-1}$ est directe ;
- (ii) $(H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{p-1}) \cap H_p = \{0_E\}$.

Attention. Il n'existe pas de critère simple pour vérifier qu'une somme de $n \geq 3$ sous-espaces vectoriels est directe. Ou bien on justifie l'unicité de la décomposition directement, ou bien on procède récursivement à l'aide du résultat précédent. Par exemple, pour prouver qu'une somme $H_1 + H_2 + H_3$ est directe il faut prouver successivement les deux égalités : $H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$ puis $(H_1 \oplus H_2) \cap H_3 = \{0_E\}$.

■ Famille de projecteurs associée à une somme directe

Considérons maintenant une famille $(H_1, \dots, H_n)$ de sous-espaces vectoriels vérifiant : $E = \bigoplus_{k=1}^n H_k$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique : $x = \sum_{k=1}^n x_k$, avec $x_k \in H_k$. On peut donc définir les endomorphismes $p_k : x \mapsto x_k$ pour $1 \leq k \leq p$. Ainsi, p_k est la projection vectorielle sur H_k parallèlement à $\bigoplus_{i \neq k} H_i$.

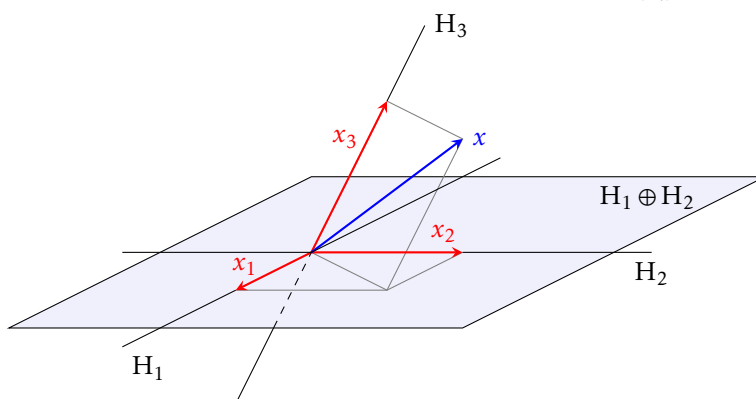


FIGURE 6 — x_3 est la projection sur H_3 parallèlement à $H_1 \oplus H_2$.

■ Familles libres

DÉFINITION. — Une famille finie $(a_1, \dots, a_n)$ de vecteurs non nuls de E est dite libre lorsque la somme $\mathbb{K}a_1 + \dots + \mathbb{K}a_n$ est directe, c'est à dire lorsque tout vecteur x appartenant à cette somme se décompose de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i.$$

On dit encore que les vecteurs $a_1, \dots, a_n$ sont linéairement indépendants. Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Il existe essentiellement trois manières de prouver la liberté d'une famille de vecteurs : on peut bien entendu recourir à la définition en justifiant l'unicité de la décomposition, ou utiliser l'un des deux résultats suivants.

PROPOSITION 1.8 — La famille $(a_1, \dots, a_n)$ est libre si et seulement si elle vérifie la propriété :

$$(i) \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose l'existence d'un vecteur $x \in E$ et d'un entier n tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ et $f^n(x) = 0_E$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.

Le second résultat adopte une approche récursive :

PROPOSITION 1.9 — Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une famille libre, et $a_{n+1} \in E$. Alors $(a_1, \dots, a_{n+1})$ est libre si et seulement si $a_{n+1} \notin \text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$.

Autrement dit, pour prouver que la famille $(a_1, \dots, a_n)$ est libre il suffit de prouver que $(a_1, \dots, a_{n-1})$ est libre puis que a_n n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $a_1, \dots, a_{n-1}$.

Exercice 5

On considère n réels ordonnés $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ ainsi que les fonctions $f_i = x \mapsto e^{\alpha_i x}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Prouver par récurrence que les fonctions $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ forment une famille libre.

1.4 Bases d'un espace vectoriel

DÉFINITION. — Une base $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre et génératrice de E , c'est à dire lorsque tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p.$$

On a donc dans ce cas : $E = \mathbb{K}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_p$.

Ainsi, le caractère *générateur* de la famille (e) traduit l'existence de la décomposition de tout vecteur de E , le caractère *libre*, l'unicité de cette décomposition.

Remarque. Les liens entre base et décomposition de l'espace en somme directe sont profonds : si on dispose d'une décomposition de E en somme directe $E = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_p$, on obtient une base de (e) en réunissant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels $H_1, H_2, \dots, H_p$.

Plus formellement, si $(e_1, \dots, e_{i_1})$ est une base de H_1 , $(e_{i_1+1}, \dots, e_{i_2})$ une base de H_2 , $\dots$, $(e_{i_{p-1}+1}, \dots, e_p)$ une base de H_p , alors $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E . Une telle base sera dite *adaptée* à la décomposition en somme directe $E = H_1 \oplus \dots \oplus H_p$.

À l'inverse, à partir d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E on peut obtenir une décomposition en somme directe de E en fractionnant cette base. Si on considère par exemple un entier $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et si on pose $H_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $H_2 = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$ on obtient une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces supplémentaires $E = H_1 \oplus H_2$.

■ Dimension d'un espace vectoriel

Dans le cours de première année a été prouvé un résultat important : si un espace vectoriel contient une base de cardinal fini, toutes les autres bases ont même cardinal, appelé dimension de l'espace vectoriel.

Les conséquences de ce résultat sont nombreuses, et en particulier :

PROPOSITION 1.10 — Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p , toute famille libre (respectivement génératrice) de cardinal p est une base.

En outre, toute famille génératrice contient au moins p éléments, et toute famille libre contient au plus p éléments.

THÉORÈME 1.11 (de la base incomplète) — Soit (e) une famille libre et (g) une famille génératrice d'un espace vectoriel E . Alors il existe une base (b) telle que $(e) \subset (b) \subset (e \cup g)$. Autrement dit, on peut « compléter » une famille libre par certains éléments d'une famille génératrice pour former une base.

Cet énoncé possède une version simplifiée (en prenant pour (g) l'ensemble des vecteurs de E , puis en prenant pour (e) l'ensemble vide) :

COROLLAIRE — Toute famille libre peut être complétée pour former une base de E (théorème de la base incomplète); de toute famille génératrice on peut extraire une base de E (théorème de la base extraite).

Une application fréquente du théorème de la base incomplète consiste, à partir d'une base $(e_1, \dots, e_k)$ d'un sous-espace vectoriel H de E , à compléter celle-ci pour obtenir une base $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p)$ de E . Une telle base est dite *adaptée* à H .

PROPOSITION 1.12 — Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, il en est de même de $E \times F$, et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

COROLLAIRE — On en déduit par une récurrence immédiate que si $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, il en est de même de $E_1 \times \dots \times E_k$, et $\dim(E_1 \times \dots \times E_k) = \sum_{i=1}^k \dim E_i$.

PROPOSITION 1.13 (Formule de Grassmann) — Si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.

Il existe une formule qui généralise la formule de Grassmann au cas d'une somme de k sous-espaces vectoriels, mais elle est trop compliquée pour être utilisable en pratique. On se contentera donc du résultat suivant :

PROPOSITION 1.14 — Si $H_1, \dots, H_k$ sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies, il en est de même de leur somme, et $\dim\left(\sum_{i=1}^k H_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \dim H_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Remarque. Ceci donne un moyen alternatif pour prouver qu'une somme est directe, pour peu qu'on sache calculer la dimension de la somme.

■ Représentation matricielle des vecteurs en dimension finie

Matrice associée à un vecteur

Étant donnée une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E , l'application : $\phi : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow E$ qui à une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ associe le vecteur $\sum_{k=1}^p x_k e_k$ est un isomorphisme. Pour tout $x \in E$, $X = \phi^{-1}(x)$ est la *matrice des composantes* de x dans la base (e) , et sera notée : $X = \text{Mat}_e(x)$.

Matrice associée à une famille de vecteurs

Si $(x_1, \dots, x_k)$ est une famille de vecteurs de E et $X_1, \dots, X_k$ les matrices colonnes associées à ces vecteurs dans la base (e) , on appelle *matrice associée* à la famille $(x_1, \dots, x_k)$ dans la base (e) la matrice $A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K})$ formée des colonnes $X_1, \dots, X_k$:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1 & \dots & X_k \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_j & \dots & x_k \end{pmatrix}$$

Le *rang* de la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent ; on a donc $\text{rg}(x_1, \dots, x_k) = \text{rg}(X_1, \dots, X_k) = \text{rg } A$.

Exemple. Considérons $E = \mathbb{R}^4$ et notons (e) la base canonique. Définissons les quatre vecteurs :

$$a = (1, 2, 3, 4), \quad b = (1, 1, 1, 3), \quad c = (2, 1, 1, 1), \quad d = (3, 1, 0, 3)$$

et posons $H = \text{Vect}(a, b, c, d)$. Quelle est la dimension de H ? Pour répondre à cette question, posons $A = \text{Mat}_{(e)}(a, b, c, d)$ et calculons $\text{rg}(A)$ en appliquant la méthode de Gauss-Jordan sur les colonnes de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On réalise les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1$:

$$\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

Réalisons maintenant les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 - 5C_2$:

$$\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Et enfin l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$:

$$\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de dimension $\text{rg } A = 3$, et la famille (a, b, c, d) est une famille génératrice qui n'est pas libre : il ne s'agit pas d'une base.

Pourquoi avoir agi sur les colonnes plutôt que sur les lignes¹ ? La matrice A est la matrice de quatre vecteurs de H ; toute combinaison linéaire de ces vecteurs donne de nouveaux vecteurs de H . Ainsi, *réaliser des opérations élémentaires sur les colonnes de A crée de nouvelles familles de vecteurs de H sans en modifier le rang*. Les vecteurs qui apparaissent dans la matrice finale sont donc toujours des vecteurs générateurs de H , mais cette fois les trois premiers forment une famille libre, et donc une base de H : la famille (a, b', c') avec $b' = (0, -1, -2, -1)$ et $c' = (0, 0, 1, -4)$ est une base de H .

1. Rappelons que les opérations élémentaires sur les lignes comme sur les colonnes ne modifient pas le rang.

Exercice 6

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n , ainsi que la famille de vecteurs $(P_0, \dots, P_n)$ définie par : $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Quelle forme particulière prend la matrice associée à la famille (P) dans la base canonique ? En déduire que (P) est une base de E .

Par un raisonnement analogue, prouver que toute famille de polynômes $(Q_0, \dots, Q_n)$ vérifiant $\deg Q_k = k$, $0 \leq k \leq n$, est une base de E .

Matrice de passage entre deux bases

Considérons un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie p , et (e) et (e') deux bases. Nous qualifierons la base (e) d'*ancienne base*, et (e') de *nouvelle base*.

Étant donné un vecteur $x \in E$, on souhaite exprimer ses nouvelles coordonnées $X' = \text{Mat}_{(e')}(x)$ en fonction de ses anciennes coordonnées $X = \text{Mat}_{(e)}(x)$.

On suppose connaître l'expression des vecteurs de la nouvelle base (e') dans l'ancienne base (e) :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad e'_j = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} e_i$$

ce qui revient à considérer la matrice $P = \text{Mat}_e(e'_1, \dots, e'_p) = (\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On dit que P est la *matrice de passage* de (e) vers (e') .

THÉORÈME 1.15 (formule de changement de base) — La matrice $P = \text{Mat}_e(e')$ est une matrice inversible, et la formule de changement de base s'exprime sous la forme : $X' = P^{-1}X$.

Remarque. De l'égalité $X = PX' = (P^{-1})^{-1}X'$ il résulte que P^{-1} est la matrice de passage de (e') vers (e) .

2. Applications linéaires

2.1 Rappels

Une application linéaire est une application entre deux espaces vectoriels qui respecte l'addition des vecteurs et la multiplication scalaire, ou, en d'autres termes, qui préserve les combinaisons linéaires. On adoptera donc la définition suivante :

DÉFINITION. — Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et $u : E \rightarrow F$ une application. On dit que u est linéaire lorsque : $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications linéaires de E vers F ; si E et F sont de dimensions finies, la dimension de cet espace vectoriel est égal à $\dim E \times \dim F$.

Enfin, lorsque $F = E$ on notera $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, et les éléments de $\mathcal{L}(E)$ seront appelés des *endomorphismes*.

■ Matrice associée à une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p , et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E , et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

À une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on associe la matrice $A = \text{Mat}_f(u(e_1), \dots, u(e_p))$ (la matrice des composantes des vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_p)$ dans la base (f)), matrice que l'on note $\text{Mat}_{e,f}(u)$. On a donc :

$$A = \text{Mat}_{e,f}(u) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f_1 & & & f_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

→ coordonnées de $u(e_j)$ dans la base (f)

$u(e_1) \quad \dots \quad u(e_j) \quad \dots \quad u(e_p)$

Remarque. L'application $\phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par $\phi(u) = \text{Mat}_{e,f}(u)$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; c'est ce résultat qui permet de justifier sans peine que $\dim \mathcal{L}(E, F) = np = \dim E \times \dim F$.

Exercice 7

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On pose $\mathcal{H} = \{v \in \mathcal{L}(F, E) \mid v \circ u = 0\}$.

Soit $v \in \mathcal{H}$. Quelle particularité possède la matrice associée à v dans une base adaptée à $\text{Im } u$? En déduire l'expression de $\dim \mathcal{H}$ en fonction des dimensions de E et de F et du rang de u .

L'application d'une application linéaire à un vecteur est lié au produit matriciel par le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 — Si $x \in E$, on pose $X = \text{Mat}_e(x)$ et $Y = \text{Mat}_f(u(x))$. Alors $Y = AX$.

Formule de changement de base pour les applications linéaires

Soient (e') et (f') deux nouvelles bases, respectivement de E et F . On note $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ la matrice de passage de (e) vers (e') et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de (f) vers (f') .

On note $A' = (a'_{ij}) = \text{Mat}_{e',f'}(u)$ la matrice associée à l'application linéaire u dans les nouvelles bases (e') et (f') .

On souhaite exprimer A' en fonction de A , matrice associée à u dans les anciennes bases (e) et (f) .

La matrice associée à $u(x)$ est égale à AX dans la base (f) , et à $A'X'$ dans la base (f') . Des formules de changement de base pour les vecteurs on déduit que : $A'X' = Q^{-1}AX$. Or $X' = P^{-1}X$, donc : $A'P^{-1}X = Q^{-1}AX$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on en déduit que $A'P^{-1} = Q^{-1}A$, soit : $A' = Q^{-1}AP$.

Exemple. On pose $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathbb{R}^3$, on note (e) et (f) les bases canoniques respectivement de E et F , et on considère l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par $\text{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$. On souhaite obtenir la matrice $A' = \text{Mat}_{e',f'}(u)$ relative aux changements de bases définis par :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = 4e_1 + e_2 - 3e_4 \\ e'_4 = -7e_1 + e_3 + 5e_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f'_1 = 4f_1 + 2f_2 + f_3 \\ f'_2 = 5f_1 + f_2 - f_3 \\ f'_3 = f_3 \end{cases}$$

Pour obtenir A' nous avons deux possibilités :

(i) définir les matrices $P = \text{Mat}_{(e)}(e') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q = \text{Mat}_{(f)}(f') = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et calculer $Q^{-1}AP$;

(ii) exprimer directement les vecteurs $u(e'_i)$ dans la base (f') .

La première méthode s'avère longue en calcul ; elle ne sera quasiment jamais employée.

La seconde méthode peut s'avérer elle aussi fastidieuse, sauf si les vecteurs (e') et (f') ont été judicieusement choisis, ce qui s'avérera en général le cas.

Et en effet :

$$\begin{aligned} u(e'_1) &= u(e_1) = f'_1 & u(e'_3) &= 4u(e_1) + u(e_2) - 3u(e_4) = 0_E \\ u(e'_2) &= u(e_2) = f'_2 & u(e'_4) &= -7u(e_1) + u(e_3) + 5u(e_4) = 0_E \end{aligned}$$

donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{e',f'}(u)$ et on peut affirmer que $A = QA'P^{-1}$ sans avoir besoin de réaliser le calcul.

Le théorème 2.4 permettra d'expliquer la façon dont ont été choisies les bases (e') et (f') .

Formule de changement de base pour les endomorphismes

Il s'agit d'un cas particulier du précédent, avec : $F = E$, $(f) = (e)$, $(f') = (e')$. On obtient : $A' = P^{-1}AP$.

Deux matrices A et A' liées par une relation de ce type sont dites *semblables*. Garder toujours à l'esprit que deux matrices semblables sont deux matrices qui peuvent être associées au même endomorphisme, mais exprimées dans des bases différentes.

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \diagdown & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables, puis calculer explicitement une matrice P vérifiant $A = PTP^{-1}$.

■ Trace d'un endomorphisme

DÉFINITION. — On appelle trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le scalaire : $\text{tr } A = \sum_{i=1}^p a_{ii}$, c'est à dire la somme des éléments diagonaux de cette matrice.

On définit ainsi une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre p , autrement dit une application linéaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. Cette forme linéaire va pouvoir à son tour être définie sur l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie grâce au résultat suivant, et surtout son corollaire :

PROPOSITION 2.2 — Si $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2$ on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

COROLLAIRE — Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ alors $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr } A$.

Du corollaire précédent on déduit que si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_e(u)$, alors $\text{tr } A$ ne dépend pas du choix de la base (e) . On peut donc définir la trace de u par l'intermédiaire de la trace d'une matrice associée à A dans une base quelconque :

DÉFINITION. — Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E , on appelle trace de u la trace de la matrice $\text{Mat}_e(u)$, où (e) est une base quelconque de E .

L'application $u \mapsto \text{tr } u$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, autrement dit une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{K}$. De la proposition 2.2 il résulte :

COROLLAIRE — Si u et v sont deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , alors $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.

Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Il s'agit bien entendu de la base $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ formée des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf un, égal à 1 :

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{1} \text{ à la position } (i,j) \end{matrix}$$

Il est bon de connaître la formule donnant le produit de deux matrices de cette forme ; c'est le résultat suivant :

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{j,k}E_{il}.$$

où $\delta_{j,k}$ désigne le *symbole de Kronecker* : $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$.

Exercice 9

En utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, prouver que toute forme linéaire $\phi : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2, \phi(AB) = \phi(BA)$ est proportionnelle à la trace.

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

Nous allons maintenant nous intéresser aux liens qui existent entre sous-espaces vectoriels et applications linéaires.

PROPOSITION 2.3 — Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire, H_1 et H_2 des sous-espaces vectoriels respectivement de E et F . Alors $u(H_1)$ et $u^{-1}(H_2)$ sont respectivement des sous-espaces vectoriels de F et de E .

Attention. Attention à la notation $u^{-1}(H_2)$, qui pourrait faire croire à tort que u est supposée bijective. Il n'en est rien, il s'agit de la notion d'*image réciproque* définie par :

$$u^{-1}(H_2) = \{x \in E \mid u(x) \in H_2\}.$$

Exemples. En appliquant cette propriété aux sous-espaces vectoriels $H_1 = E$ et $H_2 = \{0_F\}$, on définit *image* et *noyau* d'une application linéaire :

$\text{Im } u = u(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel que } u(x) = y\}$ est un sous-espace vectoriel de F (l'*image* de u) ;

$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E (le *noyau* de u).

Rappelons que ces deux sous-espaces vectoriels permettent de caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire :

$$u \text{ est injective si et seulement si } \text{Ker } u = \{0_E\}, \text{ et } u \text{ est surjective si et seulement si } \text{Im } u = F.$$

Remarque. Ces notions de noyau et d'image interviennent dans la résolution d'un système linéaire du type : $u(x) = y$, d'inconnue $x \in E$:

cette équation possède une solution si et seulement si $y \in \text{Im } u$, et dans ce cas, l'ensemble des solutions prend la forme $\{x_0 + h \mid h \in \text{Ker } u\}$, où x_0 est une solution particulière quelconque.

DÉFINITION. — Lorsque u est bijective, l'application u^{-1} est aussi linéaire. On dit alors que u est un isomorphisme, et que E et F sont des espaces vectoriels isomorphes.

Lorsqu'ils sont de dimensions finies, deux espaces isomorphes sont de même dimension.

Nous allons maintenant aborder un théorème très important, qui lie image et supplémentaire du noyau. Il s'agit du résultat suivant :

THÉORÈME 2.4 (Théorème du rang - forme géométrique) — Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, et H un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E . Alors la restriction de u à H réalise un isomorphisme entre H et $\text{Im } u$.

En d'autres termes, l'application $u_H : \begin{pmatrix} H & \longrightarrow & \text{Im } u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.

Remarque. Lorsque E et F sont de dimensions finies, considérons une base $(e_1, \dots, e_r)$ de H et une base $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\text{Ker } u$. On obtient ainsi une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ de E . Le théorème précédent nous permet d'affirmer que $(f_1 = u(e_1), \dots, f_r = u(e_r))$ est une base de $\text{Im } u$, que l'on peut compléter pour former une base $(f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ de F . La matrice associée à u pour les bases (e) et (f) est alors la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & \cdots & & 0 & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

Notons que l'exemple donné en page 10 illustre ce résultat.

COROLLAIRE (Théorème du rang) — Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont de dimension finie, et :

$$\dim E = \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Im } u).$$

COROLLAIRE — Si F est de dimension finie et si $\dim E = \dim F$, alors :

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}.$$

En particulier, pour les endomorphismes en dimension finie, injectivité, surjectivité et bijectivité sont des notions équivalentes.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer, en appliquant le théorème du rang à la restriction de u à $\text{Im } v$, que : $\text{rg}(u \circ v) \geq \text{rg } u + \text{rg } v - \dim E$.

En déduire que $\dim(\text{Ker } u^2) \leq 2 \dim(\text{Ker } u)$.

■ Application à l'interpolation de Lagrange

En analyse numérique, l'interpolation est une opération mathématique consistant à déterminer une fonction à partir de la donnée d'un nombre fini de valeurs, et vérifiant éventuellement certaines propriétés supplémentaires.

Dans le cas particulier de l'interpolation de Lagrange on considère un entier $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts, et $y_0, \dots, y_n$ des scalaires quelconques. Le problème consiste à déterminer le ou les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ (s'ils existent) vérifiant : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_k) = y_k$, et si possible de degré minimal.

Considérons l'application linéaire $u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad u(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n)).$$

Si on note $y = (y_0, \dots, y_n)$, il s'agit de résoudre le système linéaire : $u(P) = y$, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

LEMME — Le noyau de u est constitué des multiples du polynôme $N = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$.

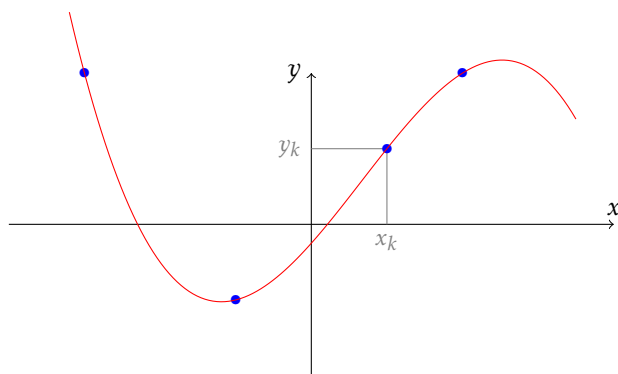


FIGURE 7 – Un polynôme de degré trois passant par quatre points d'interpolation.

Sachant que $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de $N \cdot \mathbb{K}[X]$ (principe de la division euclidienne par N), on en déduit que u réalise un isomorphisme entre $\mathbb{K}_n[X]$ et l'image de u . Mais alors $\dim(\text{Im } u) = n + 1$, et puisque $\text{Im } u \subset \mathbb{K}^{n+1}$ on a $\text{Im } u = \mathbb{K}^{n+1}$. Autrement dit, u est un endomorphisme surjectif, et :

THÉORÈME 2.5 — Il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_k) = y_k$.

Nous venons donc de démontrer que le problème de l'interpolation de Lagrange possède une unique solution P_L de degré inférieur ou égal à N ; les autres solutions s'écrivent : $P = P_L + N \cdot Q$, où Q est un polynôme quelconque. Mais tout ceci ne nous dit pas comment calculer P_L . Pour ce faire, nous allons introduire une nouvelle base de $\mathbb{K}_n[X]$, la base des *polynômes d'interpolation de Lagrange*, dans laquelle l'expression de P_L sera très simple.

THÉORÈME 2.6 — Posons pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$. Ces polynômes forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$

pour laquelle : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{k=0}^n P(x_k) L_k$.

Les polynômes L_k sont les *polynômes d'interpolation de Lagrange* aux points $x_0, \dots, x_n$.

Il devient alors évident que le polynôme P_L s'écrit : $P_L = \sum_{k=0}^n y_k L_k$.

Exemple. Déterminons le polynôme d'interpolation de degré minimal répondant aux conditions d'interpolation : $P(-3) = 2, P(-1) = -1, P(1) = 1, P(2) = 2$ (c'est celui représenté figure 7).

On commence par calculer les quatre polynômes de Lagrange associés aux réels $-3, -1, 1, 2$:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{(-3+1)(-3-1)(-3-2)} = -\frac{1}{40}(X^3 - 2X^2 - X + 2) \\ L_1 &= \frac{(X+3)(X-1)(X-2)}{(-1+3)(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{12}(X^3 - 7X + 6) \\ L_2 &= \frac{(X+3)(X+1)(X-2)}{(1+3)(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{8}(X^3 + 2X^2 - 5X - 6) \\ L_3 &= \frac{(X+3)(X+1)(X-1)}{(2+3)(2+1)(2-1)} = \frac{1}{15}(X^3 + 3X^2 - X - 3) \end{aligned}$$

Le polynôme d'interpolation recherché est donc :

$$P = 2L_0 - L_1 + L_2 + 2L_3 = -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{9}{8}X - \frac{1}{4}$$

Adoptons maintenant une démarche naïve pour résoudre le problème de l'interpolation de Lagrange : posons

[illegible]
$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

THÉORÈME 2.7 — $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=2}^n \prod_{j=1}^{j-1} (x_j - x_i)$, formule qu'on retiendra sous la forme plus concise :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on définit l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$. En bref :

$$\begin{aligned} P(X) &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \\ P(u) &= a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \cdots + a_1 u + a_0 \text{Id} \end{aligned}$$

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

PC* – Lycée Marcelin Berthelot

Attention. Si P et Q sont deux polynômes vérifiant $PQ = 0$, on sait que l'on peut en déduire que $P = 0$ ou $Q = 0$. **Ce n'est pas le cas des polynômes d'un endomorphisme** : on peut avoir $(PQ)(u) = 0$ sans pour autant en déduire que $P(u) = 0$ ou $Q(u) = 0$.

Considérons par exemple une projection vectorielle u : on a $u^2 - u = 0$. Si on pose $P = X$ et $Q = X - 1$ on a $PQ = X^2 - X$ donc $(PQ)(u) = 0$, mais on a pas en général $P(u) = 0$ ou $Q(u) = 0$ (sauf si $u = 0$ ou $u = \text{Id}$).

DÉFINITION. — Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que P est un polynôme annulateur de u lorsque $P(u) = 0$.

Par exemple, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de toute projection vectorielle, $X^2 - 1$ un polynôme annulateur de toute symétrie vectorielle.

PROPOSITION 2.9 — Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ possède un polynôme annulateur.

Exemple. De façon symétrique, on définit la notion de polynôme annulateur d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, et posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+d)a + bc - ad & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d + bc - ad \end{pmatrix} = (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = (\text{tr } A)A - (\det A)I_2$$

Autrement dit, le polynôme $P = X^2 - (\text{tr } A)X + (\det A)$ est un polynôme annulateur de A .

■ Application au calcul de l'inverse

Considérons un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, et M un polynôme annulateur de u , de degré d . Supposons de plus le

coefficient constant de M non nul : $M = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_0 \neq 0$.

$$\text{Alors } M(u) = 0 \iff a_0 \text{Id} = - \sum_{k=1}^d a_k u^k = u \circ \left(- \sum_{k=1}^d a_k u^{k-1} \right) \text{ donc } u \text{ est inversible, d'inverse } u^{-1} = -\frac{1}{a_0} \left(- \sum_{k=1}^d a_k u^{k-1} \right).$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a vu que $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)I_2 = 0$ donc si A est inversible, $A((\text{tr } A)I_2 - A) = (\det A)I_2$.

$$\text{On a donc } A^{-1} = \frac{1}{\det A} ((\text{tr } A)I_2 - A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

■ Application au calcul des puissances de u

Pour calculer u^n , on peut réaliser la division euclidienne de X^n par M : $X^n = MQ + R$, avec $\deg R < d$. Ainsi, $u^n = M(u) \circ Q(u) + R(u) = R(u)$ puisque $M(u) = 0$. Le calcul de u^n se ramène à celui de $R(u)$, ce qui peut être intéressant lorsque le degré d du polynôme annulateur est petit, puisque $\deg R < d$.

Exercice 11

a. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(1 + X)^n$ par $X(X - p)$.

b. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Déterminer un polynôme annulateur de U , et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$, ainsi que l'inverse de A , s'il existe.

■ Polynôme minimal (notion hors programme)

Dans la seconde application, nous avons vu que nous avons intérêt à utiliser un polynôme annulateur de degré d le plus petit possible. Un tel polynôme existe toujours ; son degré est défini par :

$$d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid (\text{Id}, u, u^2, \dots, u^k) \text{ est liée}\}$$

et il est caractérisé par :

$$\text{la famille } (\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{d-1}) \text{ est libre et } u^d \in \text{Vect}(\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{d-1}).$$

De plus, il est unique si on fixe son coefficient dominant :

THÉORÈME 2.10 — *Il existe un unique polynôme annulateur et unitaire de degré minimal ; il est appelé le polynôme minimal de u .*

THÉORÈME 2.11 — *Si M est le polynôme minimal de u , les polynômes annulateurs de u sont les multiples de M .*

2.4 Sous-espaces stables

■ Matrices définies par blocs

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ainsi que deux entiers $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Divisons les lignes de A en deux ensembles : les lignes dont les indices sont compris entre 1 et i et celles dont les indices sont compris entre $i+1$ et n . Faisons de même avec les colonnes en distinguant celles dont les indices sont compris entre 1 et j de celles dont les indices sont compris entre $j+1$ et p .

En procédant de la sorte, on divise la matrice A en quatre blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow i \\ \downarrow n-i \end{matrix} \quad \text{avec} \quad A_1 \in \mathcal{M}_{i,j}(\mathbb{K}), A_2 \in \mathcal{M}_{i,p-j}(\mathbb{K}), A_3 \in \mathcal{M}_{n-i,j}(\mathbb{K}), A_4 \in \mathcal{M}_{n-i,p-j}(\mathbb{K}).$$

$\leftarrow j \quad \leftarrow p-j$

Une telle matrice sera dite *définie par blocs*.

Pour peu que le découpage soit identique, la définition par bloc de deux matrices est évidemment compatible avec l'addition :

$$\text{si } A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \lambda A + A' = \begin{pmatrix} \lambda A_1 + A'_1 & \lambda A_2 + A'_2 \\ \lambda A_3 + A'_3 & \lambda A_4 + A'_4 \end{pmatrix}$$

mais le fait le plus remarquable est que le découpage par blocs est *compatible avec la multiplication*, pour peu que les découpages conduisent à des produits « licites » de matrices :

$$\text{si } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow j \\ \downarrow p-j \end{matrix} \quad \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \quad \text{alors} \quad AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow i \\ \downarrow n-i \end{matrix} \quad \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$\leftarrow k \quad \leftarrow q-k$ $\leftarrow k \quad \leftarrow q-k$

Autrement dit, les matrices définies par blocs se multiplient entre elles tout comme si les blocs étaient des scalaires, à condition que chaque multiplication corresponde à une multiplication « légale » de matrices (en ce qui concerne les dimensions).

Ces propriétés s'étendent par récurrence au cas d'un découpage des lignes et/ou des colonnes en un nombre arbitraire de subdivisions.

DÉFINITION. — Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite diagonale par bloc lorsqu'il existe une subdivision de $\llbracket 1, p \rrbracket$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & & & \\ & \boxed{A_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_{kk}} \end{pmatrix}$$

$\xleftarrow{i_1} \xleftarrow{i_2} \cdots \xleftarrow{i_k}$
 $\begin{matrix} \uparrow i_1 \\ \uparrow i_2 \\ \vdots \\ \uparrow i_k \end{matrix}$

(Tous les blocs sont nuls hormis les blocs diagonaux, qui sont tous carrés.)

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite triangulaire par bloc lorsqu'il existe une subdivision de $\llbracket 1, p \rrbracket$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \boxed{A_{12}} & \cdots & \boxed{A_{1k}} \\ & \boxed{A_{22}} & \cdots & \boxed{A_{2k}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \boxed{A_{kk}} \end{pmatrix}$$

$\xleftarrow{i_1} \xleftarrow{i_2} \cdots \xleftarrow{i_k}$
 $\begin{matrix} \uparrow i_1 \\ \uparrow i_2 \\ \vdots \\ \uparrow i_k \end{matrix}$

(Tous les blocs diagonaux sont carrés, et les blocs situés sous la diagonale sont nuls.)

■ Sous-espaces stables

DÉFINITION. — Soit H un sous-espace vectoriel de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On dit que H est stable par u lorsque $u(H) \subset H$.

Considérons une base adaptée à un sous-espace vectoriel H , c'est-à-dire construite à partir d'une base $(e_1, \dots, e_k)$ de H puis complétée pour former une base $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p)$ de E . Alors H est stable par u si et seulement si la matrice associée à u dans cette base (e) est de la forme :

$$\begin{matrix} \begin{matrix} \uparrow k \\ \uparrow p-k \end{matrix} \end{matrix} \left(\begin{array}{cc} \boxed{A} & \boxed{C} \\ \boxed{O} & \boxed{D} \end{array} \right) \begin{matrix} \xleftarrow{k} \xleftarrow{p-k} \end{matrix}$$

En effet, nous avons : $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, u(e_j) \in H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Lorsque H est stable par u , la restriction de u à H définit donc un endomorphisme u_H de H dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_k)$ est la matrice A . Cet endomorphisme s'appelle l'*induit* de u sur H .

Remarque. Dans une base $(e'_1, \dots, e'_p)$ de E pour laquelle ce sont les vecteurs $(e'_{p-k+1}, \dots, e'_p)$ qui forment une

base de H , la matrice d'un endomorphisme stabilisant H est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{D} & \boxed{O} \\ \boxed{C} & \boxed{A} \end{pmatrix}$$

Exemple. $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont des sous-espaces vectoriels stables de u . En effet, dans une base adaptée à $\text{Ker } u$, la matrice associée à u prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{O} & \boxed{C} \\ \boxed{O} & \boxed{D} \end{pmatrix}$$

et dans une base adaptée à $\text{Im } u$ la matrice associée à u prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{C} \\ \boxed{O} & \boxed{O} \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 2.12 — Si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $\text{Ker } P(u)$ est un sous-espace stable de u .

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection vectorielle. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec p si et seulement si $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont stables par u .

Décomposition de l'espace en somme de sous-espaces stables

Considérons enfin une famille $(H_1, \dots, H_k)$ de sous-espaces vectoriels telle que : $E = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$, et une base $(e_1, \dots, e_p)$ adaptée à cette décomposition. Alors un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ stabilise *chacun* de ces sous-espaces vectoriels si et seulement si la matrice associée à u dans cette base est diagonale par bloc :

$$\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix} = A$$

Remarque. Avec les notations ci-dessus, on a : $\text{rg } A = \sum_{j=1}^k \text{rg } A_j$ et $\text{tr } A = \sum_{j=1}^k \text{tr } A_j$.

En outre, si v est un endomorphisme ayant aussi $H_1, H_2, \dots, H_k$ comme sous-espaces stables, et si $B = \text{Mat}_{(e)}(v)$,

alors :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & \\ & A_2 B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k B_k \end{pmatrix}$$

En particulier, on notera que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & & \\ & A_2^n & \\ & & \ddots \\ & & & A_k^n \end{pmatrix}$$

■ Déterminant d'une matrice définie par blocs

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le déterminant d'une matrice définie par blocs, à l'exception du cas des matrices triangulaires par blocs. Commençons par le cas d'une matrice définie par quatre blocs :

PROPOSITION 2.13 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ un entier induisant la même partition des lignes et des colonnes en deux sous-ensembles $\llbracket 1, k \rrbracket$ et $\llbracket k+1, n \rrbracket$. On suppose de plus le bloc correspondant aux indices de lignes $\llbracket k+1, n \rrbracket$ et aux indices de colonnes $\llbracket 1, k \rrbracket$ (autrement dit le bloc en bas à gauche) nul. Alors :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_4 \end{pmatrix} \implies \det A = \det(A_1) \times \det(A_4).$$

On en déduit aisément par récurrence le :

COROLLAIRE — Le déterminant d'une matrice triangulaire par bloc est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux :

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{kk} \end{vmatrix} = \det A_{11} \times \det A_{22} \times \cdots \times \det A_{kk}.$$

Exercice 13

Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que C et D commutent et que D est inversible.

Calculer le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$ et en déduire : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.