

Endomorphismes d'un espace euclidien – TD₁₄

Isométries vectorielles

Exercice 1 :

Soient f un isométrie d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

On note $g = f - \text{Id}_E$ et p la projection orthogonale sur $\text{Ker}(g)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g) = (\text{Im}(g))^\perp$.
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(x)$.

Réponse

1. ► Soit $x \in \text{Ker}(g)$. Montrons que $x \in (\text{Im}(g))^\perp$.

Soit $y \in \text{Im}(g)$. Il existe $a \in E$ tel que $y = g(a) = f(a) - a$.

On a :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(a) - a \rangle = \langle x, f(a) \rangle - \langle x, a \rangle.$$

Or, $x \in \text{Ker}(g)$, donc, $g(x) = 0$, donc, $f(x) = x$.

D'où,

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(a) \rangle - \langle x, a \rangle.$$

Comme f est une isométrie, $\langle f(x), f(a) \rangle = \langle x, a \rangle$.

Donc, $x \in (\text{Im}(g))^\perp$. Donc, $\boxed{\text{Ker}(g) \subset (\text{Im}(g))^\perp}$.

- Montrons que $\dim(\text{Ker}(g)) = \dim((\text{Im}(g))^\perp)$.

Par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(g)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(g)).$$

Or, en dimension finie (E est euclidien), $\text{Im}(g)$ et $(\text{Im}(g))^\perp$ sont supplémentaires dans E , donc,

$$\dim((\text{Im}(g))^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(g)).$$

Donc, $\boxed{\dim(\text{Ker}(g)) = \dim((\text{Im}(g))^\perp)}$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{Ker}(g) = (\text{Im}(g))^\perp}.$$

2. Soit $x \in E$. Comme p est la projection orthogonale sur $\text{Ker}(g)$, on sait que

$$E = \text{Ker}(g) \oplus (\text{Ker}(g))^\perp.$$

Donc, $x = p(x) + x - p(x)$ où $a = p(x) \in \text{Ker}(g)$ et $b = x - p(x) \in (\text{Ker}(g))^\perp$.

Par linéarité de f ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^k(a) + f^k(b)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b).$$

Or, $a \in \text{Ker}(g)$, donc, $f(a) = a$. Donc, pour tout $k \geq 0$, $f^k(a) = a$.

Donc,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a = a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a.$$

Par Q1, $(\text{Ker}(g))^\perp = ((\text{Im}(g))^\perp)^\perp$.

Comme E est de dimension finie, $(\text{Ker}(g))^\perp = \text{Im}(g)$.

Comme $b \in \text{Im}(g)$. Donc, $b = g(c) = f(c) - c$ où $c \in E$.

On en déduit que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^{k+1}(c) - f^k(c)).$$

Par télescope,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) = \frac{1}{n} \times (f^n(c) - c).$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) \right\| \leq \frac{1}{n} \times (\|f^n(c)\| + \|c\|).$$

Or, f est une isométrie, donc, $\|f^n(c)\| = \|c\|$.

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) \right\| \leq \frac{2\|c\|}{n}.$$

Par encadrement,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + 0_E = p(x).$$

Exercice 2 :

Déterminer toutes les matrices de $O(n)$ diagonalisables.

Réponse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Analyse.

On suppose que $A \in O(n)$ et que A est diagonalisable.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel.

Comme A est diagonalisable, On sait alors qu'il existe P inversible et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Montrons que $\lambda_i = \pm 1$. Comme A est orthogonale,

$$\|AX\|^2 = (AX)^\top AX = X^\top A^\top AX = X^\top X = \|X\|^2.$$

Soit $i \in [1, n]$ et X un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .

On a $\|AX\|^2 = \|\lambda_i \cdot X\|^2 = \lambda_i^2 \|X\|^2$.

D'où $\lambda_i^2 \|X\|^2 = \|X\|^2$. Comme $X \neq 0$ (c'est un vecteur propre), $|\lambda_i| = \pm 1$.

On en déduit que $A^2 = PD^2P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$. Donc, A est la matrice d'une symétrie.

De plus, on a $A = A^{-1}$.

Or, A est orthogonale, donc $A = A^\top$. Donc, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Donc, les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

On en déduit A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Synthèse.

On suppose que A est la matrice d'une symétrie orthogonale. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

On sait alors que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^n}) \oplus \text{Ker}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^n})$.

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme directe, la matrice de f est $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

En notant P la matrice de passage de la base canonique (qui est orthonormée) à la base $\mathcal{B}$, on sait que $P \in O(n)$ et $A = PDP^{-1} = PDP^\top$.

Donc, A est bien diagonalisable et

$$A^\top A = (P^\top)^\top D^\top P^\top PDP^\top = PD^2P^\top = PI_nP^\top = I_n.$$

Donc, A est orthogonale.

Ainsi,

Les matrices de $O(n)$ diagonalisables sont les matrices de symétrie orthogonale.

Exercice 3 :

Montrer que $O(n)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Réponse

Soit $(M_p) \in (O(n))^\mathbb{N}$ une suite de matrices orthogonales qui convergent vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $M \in O(n)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $M_p M_p^\top = I_n$ (*).

Or, les coefficients de $AA^\top$ sont polynomiaux en les coefficients de A , donc, $\varphi: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue sur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & AA^\top \end{array}$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $M_p M_p^\top = \varphi(M_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \varphi(M) = MM^\top$.

Donc, en passant à la limite dans (*) quand $p \rightarrow +\infty$, $MM^\top = I_n$.

Donc, $M \in O(n)$.

Ainsi,

$O(n)$ un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n)$.

1. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n$.

2. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Indication : On pourra calculer AU où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponse

1. On note C_i les colonnes de A . En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, on remarque que $\langle C_j, C_j \rangle = C_j^\top C_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2$.

Comme A est orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormée pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$.

Donc,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

2. On a $AU = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Donc,

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| = |\langle AU, U \rangle|.$$

D'où, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq \|AU\| \|U\|.$$

Or, $\|U\| = \sqrt{n}$ et, comme A est orthogonale,

$$\|AU\| = \sqrt{(AU)^\top AU} = \sqrt{U^\top A^\top AU} = \sqrt{U^\top U} = \|U\| = \sqrt{n}.$$

Donc,

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n.$$

Exercice 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A , alors $\lambda = 0$.
2. En déduire que les matrices $A - I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles.
3. Montrer que $(A + I_n) \times (A - I_n)^{-1} \in O(n)$.

Réponse

1. Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

On a $AX = \lambda X$ (*).

En transposant, comme A est antisymétrique, on a $X^\top A^\top = \lambda X^\top$, donc, $-X^\top A = \lambda X^\top$ (**).

En multipliant à gauche par $X^\top$ dans (*), on a $X^\top AX = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|^2$.

En multipliant à droite par X dans (**), on a $X^\top AX = -\lambda X^\top X = -\lambda \|X\|^2$.

Donc, $\lambda \|X\|^2 = -\lambda \|X\|^2$.

Comme X est un vecteur propre, $X \neq 0$, donc, $\lambda = -\lambda$, donc,

$$\lambda = 0.$$

2. On sait que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible si, et seulement si, λ est valeur propre de A , donc, comme 1 et -1 ne sont pas valeurs propres,

les matrices $A - I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles.

3. On a :

$$((A + I_n) \times (A - I_n)^{-1})^\top = ((A - I_n)^{-1})^\top \times (A + I_n)^\top = ((A - I_n)^\top)^{-1} \times (A^\top + I_n) = ((A^\top - I_n))^{-1} \times (A^\top + I_n).$$

Comme A est antisymétrique,

$$((A + I_n) \times (A - I_n)^{-1})^\top = ((-A - I_n))^{-1} \times (-A + I_n) = (A + I_n)^{-1} \times (A - I_n).$$

D'où,

$$((A + I_n) \times (A - I_n)^{-1})^\top \times (A + I_n) \times (A - I_n)^{-1} = (A + I_n)^{-1} \times (A - I_n) \times (A + I_n) \times (A - I_n)^{-1}.$$

Or, $(A + I_n)$ et $(A - I_n)$ sont deux polynômes en A , donc, commutent.

Donc,

$$((A + I_n) \times (A - I_n)^{-1})^T \times (A + I_n) \times (A - I_n)^{-1} = (A + I_n)^{-1} \times (A + I_n) \times (A - I_n) \times (A - I_n)^{-1} = I_n \times I_n = I_n.$$

Ainsi,

$$(A + I_n) \times (A - I_n)^{-1} \in O(n).$$

Exercice 6 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application (non nécessairement linéaire). On suppose que, pour tous x et y dans E , $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

1. Montrer que f transforme une base orthonormée de E en une base orthonormée de E .
2. Montrer que f est linéaire.

Réponse

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E où on a noté $n = \dim(E)$.

Par hypothèse sur f , pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$

Comme, $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée, $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$.

Donc,

$$f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une famille orthonormée de } E.$$

Donc, en particulier, $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de $n = \dim(E)$ vecteurs de E .

Par théorème

$$f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } E.$$

2. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y)$.

On note $z = f(\lambda.x + y) - \lambda.f(x) - f(y)$ et on montre que $z = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \langle z, z \rangle \\ &= \langle f(\lambda.x + y) - \lambda.f(x) - f(y), f(\lambda.x + y) - \lambda.f(x) - f(y) \rangle \\ &= \langle f(\lambda.x + y), f(\lambda.x + y) \rangle + \lambda^2 \langle f(x), f(x) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle \\ &\quad - 2\lambda \langle f(\lambda.x + y), f(x) \rangle - 2\langle f(\lambda.x + y), f(y) \rangle + 2\lambda \langle f(x), f(y) \rangle \quad (\text{propriétés du produit scalaire}) \\ &= \langle \lambda.x + y, \lambda.x + y \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\quad - 2\lambda \langle \lambda.x + y, x \rangle - 2\langle \lambda.x + y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle \quad (\text{hypothèse sur } f) \\ &= 0 \quad (\text{développer le produit scalaire}) \end{aligned}$$

Donc, par séparation de la norme, $z = 0$, donc,

$$f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y).$$

Ainsi,

$$f \text{ est linéaire.}$$

Exercice 7 :

Soient A et B dans $O_n(\mathbb{R})$.

1. Les matrices $A + B$ et AB sont-elles nécessairement dans $O_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que si $\frac{1}{2}(A + B) \in O_n(\mathbb{R})$, alors le segment $[A, B]$ est inclus dans $O_n(\mathbb{R})$.

Réponse

1. $A + B$: Non. Contre exemple : $A = B = I_n$.
 $A \times B$: Oui. On a : $AB(AB)^\top = ABB^\top A^\top = AI_n A^\top = I_n$.

2. Soit $C \in [A, B]$. On a $C = (1 - \lambda).A + \lambda.B$ où $\lambda \in [0, 1]$.

On a :

$$C^\top C = ((1 - \lambda).A + \lambda.B)^\top ((1 - \lambda).A + \lambda.B) = ((1 - \lambda).A^\top + \lambda.B^\top)((1 - \lambda).A + \lambda.B).$$

En développant,

$$C^\top C = (1 - \lambda)^2.A^\top A + \lambda(1 - \lambda)(B^\top A + A^\top B) + \lambda^2 B^\top B.$$

Or, A et B sont orthogonales, donc,

$$C^\top C = (1 - \lambda)^2.I_n + \lambda(1 - \lambda)(B^\top A + A^\top B) + \lambda^2 I_n.$$

Comme $\frac{1}{2}(A + B) \in O(n)$, on a ;

$$I_n = \left(\frac{1}{2}(A + B) \right)^\top \times \left(\frac{1}{2}(A + B) \right) = \frac{1}{4}(A^\top A + B^\top B + B^\top A + A^\top B) = \frac{1}{4}(2I_n + B^\top A + A^\top B).$$

Donc, $B^\top A + A^\top B = 2I_n$.

Donc,

$$C^\top C = (1 - \lambda)^2.I_n + \lambda(1 - \lambda)2I_n + \lambda^2 I_n = (1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2).I_n = I_n.$$

Donc, $C \in O(n)$.

Ainsi,

$$[A, B] \subset O_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 8 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et telle que $A^2 = A^\top$.

- Montrer que A est orthogonale.
- Si de plus A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, trouver A .

Réponse

1. On transpose la relation donnée : $(A^2)^\top = A$.

Or, $(A^2)^\top = (A^\top)^2$.

Comme $A^\top = A^2$, on a : $(A^2)^\top = (A^2)^2 = A^4$.

Donc, $A = (A^2)^\top = A^4$.

Comme A est inversible, en multipliant par A^{-1} , on a $I_n = A^3 = A^2 \times A = A^\top A$.

Donc,

A est orthogonale.

2. Comme A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A et sont réels.

D'autre part, on a montré que $A^3 = I_n$.

Donc, $P = X^3 - 1$ est annulateur de A .

On en déduit que les valeurs propres de A se trouvent parmi les racines de P , et les racines de P sont $1, j \notin \mathbb{R}$ et $\bar{j} \notin \mathbb{R}$.

Donc, la seule valeur propre de A est 1 .

Donc, A est semblable à I_n , donc,

$$A = I_n.$$

Espaces vectoriels euclidiens orientés de dimension 2 ou 3

Exercice 9 :

Soient a un vecteur non nul d'un espace euclidien orienté de E de dimension 3 et f l'application définie, pour tout $x \in E$, par $f(x) = a \wedge x$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et déterminer son noyau et son image.
2. Déterminer les éléments propres de f .

Réponse

1. Le produit vectoriel est bilinéaire, donc l'application $f : x \mapsto a \wedge x$ est linéaire.

De plus, pour tout $x \in E$, $f(x) \in E$.

Donc,

f est un endomorphisme de E .

Soit $x \in E$. On a :

$$f(x) = 0_E \iff a \wedge x = 0_E \iff \text{la famille } (a, x) \text{ est liée} \iff a = 0_E \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda a.$$

Comme $a \neq 0$, $f(x) = 0_E$ si, et seulement si $x \in \text{Vect}(a)$.

Donc,

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(a).$$

On sait que $a \wedge x$ est orthogonal à a et x , donc, $\text{Im}(f) \subset (\text{Vect}(a))^\perp$.

De plus, par le théorème du rang, $\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f))$.

Comme $a \neq 0$, $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(a)$ est de dimension 1.

Donc, $\text{rg}(f) = 2$.

De plus, en dimension finie, $\text{Vect}(a)$ et $(\text{Vect}(a))^\perp$ sont supplémentaires dans E .

Donc, $\dim((\text{Vect}(a))^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Vect}(a)) = 2$.

Donc, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim((\text{Vect}(a))^\perp)$.

Ainsi,

$$\text{Im}(f) = \dim((\text{Vect}(a))^\perp).$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $x \in E$ un vecteur propre associé.

On a $f(x) = \lambda x$, autrement dit $a \wedge x = \lambda x$.

En prenant le produit scalaire par rapport à x , on a $0 = \lambda \|x\|^2$.

Comme $x \neq 0_E$, $\lambda = 0$.

Réciproquement, par **Q1**, 0 est bien valeur propre de f et $E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}(a)$.

Ainsi,

$$\text{Sp}(f) = \{0\} \text{ et } E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}(a).$$

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

Exercice 10 :

Trouver les matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$.

Réponse**Analyse.**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$.

Par le théorème spectral, A est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

De plus, $P = X^3 - 2X^2 + 3X = X(X^2 - 2X + 3)$ est annulateur de A .

Donc, les valeurs propres de A se trouvent parmi les racines de P .

Or, la seule racine réelle de P est 0 (le discriminant de $X^2 - 2X + 3$ est strictement négatif).

Donc, A est semblable à la matrice nulle.

Donc, A est la matrice nulle.

Synthèse. La matrice nulle est bien symétrique et vérifie : $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$.

la seule matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$ est la matrice nulle.

Exercice 11 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice $A^\top \times A$ est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de $A^\top \times A$ sont positives.
3. On note $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de $A^\top \times A$ comptées avec multiplicités. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i$.
4. On suppose de plus $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicités. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Réponse

1. On note $S = A^\top \times A$.

On a $S^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = S$.

Donc, S est symétrique.

Comme A est à coefficients réels, S est aussi à coefficients réels.

Par le théorème spectral,

$S = A^\top A$ est diagonalisable.

2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$X^\top S X = X^\top A^\top A X = (AX)^\top (AX) = \|AX\|^2 \geq 0.$$

Donc, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Donc,

les valeurs propres de A sont positives.

3. Par **Q1**, $A^\top \times A$ et $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ sont semblables, donc, ont la même trace.

$$\text{Or, } \text{tr}(A^\top \times A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \text{ et } \text{tr}(\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)) = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Donc,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

4. A est semblable à $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Donc, comme A est symétrique, $A^\top A = A^2$ est semblable à $D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$.

Comme dans la question précédente, on a :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Exercice 12 :

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

1. Montrer que A définit un projecteur orthogonal.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\text{tr}(M^\top M)$ en fonction des coefficients de M .
3. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq n \sqrt{\text{rg}(A)}$.

Réponse

1. On sait que $A^2 = A$, donc A est la matrice d'un projecteur.

De plus $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc, par le théorème spectral, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Donc, $\text{Im}(A) \perp \text{Ker}(A)$.

Donc,

A définit un projecteur orthogonale.

2. On trouve $\text{tr}(M^\top M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^2$.

3. On note $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $b_{i,j} = 1$ si $a_{i,j} \geq 0$ et $b_{i,j} = -1$ sinon.

On a : $\langle A, B \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle A, B \rangle \leq \sqrt{\langle A, A \rangle} \sqrt{\langle B, B \rangle}.$$

Or,

$$\sqrt{\langle B, B \rangle} = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} 1} = n \quad \text{et} \quad \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^\top A)}.$$

Par le théorème spectral $A = PDP^\top$ où $P \in O(n)$ et $D = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ où le nombre de 1 est égal à $\dim(\text{Ker}(A - I_n)) = \dim(\text{Im}(A)) = \text{rg}(A)$.

On a $A^\top A = P D^2 P^\top = P D P^\top$. Donc, $A^\top A$ et D sont semblables :

$$\text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(D) = \text{rg}(A).$$

Ainsi,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq n \sqrt{\text{rg}(A)}.$$

Exercice 13 :

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que $\frac{(\text{tr} A)^2}{\text{tr}(A^2)} \leq \text{rg} A$.

Exercice 14 :

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S = A^2$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = A^2$.

Exercice 15 :

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top M = I_n$.

1. Montrer que M est inversible.
2. Montrer que M est symétrique.
3. Déterminer M .

Exercice 16 :

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(M + M^\top)^p = 0$. Montrer que M est antisymétrique.
2. Trouver $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $(M + M^\top)^2 = 0$ et $M + M^\top \neq 0$.

Exercice 17 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(A) \geq 0$.
2. Si $p \in \{1, \dots, n-1\}$, soit $A_p = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$. Montrer que $\det(A_p) \geq 0$.

Exercice 18 :

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E .

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f , alors $F^\perp$ est aussi stable par f .

Exercice 19 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p est un endomorphisme autoadjoint

Exercice 20 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et s une symétrie de E .

Montrer que s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, s est un endomorphisme autoadjoint

Exercice 21 :

1. Une symétrie est-elle un endomorphisme autoadjoint?
2. Une projection orthogonale est-elle une isométrie?
3. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et symétriques?
4. Quelles sont les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

Exercice 22 :

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) \times Q(t) dt$.

Montrer que l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = (X^2 - 1) \times P'' + 2X \times P' + P$ est symétrique.

Exercice 23 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^\top \times A = A \times A^\top$ et $A^2 = -I_n$.

1. On note $S = A \times A^\top$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Calculer S^2 .
3. Montrer que $A \in O_n(\mathbb{R})$.
4. Dans le cas où $n = 2$, déterminer les matrices A telles que $A^\top \times A = A \times A^\top$ et $A^2 = -I_2$.

Réponse

1. Cf un autre exercice.
2. $S^2 = AA^\top AA^\top = A^2(A^2)^\top = I_n$.
3. S est symétrique positive donc diagonalisable à valeurs propres positives.
Par la question précédente, $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est annulateur de S , donc les valeurs propres possibles de S sont -1 et 1 .
Comme les valeurs propres de S sont positives, on en déduit que S est semblable à I_n , donc, $S = I_n$.

Donc, $AA^\top = I_n$ et

A est orthogonale.

4. **Analyse.** Supposons A solution.

Par la question précédente, $A \in O(2)$. Donc, d'après le cours,

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

Or,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}^2 = I_2$$

Donc,

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On remarque que A est la matrice de la rotation d'angle θ , donc,

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Comme $A^2 = -I_2$, on a : $\cos(2\theta) = -1$ et $\sin(2\theta) = 0$.

Donc, $2\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc, $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Donc,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Synthèse.

On vérifie que les deux matrices trouvées sont bien solutions.

Donc,

les matrices A telles que $A^\top \times A = A \times A^\top$ et $A^2 = -I_2$ sont $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 24 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E . On note $\lambda_{\min} = \min_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda$ et $\lambda_{\max} = \max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda$

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\lambda_{\min} \times \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_{\max} \times \|x\|^2$.
2. On suppose que les valeurs propres de f sont deux à deux distinctes et vérifier $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Soit $x \in E$ de norme 1.

Montrer que $\langle f(x), x \rangle = \lambda_1$ si, et seulement si, $f(x) = \lambda_1 x$.

Exercice 25 :

Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n telle que $6S^2 - 5S + I_n = 0_n$. Montrer que la suite $(S^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 26 :

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E .

Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)^\perp$.

Réponse

Indication. Montrer l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)^\perp$, puis montrer l'égalité des dimensions.

Exercice 27 :

Soit E un espace euclidien.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Donner un endomorphisme $f \in \mathcal{S}(E)$ dont l'ensemble image est F .
2. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
3. Soit $f \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^2 = f$.
4. Soient $f \in \mathcal{S}^+(E)$ et $x \in E$. Montrer que si $\langle f(x), x \rangle = 0$, alors $f(x) = 0$.
5. Soit $(f, g) \in \mathcal{S}^+(E) \times \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que : $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

Exercice 28 :

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\langle g(z), z \rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\langle g(z), z \rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur orthogonal.

Réponse

On note n la dimension de E .

1. Par le théorème spectral, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de g .
Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$ et $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

L'hypothèse sur g donne :

$$0 = \langle g(e_i), e_i \rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 = \lambda_i.$$

Donc, $D = O_n$, donc,

$$g = 0.$$

2. Avec les notations de la question précédente, on a :

$$\langle g(e_i), e_i \rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 = \lambda_i \quad \text{et} \quad \|g(e_i)\|^2 = \lambda_i^2.$$

Donc, l'hypothèse faite sur g donne $\lambda_i = \lambda_i^2$. Donc, $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 0$.

On en déduit que $D^2 = D$, donc, $g^2 = g$. Ainsi,

g est la projection sur $\text{Ker}(g - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(g)$.

Comme g est autoadjoint ses sous-espaces propres sont orthogonaux, donc, $\text{Ker}(g) \perp \text{Ker}(g - \text{id}_E)$, donc,

g est un projecteur orthogonal.

Endomorphismes d'un espace euclidien**Exercice 29 :**

Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$.

Réponse

On remarque que les colonnes de A sont orthonormées, donc, $A \in O(2)$.

De plus, $\det(A) = -1$. On se tourne alors vers une symétrie. On a : $A^2 = I_2$.

Donc, A est la matrice d'une symétrie.

Comme A est symétrique, par le théorème spectral, ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Donc, A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Reste à déterminer $\text{Ker}(A - I_2)$ et $\text{Ker}(A + I_2)$.

Exercice 30 :

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on le suppose orienté par sa base canonique. Déterminer la matrice de la réflexion par rapport au plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$.

Exercice 31 :

Soit E un espace euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme g dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme h dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme u dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme v dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $E = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Réponse

1. On remarque que les colonnes de A sont deux à deux orthogonales et deux normes 1, donc, $A \in O(3)$ (donc A est la matrice d'une isométrie).

De plus, $C_1 \wedge C_2 = -C_3$, donc, $\det(A) = -1$.

On se dirige donc vers une symétrie. En remarquant que A est symétrique, on a $I_n = AA^T = A^2$.

Donc, A est la matrice d'une symétrie. On sait alors que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A + I_3)$.

Comme A est symétrique réelle, par le théorème spectral, $\text{Ker}(A - I_3) \perp \text{Ker}(A + I_3)$.

Donc, A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Il reste alors à déterminer une base de $\text{Ker}(A - I_3)$ et $\text{Ker}(A + I_3)$.

On a :

$$A - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$, on a : $\text{Im}(A - I_3) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1)$. Comme $C_1 \neq 0$, $\text{rg}(A - I_3) = 1$, puis par le théorème du rang $\text{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 2.

De plus, on a remarqué que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\text{Ker}(A - I_3)$, donc,

$$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On a :

$$A + I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme $-C_1 + C_2 + C_3 = 0$, on a : $\text{Im}(A + I_3) = \text{Vect}(C_2, C_3)$. Comme C_1 et C_2 sont non colinéaires, $\text{rg}(A + I_3) = 2$, puis par le théorème du rang $\text{Ker}(A + I_3)$ est de dimension 1.

De plus, on a remarqué que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(A + I_3)$, donc, $\text{Ker}(A + I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, A est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, c'est donc une réflexion.

Comme A est la matrice de f dans une **base orthonormée**,

f est une réflexion par rapport au plan $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{k})$.

2. On remarque que les colonnes de B sont deux à deux orthogonales et deux normes 1, donc, $B \in O(3)$ (donc B est la matrice d'une isométrie).

De plus, $C_1 \wedge C_2 = C_3$, donc, $\det(B) = 1$ et g est la matrice d'une rotation

Axe. L'axe de rotation est dirigé par un vecteur propre de B pour la valeur propre 1. On remarque que

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B - I_3).$$

L'axe est alors orienté par ce vecteur.

Angle $\theta \in]-\pi, \pi]$. On sait que $\text{tr}(B) = 1 + 2 \cos(\theta)$ donc, $\cos(\theta) = 0$, donc, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

Prenons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non colinéaire à U . On a $BX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

On sait que $\sin(\theta)$ est du signe de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0.$$

Donc, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, B est la matrice d'une rotation d'axe dirigé par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (c'est un quart de tour).

Comme B est la matrice de g dans une **base orthonormée directe**,

g est rotation d'axe dirigé par $\vec{i} + \vec{k}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. On remarque que les colonnes de C sont deux à deux orthogonales et deux normes 1, donc, $C \in O(3)$ (donc C est la matrice d'une isométrie).

De plus, $C_1 \wedge C_2 = C_3$, donc, $\det(C) = 1$ et h est la matrice d'une rotation

Axe. L'axe de rotation est dirigé par un vecteur propre de C pour la valeur propre 1. On remarque que

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(C - I_3).$$

L'axe est alors orienté par ce vecteur.

Angle $\theta \in]-\pi, \pi]$. On sait que $\text{tr}(C) = 1 + 2 \cos(\theta)$ donc, $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$, donc, $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$.

Prenons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ colinéaire à U . On a $CX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On sait que $\sin(\theta)$ est du signe de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \geq 0.$$

Donc, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Ainsi, C est la matrice d'une rotation d'axe dirigé par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Comme C est la matrice de h dans une **base orthonormée directe**,

h est rotation d'axe dirigé par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

4. On trouve une réflexion (cf **Q1** pour la méthode).

5. Les colonnes de E ne sont pas orthogonales.

Cependant $E^2 = E$. Donc, E est la matrice d'une projection.

De plus, $E \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, donc, E est la matrice d'une projection orthogonale.

Reste à déterminer l'espace sur lequel on projette : $\text{Ker}(E - I_3) = \text{Im}(E) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

Comme D est la matrice de v dans une **base orthonormée**,

v est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$.

Exercice 32 :

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on le suppose orienté par sa base canonique.

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $(1, 1, 1)$.

Réponse

Notons r cette rotation et A sa matrice dans la base canonique.

Dans une base orthonormée directe (u, v, w) où $u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de l'axe, la matrice de r est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Prenons $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{On note } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & -\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{pmatrix}.$$

P est la matrice de passage entre 2 bases orthonormées directes, donc, $P \in SO(3)$.

Donc, $P^{-1} = P^T$ et, par la formule de changement de base :

$$A = P A' P^{-1} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 :

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Mis de côté

Exercice 34 :

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $S = a + b + c$ et $\sigma = a \times b + b \times c + c \times a$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M \in O(3)$ si, et seulement si, $\sigma = 0$ et $|S| = 1$.
2. Montrer que $M \in SO(3)$ si, et seulement si, $\sigma = 0$ et $S = 1$.
3. Montrer que $M \in SO(3)$ si, et seulement si, a, b et c sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in \left[0, \frac{4}{37}\right]$.

Exercice 35 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien non réduit à $\{0\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle.

On considère $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

1. Montrer que $\text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), e_i \rangle$.
2. On suppose u autoadjoint.
 - (a) Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, avec $i \neq j$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \langle u(t.e_i + (1-t).e_j), t.e_i + (1-t).e_j \rangle$.
Montrer que f est polynomiale de degré au plus 2.
 - (b) Justifier qu'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, avec $i \neq j$, tel que $\langle u(e_i), e_i \rangle \geq 0$ et $\langle u(e_j), e_j \rangle \leq 0$.
 - (c) Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
 - (d) Montrer, par récurrence sur la dimension de E , qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u a une diagonale nulle.
3. On ne suppose plus u autoadjoint. Montrer que le résultat de 2) d) est encore vrai.

Exercice 36 :

Soit E un plan euclidien orienté.

1. Montrer que la composée de deux réflexions du plan E est une rotation de E .
2. Montrer que toute rotation s'écrit comme le produit de deux réflexions dont l'une peut être choisie arbitrairement.