

Corrigé du Devoir de rentrée

1) Calculs

$$1000 \times 0,01^5 = 10^3 \times 10^{-10} = 10^{-7}$$

$$\frac{3^a \times 8^b}{2^c \times 6^d} = 2^{3b-c-d} \times 3^{a-d}$$

$$2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 4^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{72} + \sqrt{144} = 6\sqrt{2} + 12$$

$$\frac{12}{28} + \frac{9}{6} = \frac{3}{7} + \frac{3}{2} = \frac{6+21}{14} = \frac{27}{14}$$

$$\ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right) = 4\ln(a) - 3\ln(b)$$

$$|3-x| = 5 \Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -2$$

$$|x-5| \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$$

2) Valeurs numériques

Valeurs exactes : $e^{4\ln 2} = 2^4 = 16$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\pi) = -1$$

$$\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$$

$$\binom{8}{8} = 1$$

$$5^0 = 1$$

Valeurs approchées à 0,1 près : $e \approx 2,71$

$$\ln 2 \approx 0,7$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4$$

$$\frac{23}{7} \approx 3,3$$

3) Formules remarquables : $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3$ $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$1+x+x^2+\dots+x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1+1+\dots+1 = n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$1+2+3+\dots+n = \dots\dots\dots$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

4) Polynômes

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

$$\text{Factoriser : } 4x^2 - 10x + 4 = 4(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Compléter : } (8x^3 - 16x^2 + 2x + 6) = (4x+2)(2x^2 - 5x + 3)$$

5) Inégalités Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a < b$ et $0 < c < d$

Entourer les affirmations forcément exactes et barrer les affirmations potentiellement fausses

~~$$a^2 < b^2$$~~

$$\boxed{c-b < d-a}$$

$$\boxed{\frac{1}{c} > \frac{1}{d}}$$

~~$$\sin c < \sin d$$~~

~~$$ac < bd$$~~

$$\boxed{\frac{c}{d} < \frac{d}{c}}$$

6) Systèmes

Le système $\begin{cases} 2x-3y=21 \\ 6x+4y=-2 \end{cases}$ a pour solution $x=3$ et $y=-5$

Le système $\begin{cases} 2x+y+3z=-5 \\ 3y+2z=-4 \\ -4z=20 \end{cases}$ a pour solution $x=4$, $y=2$ et $z=-5$

7) Dénombrement/Probabilités

a) Dans une classe de 38 élèves, 17 étudient l'allemand et 10 étudient l'espagnol dont 3 qui font de l'allemand et de l'espagnol. Combien d'élèves n'étudient ni l'allemand ni l'espagnol ? $38 - (17 + 10 - 3) = 14$

b) On lance 2 dés à 6 faces non truqués. Calculer la probabilité d'obtenir :

$$2 \text{ numéros pairs: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Au moins un 5: } 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$$

$$\text{Une somme égale à 8: } \frac{5}{36}$$

c) On dispose de deux urnes. L'urne A contient un jeton blanc et 2 jetons noirs. L'urne B contient 2 jetons blancs et 2 jetons noirs. On choisit l'une des deux urnes au hasard puis un jeton au hasard dans cette urne.

$$\text{La probabilité de tirer un jeton noir est: } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$$

Sachant qu'on a tiré un jeton blanc, la probabilité qu'il vienne de l'urne B est $\frac{3}{7}$

8) Variables aléatoires

a) La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par

x_i	0	2	3	4	8
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

$$E(X) = 0,1 \times 0 + 0,3 \times 2 + 0,2 \times 3 + 0,1 \times 4 + 0,3 \times 8 = 0 + 0,6 + 0,6 + 0,4 + 2,4 = 4$$

$$V(X) = 0,1 \times 0^2 + 0,3 \times 2^2 + 0,2 \times 3^2 + 0,1 \times 4^2 + 0,3 \times 8^2 - 4^2 = 0 + 1,2 + 1,8 + 1,6 + 19,2 - 16 = 7,8$$

$$\text{Calculer } P_{X>2}(X=3) = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{X<5}(X \geq 3) = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

b) On lance 180 fois de suite dans des conditions identiques un dé non truqué. On note Y le nombre de 6 obtenus.

La loi de Y est la loi binomiale de paramètres $n=180$ et $p = \frac{1}{6}$

$$P(Y=30) = \binom{180}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^{30} \left(\frac{5}{6}\right)^{150} \quad E(Y) = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30 \quad \sigma(Y) = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{25} = 5$$

c) Soit Z une variable aléatoire finie et $a \in \mathbb{R}$. Alors $E(a \cdot Z) = a \cdot E(Z)$ et $V(a \cdot Z) = a^2 \cdot V(Z)$

9) Suites

a) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison 2 telle que $u_4 = 5$ alors $u_{10} = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$

b) $(v_n)_{n \geq 0}$ suite arithmétique telle que $v_5 = 14$ et $v_{13} = 32$. La raison est $\frac{32-14}{13-5} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2,25$ et $v_1 = 14 - 4 \cdot \frac{9}{4} = 5$

c) Soit $(g_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0 \Leftrightarrow q \in]-1; 1[$

d) On considère trois suites telles que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$

Barrer les affirmations potentiellement fausses et entourer les affirmations nécessairement exactes :

~~$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2~~

~~$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge~~

~~$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante~~

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

10) Récurrence : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 2$

Initialisation : $0 \leq u_0 = 1 \leq 2$ donc le prédicat est vrai au rang 0.

Hérédité : Supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné.

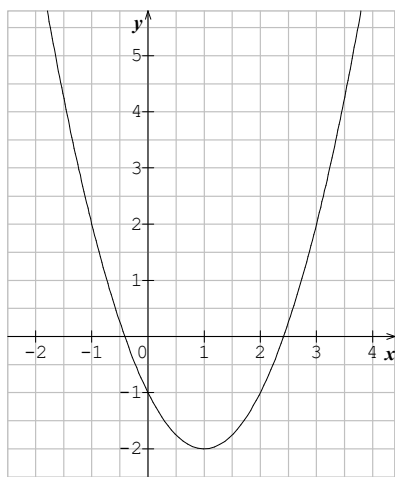
Alors $2 \leq 2 + u_n \leq 4$ puis $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

On a donc prouvé que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ et le prédicat est encore vrai au rang $n+1$

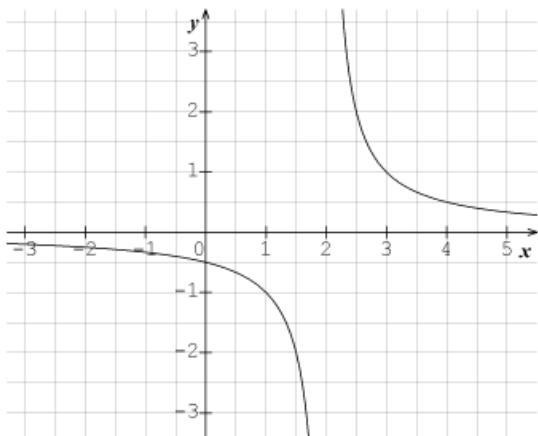
Conclusion : Le prédicat est vrai au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

11) Représentation graphiques : Donner l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes

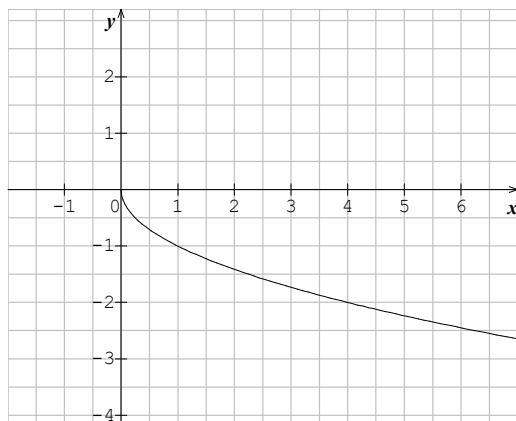
$$a: x \mapsto (x-1)^2 - 2$$



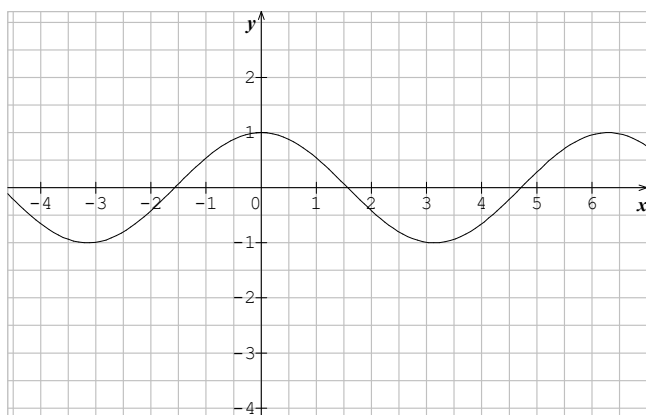
$$b: x \mapsto \frac{1}{x-2}$$



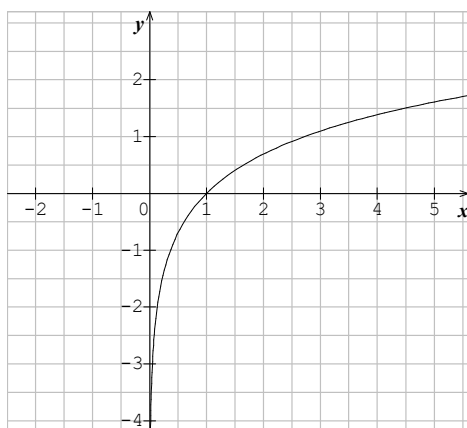
$$c: x \mapsto -\sqrt{x}$$



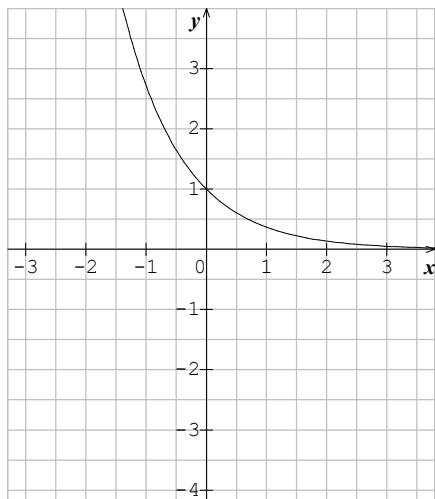
$$d: x \mapsto \cos x$$



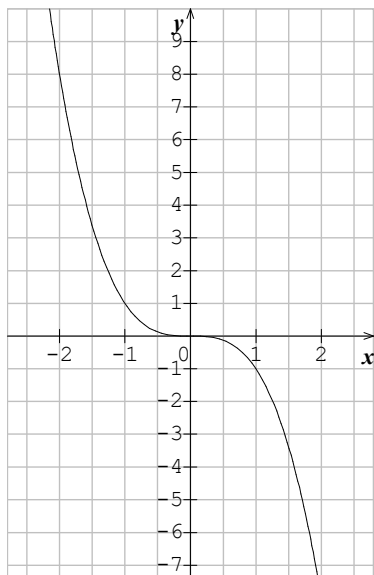
$$e: x \mapsto \ln x$$



$$g: x \mapsto e^{-x}$$



$$h: x \mapsto -x^3$$



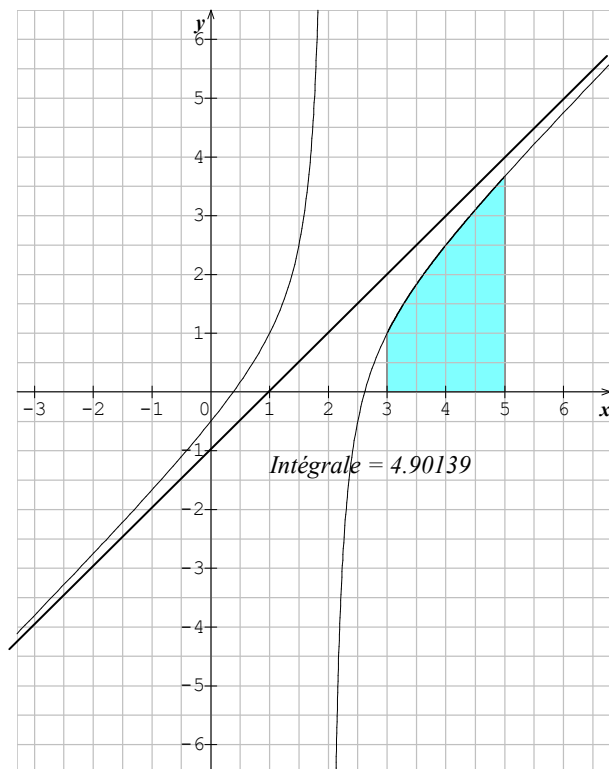
On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f

L'ensemble de définition de f semble être $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

Les deux asymptotes à la courbe représentative ont pour équations $x=2$ et $y=x-1$

Donner une valeur approchée $\int_3^5 f(x) dx \approx 5$

Remarque : 1 unité d'aire = 4 carreaux donc 20 carreaux = 5 u.a.



12) Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 3e^{-x} - \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x + 5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x} + 4 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 3x + 1}{5x - 10} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x^2 + 3x + 1}{5x - 10} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 7 \ln x}{2 \ln x + 4} = \frac{7}{2}$$

13) Domaine de définition

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad D_a =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$b(x) = \frac{\ln(x^2)}{x+1} \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$$

$$c(x) = \ln(2x - 18) \quad D_c =]9; +\infty[\quad d(x) = \frac{5 - 3 \sin(4x - 1)}{4 - e^{5x}} \quad D_d = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \ln 4 \right\}$$

14) Dérivées (pas besoin de rechercher l'ensemble de définition dans cette question).

$$a(x) = (\cos x) \sqrt{x} \quad a'(x) = -\sin x \cdot \sqrt{x} + \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad b(x) = \frac{x}{\ln x} \quad b'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$c(x) = \ln(6x^2 + 4); \quad c'(x) = \frac{12x}{6x^2 + 4} = \frac{6x}{3x^2 + 2}; \quad d(x) = e^{3x^2} + (\sin(5x + 1))^2; \quad d'(x) = 6x \cdot e^{3x^2} + 2 \sin(5x + 1) \cos(5x + 1) \times 5$$

15) Primitives

a) Déterminer une primitive des fonctions définies par :

$$f(x) = 7x^4 + e^{3x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad F(x) = 7 \frac{x^5}{5} + \frac{e^{3x}}{3} + 2 \times 2\sqrt{x} \quad g(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2} \quad G(x) = \ln |x^3 + 2x^2|$$

$$h(x) = \frac{8x}{x^4 + 6x^2 + 9} = \frac{4 \times 2x}{(x^2 + 3)^2} \quad H(x) = -\frac{4}{x^2 + 3}$$

b) Calculer la valeur exacte des intégrales

$$I = \int_1^2 3x^2 - \frac{5}{x^2} dx = \left[x^3 + \frac{5}{x} \right]_1^2 = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2} \quad J = \int_0^3 \frac{5}{x+2} dx = [5 \ln(x+2)]_0^3 = 5 \ln 5 - 5 \ln 2 = 5 \ln \frac{5}{2}$$

16) Définitions/Théorèmes

1) Donner la définition d'une fonction continue en un point puis celle d'une fonction dérivable en un point.

La fonction f est continue en un point a si la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et si elle vaut $f(a)$

La fonction f est dérivable en un point a si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et qu'elle est finie.

2)a) Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ les coordonnées de deux vecteurs de l'espace dans un repère orthonormé.

$$\text{Alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

b) Donner un vecteur normal au plan d'équation cartésienne $3x + 4y - 2z = 5$ $\vec{u} = (3, 4, -2)$

3) Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Soit X une variable aléatoire. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$