

Formation des nuages

PROBLEME 1

① bilan sur une tranche de fluide :

$$\int_0^z d\vec{P} = -\rho g S dz \vec{u}_z ; \quad d\vec{F}_p(z) = P(z) S \vec{u}_z ; \quad d\vec{F}_p(z+dz) = -P(z+dz) S \vec{u}_z$$

la résultante des forces pressantes latérales est nulle.

dans un ref galiléen : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ l'équilibre

projection sur (Oz) : $-\rho g S dz + (P(z) - P(z+dz)) S = 0$

$$\Rightarrow dP = P(z+dz) - P(z) = -\rho g dz \Rightarrow \boxed{dP = -\rho g dz} \quad \uparrow z$$

② air sec = G.P. de masse molaire M_a

$$\text{donc } \rho = \frac{m}{V} = \frac{n M_a}{V} = \frac{P M_a}{RT} \quad (PV = nRT)$$

$$\text{donc } dP = -\rho g dz = -\frac{P M_a}{RT} g dz \Rightarrow \int_{P^0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{RT} \int_0^z dz$$

$$\text{donc } \ln \frac{P(z)}{P^0} = -\frac{M_a g}{RT} z$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = P^0 e^{-\frac{z}{H_a}}} \quad \text{avec } H_a = \frac{RT}{M_a g}$$

③ Le profil de pression peut éventuellement correspondre au profil réel (exponentielle décroissante). Par contre T n'est pas constante. Donc le modèle de l'atmosphère isotherme ne correspond pas à la réalité

④ Dans la troposphère, la température peut effectivement être modélisée par une fonction affine décroissante

A partir de la figure 2 : $T_0 \approx 26^\circ\text{C}$ et $a \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ Km}^{-1}$

$$\textcircled{5} \quad dP = -\rho g dz \quad \text{et } \rho = \frac{P M_a}{R(T_0 - az)} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{R} \frac{dz}{T_0 - az}$$

$$\textcircled{6} \quad \text{donc } \int_{P^0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - az}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{P(z)}{P^0} = \frac{M_a g}{R \cdot a} \ln \left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right) = \ln \left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{M_a g}{R \cdot a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = P^0 \left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{M_a g}{R \cdot a}}}$$

$$P_{H_2O} = x_{H_2O} \times P = e \cdot P = \boxed{e P^0 \left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{M_a g}{R \cdot a}} = P_{H_2O}}$$

$$\textcircled{7} \quad \ln P_s = A - \frac{B}{T} = A - \frac{B}{T_0 - az}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_s(z) = e^A \cdot e^{-\frac{B}{T_0 - az}}}$$

⑧ il y a formation d'eau liquide lorsque $P_s = P_{H_2O}$ donc au croisement des deux courbes. On lit approximativement $z \approx 1,2 \text{ km}$, ce qui est beaucoup.

$$\textcircled{9} \quad \vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{24}{Re} \rho_{\text{air}} \pi R^2 v^2 \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad Re = \frac{v \times 2R \times \rho_{\text{air}}}{\eta}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\vec{F} = -6\pi\eta R v \vec{u}_z} \quad \downarrow_z$$

$\textcircled{10}$ système: goutte dans un ref supposé galiléen.

$\rho_{\text{air}} \ll \rho_{\text{eau}}$ donc on néglige la poussée d'Archimède devant le poids.

$$\text{BDF:} \quad \vec{P} = m \vec{g} = \rho_{\text{eau}} \frac{4}{3} \pi R^3 g \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = -6\pi\eta R v \vec{u}_z$$

$$\text{PFD:} \quad \vec{P} + \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{dv}{dt} \vec{u}_z$$

$$\text{projection sur } (Oz): \quad m \frac{dv}{dt} + 6\pi\eta R v = mg$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{eau}}} v = g$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{9}{2} \frac{\eta}{R^2 \rho_{\text{eau}}} v = g}$$

$$v = v_{\text{lim}} \text{ lorsque } \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v_{\text{lim}} = \frac{2 R^2 \rho_{\text{eau}} g}{9 \eta_{\text{air}}}}$$

$$\textcircled{11} \quad \underline{A.N.} \quad v_{\text{lim}} = \frac{2 \times 10^{-8} \cdot 10^3 \times 9.8}{9 \times 2 \cdot 10^{-5}} \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\Delta t = \frac{H}{v_{\text{lim}}} = \boxed{500 \text{ s}} \quad \text{remarque: } \tau = \frac{2R^2 \rho}{9\eta} = \frac{v_{\text{lim}}}{g} \approx 0,1 \text{ s} \ll \Delta t$$

v_{lim} est atteinte très rapidement

$$\textcircled{12} \quad Re = \frac{\rho_{\text{air}} v_{\text{lim}} 2R}{\eta_{\text{air}}} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-5}} = 10 > 1 \quad \text{trop grand pour le modèle}$$

$$\textcircled{13} \quad D_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = v \times S = 3 \cdot 10^7 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\textcircled{14} \quad \text{masse d'un m}^3 \text{ de mélange air + eau} = 1,205 \text{ kg}$$

$$\text{masse d'eau dans } 1 \text{ m}^3 = \text{masse du mélange} - \text{masse d'air}$$

$$= 1,205 - 1,2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\text{En une seconde, il tombe donc } m = 3 \cdot 10^7 \times 5 \cdot 10^{-3} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ kg d'eau}$$

$$\boxed{D_{\text{eau}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\textcircled{15} \quad \Delta t = \frac{m_{\text{eau}}}{D_{\text{eau}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^3 \text{ s} \approx \underline{33 \text{ minutes}} \quad \text{durée de l'averse}$$

16

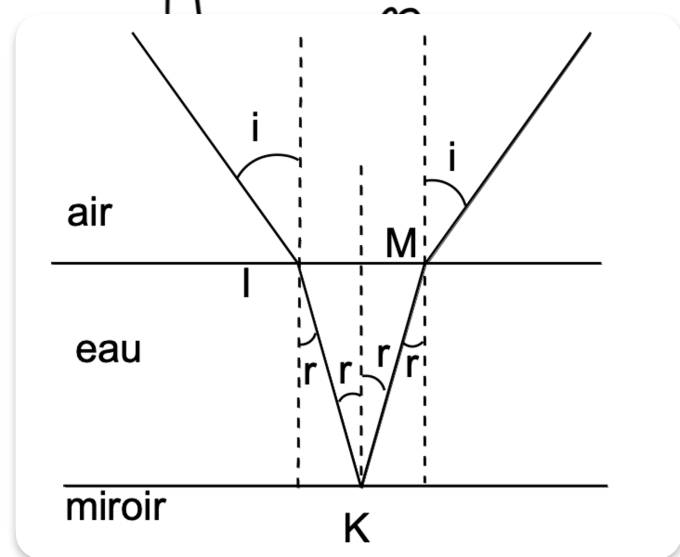
les rayons réfléchis et réfractés $\in$ au plan d'incidence.



$$i_1 = r \quad (\text{angles arithmétiques})$$

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

17



$$n_{\text{air}} = 1$$

$$n_{\text{eau}} = n = 1,33$$

18 $n_{\text{eau}} > n_{\text{air}}$ passage d'un milieu peu réfringent à un milieu + réfringent. Donc pas de réflexion totale possible en I ou point M:

$$n_{\text{eau}} \sin r = n_{\text{air}} \sin i$$

il y aurait réflexion totale en M si $\sin i$ n'existant pas. Gr, d'après le schéma, l'angle de sortie i est identique à l'angle d'entrée i . Donc il n'y a pas de réflexion totale en M

19 Les rayons R_1 et R_2 atténués par rapport à R_0 car ils subissent une réflexion partielle. De plus, la traversée de la couche d'eau provoque une atténuation

20 D'après le schéma $IM = d_1 - d_2$

$$\text{Gr } \tan r = \frac{IM/2}{e} = \frac{d_1 - d_2}{2e} \approx r \quad \text{si les angles sont faibles } \tan r \approx r \text{ et } \tan i \approx i$$

$$\text{de même } \tan i = \frac{IN/2}{e} = \frac{d_1}{2e} \approx i$$

$$\text{donc } d_1 - d_2 = 2er \quad \text{et } d_1 = 2ei$$

$$\text{Gr Snell Descartes: } n \sin r = \sin i \Rightarrow n r \approx i$$

$$\text{donc } d_2 = d_1 - 2er = 2ei - 2er = 2ei \left(1 - \frac{1}{n}\right) = d_2$$

donc pour i imposé, la mesure de

d_2 permet de connaître l'épaisseur d'eau e

Concours blanc : Physique Agro

Problème II – Dynamique des fluides parfaits et visqueux

I.1 – Écoulement dans une conduite forcée

10. Pour un fluide incompressible, le débit volumique est conservatif, donc :

$$D_V, \text{ conduite principale} = 3D_V, \text{ conduite forcée}$$

Par ailleurs, puisqu'on définit une unique vitesse dans chaque conduite, il s'agit de la vitesse moyenne qui permet d'exprimer le débit volumique dans une conduite de section S selon la relation :

$$D_V = Sv_m$$

On peut aussi dire que l'écoulement est unidimensionnel, ce qui conduit à la même expression pour le débit.

On en déduit :

$$\pi \frac{D^2}{4} v_P = 3 \left(\pi \frac{d^2}{4} v_F \right)$$

et donc :

$$d = D \sqrt{\frac{v_P}{3v_F}}$$

$$\boxed{\text{AN}} \quad d = 7,1 \times \sqrt{\frac{7,5}{3 \times 18}} \Rightarrow \underline{d \simeq 2,6 \text{ m}}$$

L'ordre de grandeur est correct, et on vérifie bien $d < D$.

11. D'après la relation de Bernoulli, pour un fluide *parfait* et *incompressible* en écoulement *stationnaire* dans le champ de pesanteur, et *en l'absence de travail utile*, la charge se conserve le long d'une ligne de courant

Soit, entre deux sections 1 et 2 :

$$C_1 = p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = C_2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

L'axe Oz est choisi ascendant.

12. Appliquons la relation de Bernoulli entre la section de sortie et la section à l'altitude z :

$$p_o + \rho g z_s + \frac{1}{2} \rho v_F^2 = p(z) + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_F^2$$

La vitesse est identique sur ces deux sections puisque le débit est conservatif et que la surface du tube est également invariante.

On en déduit, avec $z_s = 0$:

$$p(z) = p_o - \rho g z = p_o \left(1 - \frac{z}{z_o} \right)$$

en posant :

$$z_o = \frac{p_o}{\rho g}$$

$$\boxed{\text{AN}} \quad z_o = \frac{10^5}{10^3 \times 9,8} \Rightarrow \underline{z_o \simeq 10,2 \text{ m}}$$

13. Les bulles de gaz apparaissent si la pression devient inférieure à p_{sat} , soit pour :

$$p_o \left(1 - \frac{z}{z_o} \right) < p_{sat}$$

et donc :

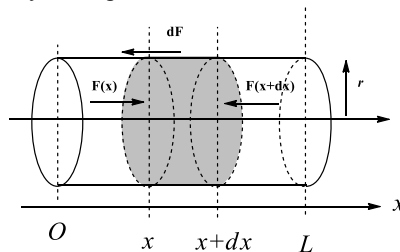
$$z > z_{cav} = z_o \left(1 - \frac{p_{sat}}{p_o} \right) = \frac{p_o - p_{sat}}{\rho g}$$

$$\boxed{\text{AN}} \quad z_{cav} = 10,2 \times \left(1 - \frac{3 \cdot 10^3}{10^5} \right) \Rightarrow \underline{z_{cav} \simeq 9,9 \text{ m}}$$

II.2 – Écoulement d'un glacier

5. On réalise un bilan de quantité de mouvement (application du théorème d'Euler) sur le système ouvert de fluide de rayon r compris entre x et $x + dx$.

On ne tient compte que des forces qui sont colinéaires au déplacement du fluide. Nous sommes régime permanent dans le cas d'un écoulement laminaire cylindrique.



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \vec{F}(x) + \vec{F}(x+dx) + d\vec{F}_\eta$$

$$\text{Force de viscosité : } d\vec{F}_\eta = 2\pi r \cdot dx \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} \vec{e}_x$$

Force de pression :

$$\begin{aligned} \vec{F}(x) + \vec{F}(x+dx) &= \pi r^2 (P(x) - P(x+dx)) \vec{e}_x \\ &= -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx \vec{e}_x \end{aligned}$$

Après projection selon $\vec{e}_x$

$$2\pi r \cdot dx \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} - \pi r^2 \frac{dP}{dx} dx = 0 \quad \boxed{dv = \frac{r}{2\eta} \frac{dP}{dx} dr}$$

On intègre l'expression différentielle en tenant compte de la condition d'adhérence du fluide visqueux en $r = R$.

$$\int_0^{v(r)} dv = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dx} \int_R^r r dr$$

$$\boxed{v(r) = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dx} \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^r = \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \frac{dP}{dx}}$$

6. On intègre l'expression précédente sur la section droite de l'écoulement pour obtenir le flux de volume et donc le débit volumique. En coordonnées polaires, un élément de surface est $dS = 2\pi r dr$.

$$Q = \int_S v(r) dS = \iint_S \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \frac{dP}{dx} 2\pi r dr$$

$$Q = \frac{2\pi}{4\eta} \frac{dP}{dx} \int_{r=0}^R (r^2 - R^2) r dr$$

$$Q = \frac{2\pi}{4\eta} \frac{dP}{dx} \cdot \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2} \right) = \frac{-\pi}{8\eta} \frac{dP}{dx} R^4$$

7. Analyse dimensionnelle.

$$[\eta] = \left[\frac{dP}{dx} \right] \frac{[R^4]}{[Q]} = \frac{MLT^{-2}/L^2}{L} \times \frac{L^4}{L^3 T^{-1}} = ML^{-1} T^{-1}$$

II. Modélisation de l'écoulement de la mer de glace.

8. L'écoulement de poiseuille pour décrire le déplacement du glacier semble être un modèle satisfaisant. Il est corroboré par un certain nombre d'observations décrites par le profil du champ de vitesses.

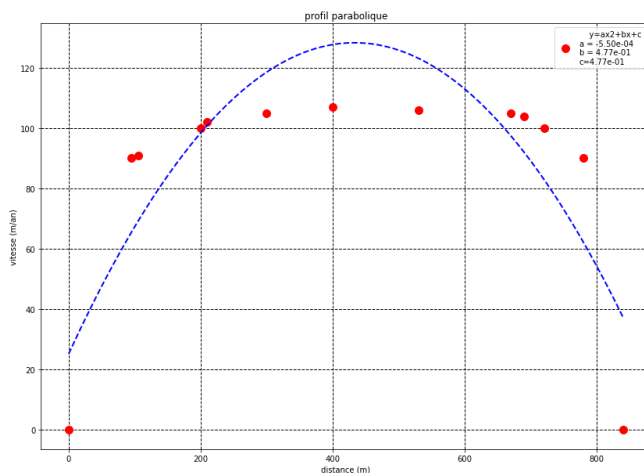
Arguments en faveur de l'écoulement de poiseuille :

- vitesse maximale au centre de l'écoulement et pratiquement nulle sur les bords.
- Dans une section droite de l'écoulement, la vitesse reste pratiquement uniforme sur un demi-cercle ($v(r)$), à condition d'être assez loin du lit rocheux.

Arguments en défaveur :

- Sur une section droite, la paroi du lit rocheux n'est pas circulaire et donc l'écoulement laminaire n'est plus cylindrique à proximité de la paroi.
- A la surface du glacier et en se déplacement d'un bord à l'autre du lit rocheux, le profil du champ de vitesses est assez éloigné d'un profil parabolique (voir figure ci-dessous).

On relève les vitesses de surface à l'altitude 2200 m d'un bord à l'autre du lit rocheux.



$$9. v_{\max} = v(r = 0) = \frac{R^2}{4\eta} \rho_g g \sin(\alpha)$$

10. On utilise la valeur numérique de la vitesse au centre de l'écoulement que l'on identifie avec la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille. D'après l'expression précédente :

$$\eta = \frac{R^2}{4v_{\max}} \rho_g g \sin(\alpha)$$

$$\eta \approx \frac{420^2}{4 \times \frac{10^7}{3600 \times 24 \times 365}} \times 917 \times 9,8 \times \sin(11) \approx 10^{13} \text{ Pa.s}$$

On retrouve effectivement un bon ordre de grandeur de la viscosité ce qui justifie des propriétés de la glace pouvant être considérée comme un fluide newtonien. La valeur très élevée de la viscosité impose un nombre de Reynolds très inférieur à l'unité (écoulement rampant).