

Équations différentielles

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' + 3y = 0$
2. $y' - 2ty = 0$
3. $y' + ay = 0$
4. $y' + \sin(3t)y = 0$
5. $y' + \frac{e^t}{e^t+1}y = 0$

Résultat attendu : Les ensembles de solutions sont :

1. $\{t \mapsto Ce^{-3t} | C \in \mathbb{R}\}$
2. $\{t \mapsto Ce^{t^2} | C \in \mathbb{R}\}$
3. $\{t \mapsto Ce^{-at} | C \in \mathbb{R}\}$
4. $\{t \mapsto Ce^{\frac{\cos(3t)}{3}} | C \in \mathbb{R}\}$
5. $\{t \mapsto \frac{C}{e^t+1} | C \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2 (★). Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2ty = e^{t+t^2}$, sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' + \frac{1}{t}y = e^t$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Résultat attendu : Une résolution avec variation de la constante donne comme ensembles de solutions :

1. $\{t \mapsto Ce^{t^2} + e^{t+t^2} | C \in \mathbb{R}\}$
2. $\left\{t \mapsto \frac{C}{t} + e^t - \frac{e^t}{t} \middle| C \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 3 (★). Déterminer une solution particulière sur $I = \mathbb{R}$ pour chacune des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2y = 3$
2. $y' - 2y = t^2$
3. $y' - 2y = e^{4t}$
4. $y' - 2y = 3e^{2t}$
5. $y' - 2y = \sin(2t)$
6. $y' - 2y = 4\sin(2t) - 2t^2$

Résultat attendu : Pour le dernier, on utilise le principe de superposition (combinaison linéaire de cas connus).

1. $t \mapsto -\frac{3}{2}$
2. $t \mapsto -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$
3. $t \mapsto \frac{e^{4t}}{2}$
4. $t \mapsto 3te^{2t}$
5. $t \mapsto -\frac{\cos(2t) + \sin(2t)}{4}$
6. $t \mapsto t^2 + t + \frac{1}{2} - \cos(2t) - \sin(2t)$

Exercice 4 (★★). Résoudre (en précisant l'intervalle de résolution), les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y'(x) - y(x) = x$
2. $y'(x) + y(x) = 2(e^x + e^{-x})$
3. $y'(x) = 2y(x) + (2x^2 - 1)e^{x^2}$
4. $(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 0$
5. $y'(x) + y(x)\tan(x) = \cos^2(x)$

Indication : pour la troisième, chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto (ax + b)e^{x^2}$

Résultat attendu : On trouve comme ensembles de solutions :

1. Sur $I = \mathbb{R}$, $\{x \mapsto Ce^x - 1 - x | C \in \mathbb{R}\}$.
2. Sur $I = \mathbb{R}$, $\{x \mapsto Ce^{-x} + e^x + 2xe^{-x} | C \in \mathbb{R}\}$.
3. Sur $I = \mathbb{R}$, $\{x \mapsto Ce^{2x} + (x+1)e^{x^2} | C \in \mathbb{R}\}$.
4. Sur $I = \mathbb{R}$, $\{x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x^2+1}} | C \in \mathbb{R}\}$.
5. Sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\{x \mapsto C\cos(x) + \sin(x)\cos(x) | C \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5 (★). Déterminer l'unique fonction u dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, u'(t) + \frac{1}{2}u(t) = t + 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Résultat attendu : u est la fonction $t \mapsto 3e^{-\frac{t}{2}} + 2t - 2$.

Exercice 6 (★★). Résoudre sur $] -1, +\infty[$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs réelles) :

$$\begin{cases} (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Résultat attendu : La solution est la fonction définie de $] -1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{e^x+1}{1+x}$.

Exercice 7 (★). Résoudre les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 1$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}$
3. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sin(x)$
4. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x$
5. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 2$

Résultat attendu :

1. $\left\{ x \mapsto C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x^2}{6} + \frac{5x}{18} + \frac{37}{108} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
2. $\left\{ x \mapsto (C_1 + C_2 x) e^{-2x} + e^{-x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
3. $\left\{ x \mapsto (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{4 \cos(x) + 3 \sin(x)}{25} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
4. $\left\{ x \mapsto (C_1 + C_2 x) e^x + x^2 e^x \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
5. $\left\{ x \mapsto (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) e^x + \frac{2}{5} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 8 (★). Déterminer la fonction y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Résultat attendu : C'est la fonction $y : x \mapsto 2e^x + 1$.

Exercice 9 (★★). Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs complexes) :

$$\begin{cases} y''(x) - 2(1+i)y'(x) + 2iy(x) = x + i \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Résultat attendu : La solution est la fonction $x \mapsto \left(\frac{i}{2} + \frac{x}{2}\right) e^{(1+i)x} - \frac{i}{2}x - \frac{i}{2}$.

Exercice 10 (★★★).

1. Soit $u : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\xrightarrow[t \mapsto \tan(t)]{} \mathbb{R}$ et $v : \left]0, +\infty\right[\xrightarrow[t \mapsto \sqrt{t}]{} \mathbb{R}$. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 qui est vérifiée par chacune de ces fonctions.
2. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions u de classe C^1 sur un intervalle I (à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t \in I : u'(t) = 1 + u(t)^2$.
3. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions v de classe C^1 sur un intervalle I (à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t \in I : v(t) \neq 0$ et $v'(t) = \frac{1}{2v(t)}$.

Résultat attendu :

1. $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, u'(t) = 1 + u(t)^2$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, v'(t) = \frac{1}{2v(t)}$.
Les questions suivantes s'étudient par analyse-synthèse.
2. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $I = \left]-C - \frac{\pi}{2}, -C + \frac{\pi}{2}\right[$ par $t \mapsto \tan(t + C)$ est solution.
3. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, les fonctions définies sur $I = \left]-C, +\infty\right[$ par $t \mapsto \sqrt{t + C}$ et $t \mapsto -\sqrt{t + C}$ sont solution.

Exercice 11 (Type DS).

On cherche à déterminer les fonctions y définies de $] -1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle (E) : $|t|y' + y = \frac{1}{1+t}$. On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée.

- Résolution sur $I_1 =]0, +\infty[$.** Résoudre (E) sur l'intervalle I_1 . On appellera C_1 la constante utilisée.
- Résolution sur $I_2 =] -1, 0[$.**
 - Réécrire (E) sous la forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
 - Résoudre l'équation homogène (E_0) sur I_2 .
 - Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $t \in I_2$, $\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{1+t}$.
 - À l'aide de la méthode de la variation de la constante et du résultat de la question précédente, déterminer une solution particulière de (E) sur I_2 .
 - Conclure pour la résolution de (E) sur I_2 . On appellera C_2 la constante utilisée.
- Résolution sur $I =] -1, +\infty[$.** Soit f une solution de (E) sur I , c'est-à-dire une fonction dérivable sur I telle que $\forall t \in I$, $|t|f'(t) + f(t) = \frac{1}{1+t}$.
 - Que vaut $f(0)$? Justifier que f est continue en 0.
 - Exprimer $f(t)$ pour $t \in I_1$, puis pour $t \in I_2$.
 - En utilisant la continuité de f en 0, quelles contraintes voit-on apparaître sur C_1 et C_2 ?
 - Calculer la limite pour $t \rightarrow 0^-$ de $\frac{f(t)-f(0)}{t}$. Que peut-on en déduire?
 - Conclure la résolution de (E) sur I .

Résultat attendu :

- Si $t \in I_1$, $|t| = t$, donc (E) équivaut à $y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t(1+t)}$. Une primitive sur I_1 de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $t \mapsto \ln(t)$. Or $\forall t \in I_1$, $e^{-\ln(t)} = \frac{1}{t}$. Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme $y_H : t \mapsto \frac{C_1}{t}$, avec $C_1 \in \mathbb{R}$.
Par variation de la constante, on pose C_1 une fonction dérivable sur I_1 . Alors $t \mapsto \frac{C_1(t)}{t}$ est solution ssi $\forall t \in I_1$, $C_1'(t) = \frac{1}{(1+t)}$. Sur I_1 , $C_1 : t \mapsto \ln(1+t)$ convient, donc $y_P : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est une solution particulière.
Les solutions de (E) sur I_1 sont donc les fonctions de la forme $y : t \mapsto \frac{C_1 + \ln(1+t)}{t}$, avec $C_1 \in \mathbb{R}$.
- Si $t \in I_2$, $|t| = -t$. Donc (E) équivaut sur I_2 à $-ty' + y = \frac{1}{1+t}$, puis à $y' - \frac{1}{t}y = -\frac{1}{t(1+t)}$.
 - (E_0) équivaut à $y' - \frac{1}{t}y = 0$. Une primitive sur I_2 de $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est $t \mapsto -\ln(-t)$. Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme $y_H : t \mapsto -C_2t$, avec $C_2 \in \mathbb{R}$.
 - Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $t \in I_2$, $\frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{1+t} = \frac{at(t+1)+b(t+1)+ct^2}{t^2(1+t)} = \frac{(a+c)t^2+(a+b)t+b}{t^2(1+t)}$. Il suffit donc d'avoir $b = 1$, $a+b = 0$ et $a+c = 0$, c'est-à-dire $b = 1$, $a = -1$ et $c = 1$. Donc $\forall t \in I_2$, $\frac{1}{t^2(1+t)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1+t}$.
 - On cherche une primitive sur I_2 de $t \mapsto \frac{1}{t^2(1+t)}$. Par 2.c, $t \mapsto -\ln(-t) - \frac{1}{t} + \ln(1+t)$ convient. Donc (variation de la constante), une solution de (E) sur I_2 est $y_P : t \mapsto 1 + t \ln(-t) - t \ln(1+t)$.
 - Les solutions de (E) sur I_2 sont les fonctions $y : t \mapsto -C_2t + 1 + t \ln(-t) - t \ln(1+t)$, avec $C_2 \in \mathbb{R}$.
- Prendre la valeur particulière $t = 0$ dans (E) (ce qui est possible car $0 \in I$) donne : $0 + f(0) = \frac{1}{1+0}$, donc $f(0) = 1$. Par ailleurs, f est dérivable sur I , donc en particulier en 0, donc continue en 0.
 - f étant une solution de (E) sur I , elle l'est sur I_1 et sur I_2 . D'après les questions précédentes, $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que : $\forall t \in I_1$, $f(t) = \frac{C_1 + \ln(1+t)}{t}$ et $\forall t \in I_2$, $f(t) = -C_2t + 1 + t \ln(-t) - t \ln(1+t)$.
 - En 0^- : $-C_2t \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 0$, $t \ln(-t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 0$ (par croissances comparées) et $t \ln(1+t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 0$. Donc $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 1$. Donc f est continue à gauche, quelle que soit la valeur de C_2 .
En 0^+ : par dérivabilité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0, $\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{\ln(1+t)-\ln(1+0)}{t-0} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+0} = 1$. Or $\forall t \in I_1$, $f(t) = \frac{C_1}{t} + \frac{\ln(1+t)}{t}$ donc $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1 \Leftrightarrow \frac{C_1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$. Donc f est continue à droite ssi $C_1 = 0$.
 - Soit $t \in I_2$, $\frac{f(t)-f(0)}{t} = \frac{-C_2t + 1 + t \ln(-t) - t \ln(1+t) - 1}{t} = -C_2 + \ln(-t) - \ln(1+t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} -\infty$, quelle que soit la valeur de C_2 . Donc f n'est pas dérivable à gauche en 0.
 - Les questions précédentes montrent que si f est solution de (E) , alors f n'est pas dérivable à gauche en 0. Or, pour être solution de (E) , il faut être dérivable (donc dérivable à gauche) en 0 : absurde. Donc (E) n'admet aucune solution sur I .