

Nombre complexe : point de vue géométrique

1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition : affixe d'un point

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **image** de z le point M de coordonnées $(a; b)$.

z est alors appelé **l'affixe** du point M . On note $M(z)$.

Définition : affixe d'un vecteur

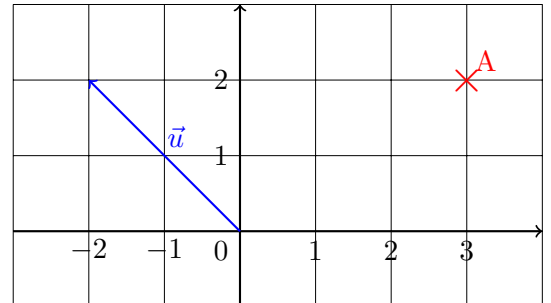
A tout nombre complexe $z = a + ib$ on fait correspondre un vecteur \vec{v} de coordonnées $(a; b)$.

On dit que z est **l'affixe** du vecteur \vec{v} .

Exemple

Le nombre $z = 3 + 2i$ est l'affixe du point A .

L'affixe du vecteur \vec{u} est $z' = -2 + 2i$.



Propriétés

On considère deux points M et N d'affixes respectives z_M et z_N . Soient $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ deux vecteurs du plan. Soit enfin k un réel.

- Le vecteur \overrightarrow{MN} a pour affixe $z_N - z_M$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe kz .
- Le milieu du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{z_M + z_N}{2}$.

2 Module et argument

Définition : module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

Le nombre noté $|z|$ est appelé **module** de z et est défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Définition : argument d'un nombre complexe

On considère un point M d'affixe z où z est un nombre complexe non nul.

On appelle **argument** de z une mesure, en radian, de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. On note alors $\arg(z)$.

Exemple

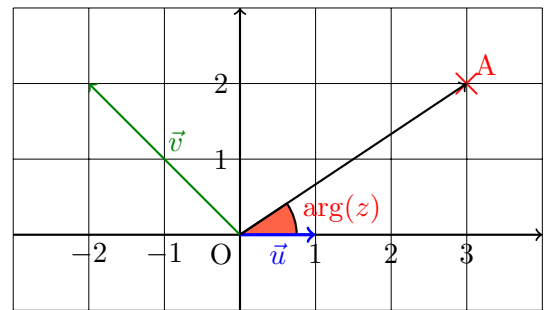
Le nombre $z = 3 + 2i$ est l'affixe du point A.

Son module est de $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Il s'agit de la distance entre A et l'origine du repère.

On a également $|z'| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Il s'agit de la norme de \vec{v} .

**Propriétés du module**

Soit z un nombre complexe et $|z|$ son module.

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$

Démonstration

- $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

- $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

- $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Propriétés du module

Soient z et z' deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Produit du module : $|zz'| = |z| \times |z'|$

Puissance : $|z^n| = |z|^n$

Inverse : $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

Quotient : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Démonstration

Pour le produit :

On pose $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ et $z' = |z'|(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$.

$$\begin{aligned} zz' &= |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \times |z'|(\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\ &= |z||z'|((\cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta')) + i(\sin(\theta) \cos(\theta') + \cos(\theta) \sin(\theta'))) \\ &= |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

Le module de zz' est donc $|z||z'|$.

Pour le module d'une puissance :

Initialisation

Pour $n = 1$, $|z^1| = |z| = |z|^1$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n \geq 1$, on ait $|z^n| = |z|^n$.

$$\begin{aligned} |z^{n+1}| &= |z \times z^n| \\ &= |z| \times |z^n| \text{ d'après la propriété du produit} \\ &= |z| \times |z|^n \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= |z|^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion

La propriété est vraie pour un entier naturel $n \geq 1$ et héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

3 Module et argument

Propriété - Définition : forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

On pose $\arg(z) = \theta$ et $r = |z|$. On peut alors écrire z sous la forme :

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Cette forme est appelée la **forme trigonométrique** du nombre complexe z .

Propriété : passer d'une forme à une autre

Si z s'écrit sous forme algébrique $z = a + ib$ et sous forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ alors :

- $a = r \cos(\theta)$ et $b = r \sin(\theta)$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple

On a $z_1 = 3(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

Pour z_1 :

$a = 3 \times (\cos(\pi)) = -3$ et $b = 3 \times \sin(\pi) = 0$. Donc $z_1 = -3$.

Pour z_2 :

$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$; $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $z_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$.

4 L'ensemble \mathbb{U}

Définition : l'ensemble des nombres complexes de module 1

L'ensemble de tous les points du plan $(O; \vec{u}, \vec{v})$ dont l'affixe est un nombre complexe de module 1 est noté \mathbb{U} . Il s'agit du **cercle trigonométrique**.

Remarque

Un point $M(z)$ appartenant à cet ensemble est de la forme $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Propriété : stabilité par produit et passage à l'inverse

L'ensemble \mathbb{U} est stable par produit et passage à l'inverse. Cela signifie que si z et z' sont deux nombres complexes de \mathbb{U} alors zz' et $\frac{1}{z}$ appartiennent à \mathbb{U} .

Démonstration

Produit :

$$\begin{aligned} |zz'| &= |z| \times |z'| \\ &= 1 \times 1 \text{ puisque les deux nombres complexes appartiennent à } \mathbb{U} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc zz' est de module 1, il appartient donc à \mathbb{U} .

L'inverse :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{|z|} \\ &= \frac{1}{1} \text{ puisque } z \text{ appartient à } \mathbb{U}. \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{z}$ est de module 1, il appartient donc à \mathbb{U} .

Exercices sur les nombres complexes (2)

> Module et argument d'un nombre complexe, affixe d'un point

Exercice n°1 Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

a. $z = -1 + i\sqrt{3}$

b. $z = 3 - 3i$

c. $z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}$

Exercice n°2 On se place dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $A(2; 2)$, $B(-\sqrt{3}; 1)$ et le point C d'affixe $z_C = 2i$.

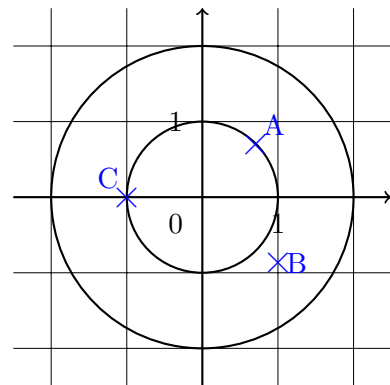
1. Donner la forme algébrique de z_A , l'affixe de A puis déterminer son module.
2. Soit $A'(2; 0)$. Quelle est la nature de OAA' ? En déduite un argument de z_A .
3. Calculer $|z_B|$, $|z_C|$ et $|z_B - z_C|$. Donner une interprétation géométrique de ces résultats.
4. Déterminer alors un argument z_B .

Exercice n°3

1. Déterminer un argument de chaque affixe des points A , B et C .
2. Placer les points D et E d'affixes respectives z_D et z_E telles que :

$$|z_D| = 2 \text{ et } \arg(z_D) = -\frac{2\pi}{3}(2\pi);$$

$$|z_E| = 3 \text{ et } \arg(z_E) = \frac{3\pi}{4}(2\pi).$$



Exercice n°4 Donner la forme trigonométrique des nombres suivants :

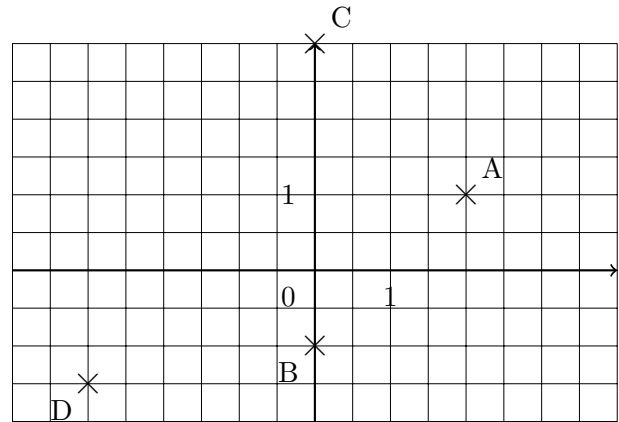
a. $z = (-1 + i)^5$

b. $z = (\sqrt{3} - i)^4$

c. $z = \frac{(\sqrt{2} - 1)i}{1 - i}$

Exercice n°5 On considère le plan complexe ci-dessous :

- Déterminer les formes algébriques des points A, B, C et D.
- Placer les points F et G dont les affixes respectives sont $z = 3 - i$ et $z' = \frac{3}{2}i$.
- Déterminer l'affixe du milieu du segment [AD].



Exercice n°6 Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

a. $|z| = 5$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

b. $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

Exercice n°7 On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0 = \sqrt{3} - i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = (1 + i)z_n$$

On pose $u_n = |z_n|$.

- Calculer u_0 .
- Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
- Exprimer u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice n°8 On se place dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$.

- Donner la forme trigonométrique de $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
- Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Déterminer, en fonction de n , la mesure du segment $[A_n A_{n+1}]$.

Correction des exercices sur les nombres complexes (2)

> Module et argument d'un nombre complexe, affixe d'un point

Exercice n°1

a. $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}} = 2$; $\cos(\theta) = \frac{-1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Un argument de z est donc $-\frac{\pi}{6}$.

b. $|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$; $\cos(\theta) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Un argument de z est donc $-\frac{\pi}{4}$.

c. $z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} = \frac{-\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

$-\sqrt{2}$ est un réel négatif, son argument est donc π (2π).

De plus, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Donc $\arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (2π).

Exercice n°2

1. $|z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

2. D'après les coordonnées de O , A et A' , on a $OA' = A'A = 2$ donc le triangle OAA' est isocèle en A' .

Puisque (AA') est parallèle à (Oy) et que (OA') est parallèle à (Ox) , alors les droites (AA') et (OA') sont perpendiculaire, ce qui veut dire que le triangle OAA' est rectangle en A' .

On en déduit donc que $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}$ (2π).

Un argument de z_A est donc $\frac{\pi}{4}$.

3. $|z_B| = \sqrt{3+1} = 2$

$|z_C| = \sqrt{2^2} = 2$

$|z_B - z_C| = |-\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2$.

On a donc $OB = OC = BC$: le triangle BOC est donc équilatéral.

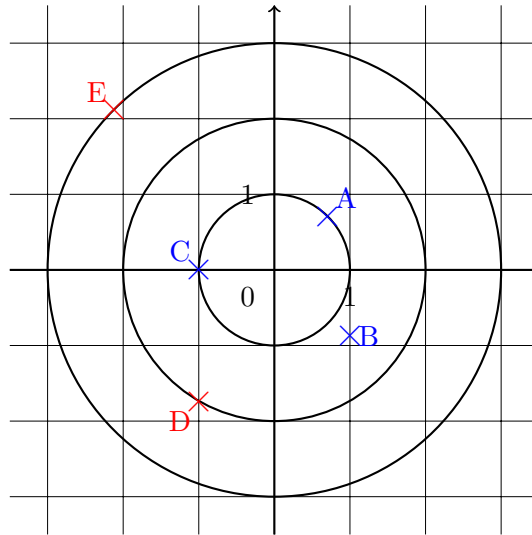
4. $\arg(z_B) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Exercice n°3

1. $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$ (2π); $\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}$ (2π); $\arg(z_C) = \pi$ (2π).

2. D appartient au cercle de rayon 2 puisque $|z_D| = 2$.

E appartient au cercle de rayon 3 puisque $|z_E| = 3$.

**Exercice n°4**

a. $|-1 + i| = \sqrt{2}$

$$\text{Donc } -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

$$\text{Donc } \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} (2\pi). \text{ Ainsi, } \arg((-1 + i)^5) = 5 \times \frac{3\pi}{4} (2\pi) = -\frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\text{Ainsi, } (-1 + i)^5 = \sqrt{2}^5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

b. $|\sqrt{3} - i| = 2$

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right).$$

$$\text{Donc } \arg(\sqrt{3} - i) = \frac{-\pi}{6} (2\pi). \text{ Ainsi, } \arg((\sqrt{3} - i)^4) = 4 \times \frac{-\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} (2\pi).$$

$$\text{Donc } (\sqrt{3} - i)^4 = 2^4 \left(\cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \right) = 16 \left(\cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \right)$$

c. $|(\sqrt{2} - 1)i| = \sqrt{2} - 1$ et $\arg((\sqrt{2} - 1)i) = \frac{\pi}{2}$

$$|1 - i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right).$$

$$\text{Donc } \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}.$$

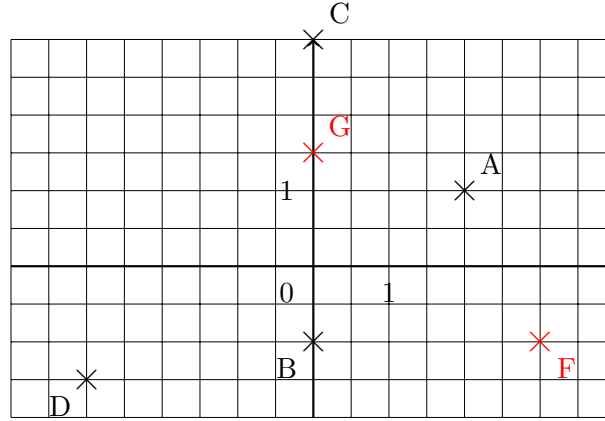
$$\text{Ainsi } |z| = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Donc } z = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

Exercice n°5

1. $z_A = 2 + i$, $z_B = -i$, $z_C = 3i$ et $z_D = -3 - \frac{3}{2}i$.

2. Placement des points :



3. On note z_I l'affixe de ce milieu : $z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{2 + i - 3 - \frac{3}{2}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4}i$.

Exercice n°6

a. $a = 5 \times \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$ et $b = 5 \times \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Donc $z = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

b. $a = 2 \times \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$ et $b = 2 \times \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -2$. Donc $z = -2i$

Exercice n°7

1. $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$.

2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+i)z_n| = |1+i| \times |z_n| = \sqrt{1^2 + 1^2} \times u_n = \sqrt{2}u_n$.
 (u_n) est donc bien une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

3. Puisque (u_n) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\sqrt{2}$ on a $u_n = 2 \times (\sqrt{2})^n$.

4. $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice n°8

1. $\left|\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Puis $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$.

$$2. r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z_n \right| = \left| \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n.$$

La suite (r_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$3. r_0 = |z_0| = 1.$$

$$\text{On a donc } r_n = 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

La distance entre les points A_n et A_{n+1} est déterminée par :

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - z_n| &= \left| \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \times z_n - z_n \right| \\ &= \left| \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 \right) z_n \right| \\ &= \left| \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n \right| \\ &= \left| -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right| \times |z_n| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2} \times |z_n| \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \end{aligned}$$