

Exercice 1 (★). On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

- Caractériser chacun des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ suivants par l'image d'une base (bien choisie, pour que l'expression des images soit la plus simple possible). Aucune justification n'est demandée.
 - la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.
 - la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'équation $y = x$.
 - la symétrie centrale.
 - la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.
 - la symétrie axiale, d'axe la droite d'équation $y = -x$.
 - l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
 - la rotation par rapport à l'origine, d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- On pose $F_1 = \text{Vect}((1, 0))$, $F_2 = \text{Vect}((0, 1))$, $F_3 = \text{Vect}((1, 1))$, $F_4 = \text{Vect}((-1, 1))$.
Caractériser les applications linéaires des questions (a), (b), (c), (d) et (e) par leurs restrictions sur des sous-espaces vectoriels parmi les F_i .

Résultat attendu : Ne pas hésiter à faire des dessins pour y voir plus clair...

- $f((1, 0)) = (1, 0)$, $f((0, 1)) = (0, 0)$.
 - $f((1, 0)) = (-1, 0)$, $f((0, 1)) = (0, -1)$.
 - $f((1, 1)) = (-1, -1)$, $f((-1, 1)) = (-1, 1)$.
 - $f((0, 1)) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $f((1, 0)) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
- $f|_{F_1} = \text{id}$ et $f|_{F_2} = 0$
 - $f|_{F_1} = -\text{id}$ et $f|_{F_2} = -\text{id}$
 - $f|_{F_3} = -\text{id}$ et $f|_{F_4} = \text{id}$

Exercice 2 (★). Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P(X)) = (P(-1), P(0), P(1)).$$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

Résultat attendu : On montre la linéarité, puis la bijectivité (plusieurs méthodes possibles).

Exercice 3 (★). Soit u la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u((x, y, z)) = (x + z, y - 2x, x + 3z).$$

Montrer que u est un automorphisme.

Résultat attendu : On montre la linéarité, puis la bijectivité (plusieurs méthodes possibles).

Exercice 4 (★).

- Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
- Soit g une application linéaire injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
- Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

Résultat attendu : On utilise le théorème du rang.

1. 2

2. 26

3. Non

Exercice 5 (★). Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $(x, y, z) \mapsto (x - 3y, -x + y + 2z, y - z)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
3. En déduire le rang de φ .
4. Déterminer une base de $\text{Im}(\varphi)$.

Résultat attendu :

1. On montre que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Une base de $\text{Ker}(\varphi)$ est $((3, 1, 1))$.
3. Par théorème du rang, $\text{rg}(\varphi) = 2$.
4. Une base de $\text{Im}(\varphi)$ est $((1, -1, 0), (0, 2, -1))$ (d'autres seraient possibles).

Exercice 6 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ défini par $P(X) \mapsto XP'(X) + P(0)$. Montrer que φ est bien définie et linéaire, puis qu'il s'agit d'un automorphisme.

Résultat attendu : Pour la bonne définition de φ , il faut montrer que l'image d'un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est également dans $\mathbb{R}_n[X]$. La linéarité se montre en revenant à la définition. On montre ensuite que φ est bijective par une méthode au choix.

Exercice 7 (★★). Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1 - X)P'(X).$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.

Résultat attendu : Une base de $\text{Im}(f)$ est $((1 - p)X^p + pX^{p-1})_{p \in [1, n]}$, une base de $\text{Ker}(f)$ est $(1 - X)$.

Exercice 8 (★★). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et a un vecteur non nul de E . On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{id}_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre. Dans la suite, on pose $G_a = \text{Vect}(a, f(a))$.
3. Montrer que G_a est stable par f (c-à-d que $\forall x \in G_a, f(x) \in G_a$).
4. Montrer que si un sous-espace vectoriel F stable par f contient a , alors $G_a \subset F$.
5. Si $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'endomorphisme f qui vérifie l'hypothèse de l'énoncé.

Résultat attendu : Les quatre premières questions se traitent de manière classique (éventuellement en revenant aux définitions des objets mathématiques impliqués). Un exemple d'endomorphisme qui convient est :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (-y, x).$$

Exercice 9 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u, v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient $u \circ v = 0$. Montrer que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$. En déduire que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$.

Résultat attendu : On montre l'inclusion en revenant à la définition, puis on utilise le théorème du rang.

Exercice 10 (★★★). Soit f l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est une application linéaire définie de E dans E .
2. Pour $k \leq n$, calculer $f(X^k)$. En déduire $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et le rang de f .
3. Soit Q un polynôme de $\text{Im}(f)$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de E tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Résultat attendu :

1. On montre que f est linéaire et que l'image d'un élément de E est bien dans E .
2. On trouve après simplifications $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1, X)$ et $\text{rg}(f) = n - 1$.
3. On raisonne par analyse-synthèse, ou en conjecturant un résultat qui convient à l'aide des bases obtenues en question précédente.

Exercice 11 (★). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = 2$ et $P(-1) = 3$.

Résultat attendu : En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les polynômes solutions sont ceux du type $P(X) = (X - 1)(X + 1)Q(X) - \frac{1}{2}X + \frac{5}{2}$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 12 (★). Déterminer toutes les suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 8$.

Résultat attendu : En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les suites solutions sont celles qui s'écrivent sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(1 + \sqrt{2})^n + \mu(1 - \sqrt{2})^n + 4$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice 13 (★★). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X + 1) = X.P'(X) + 1$.

Résultat attendu : En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les polynômes solutions sont ceux du type $P(X) = \lambda(X - 1) + 1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 (★★). Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par $f(P(X)) = \int_0^1 P(t)dt$.

1. Vérifier que f est une forme linéaire, et déterminer $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition d'une forme linéaire, puis on montre que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.
2. Une base de $\text{Ker}(f)$ est $(X^p - \frac{1}{p+1})_{p \in [1, n]}$.

Exercice 15 (Type DS). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & (n+1)P(X) - XP'(X) \end{array}$.

1. Montrer que φ est bien définie.

Indication : introduire un polynôme dont on explicitera les coefficients.

2. Montrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
4. Déterminer le rang de φ . En déduire que φ est surjective.
5. Résoudre l'équation $(n+1)P(X) = XP'(X) + X$, d'inconnue $P(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Résultat attendu :

1. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, alors :

$$\varphi(P(X)) = (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - X \sum_{k=1}^{n+1} a_k k X^{k-1} = (n+1)a_0 + \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k X^k + 0X^{n+1}.$$

Le terme en X^{n+1} se simplifie, donc $\varphi(P(X)) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc φ est bien définie.

2. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_{n+1}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi((\lambda P + Q)(X)) &= (n+1)(\lambda P + Q)(X) - X(\lambda P + Q)'(X) \\ &= (n+1)(\lambda P(X) + Q(X)) - X(\lambda P'(X) + Q'(X)) \\ &= \lambda((n+1)P(X) - XP'(X)) + ((n+1)Q(X) - XQ'(X)) \\ \varphi((\lambda P + Q)(X)) &= \lambda\varphi(P(X)) + \varphi(Q(X)) \end{aligned}$$

Donc φ est bien une application linéaire.

3. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$,

$$\begin{aligned} P(X) \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P(X)) = 0 \\ &\iff (n+1)a_0 + \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k X^k = 0 \quad \text{d'après la question 1} \\ &\iff \begin{cases} (n+1)a_0 = 0 \\ \forall k \in [1, n], \quad (n+1-k)a_k = 0 \end{cases} \quad \text{en identifiant les coefficients} \\ &\iff \forall k \in [0, n], \quad a_k = 0 \\ &\iff P(X) = a_{n+1}X^{n+1} \\ &\iff P(X) \in \text{Vect}(X^{n+1}) \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X^{n+1})$. Or $X^{n+1} \neq 0$, donc c'est une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

4. D'après le théorème du rang, $\text{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = (n+2) - 1 = n+1$. Donc $\dim(\text{Im}(\varphi)) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Or $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_n[X]$.

On en déduit que φ est surjective.

5. Soit $P(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, $(n+1)P(X) = XP'(X) + X \iff \varphi(P(X)) = X$. Sous cette forme, on reconnaît une équation linéaire.

Comme on connaît déjà $\text{Ker}(\varphi)$, il suffit de déterminer une solution particulière (en cherchant par exemple un polynôme du type $aX + b$) pour déterminer l'ensemble des solutions.

Soit $Q(X) = \frac{1}{n}X$. Alors $\varphi(Q(X)) = (n+1)\frac{1}{n}X - X\frac{1}{n} = \frac{n}{n}X = X$, donc Q est solution particulière de l'équation.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{\frac{1}{n}X + \lambda X^{n+1} | \lambda \in \mathbb{R}\}$.