

Applications linéaires

EXERCICE 1: [Indications] - Cours -

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt{x}$.
2. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x - 1$.
3. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x|$.
4. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto (y, x)$.
5. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto 3x + 5y$.
6. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sin(2x) + \sin(y)$.
7. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto xy$.
8. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad x \mapsto (ex, \pi, x\sqrt{2})$.
9. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (x, y) \mapsto (e(x+y), \pi y, x\sqrt{2})$.
10. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad M \mapsto M'$ défini par : $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ si $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$ et $\vec{0}$ sinon.
11. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto$ la solution du système d'équations en (u, v) :

$$\begin{cases} u + v = x \\ u - 2v = y \end{cases}$$

EXERCICE 2: [Indications] - Cours -

Dans cet exercice, on notera $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions à images réelles quelconques définies sur un intervalle I .

1. Dire si les applications u suivantes sont linéaires.
 - a) Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \in I$. $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto f(a)$.
 - b) si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $u : \mathcal{C}([\alpha, \beta]) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$.
 - c) $u : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t) dt$.
 - d) $u : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{F}; \quad f \mapsto f'$.
 - e) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \max_{t \in I} f(t)$ où $I = [0, 1]$.
 - f) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}; \quad f \mapsto \{t \mapsto 2f(t) + 1\}$.
 - g) $u : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|) dt$.

$$\text{h) } u : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{F}; \quad f \mapsto \{x \mapsto e^{-x}f(x) + \int_0^1 f(t) dt\}.$$

$$\text{i) } u : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}); \quad (\lambda, f) \mapsto \text{la primitive de } f \text{ qui vaut } \lambda \text{ en } x_0 = \pi.$$

$$\text{j) } u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$$

$$\text{k) } u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]; \quad P \mapsto XP' - P$$

2. Déterminer lesquelles de ces applications sont des endomorphismes.

EXERCICE 3: [Indications] - Cours -

Dire si les application suivantes sont des endomorphismes :

$$\text{1. } u : \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}); \quad f \mapsto f'$$

$$\text{2. } u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]; \quad P \mapsto X^2P' - nXP$$

$$\text{3. } u : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x + 3y$$

EXERCICE 4: [Indications] - Cours -

1. Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans F . Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

- a) Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
- b) Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
- c) Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice de E , alors $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice de F .
- d) Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice de E , alors $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice de F .

2. Reprendre les questions en prenant $E = F$.

Matrice, injectivité, surjectivité

EXERCICE 5: [Indications] - Cours - Calculer -

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f : E \rightarrow F$ l'application linéaire associée

à B dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{G}$ d'espaces vectoriel E et F .

1. Quelle est la dimension de E ? de F ?
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f .
3. L'application f est-elle injective? / surjective?

EXERCICE 6: [Indications] – Cours –

- On admettra que les applications ci-dessous sont linéaires. Déterminer la matrice de u dans une base de votre choix, $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$, où
 - $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x, x + 2y, -x + y)$
 - $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$
 $P \mapsto (X^2 + 2)P' - 3XP$
 - $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' - 3f' + 2f = 0\}$ et $u : E \rightarrow E$
 $f \mapsto f'$
- Pour chaque cas, dire si u est injective ? surjective ?
- L'application u de la question 1.b) est-elle un endomorphisme ?

EXERCICE 7: [Indications] – Chercher –

☆

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$.

- Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E .
- En déduire une matrice de φ et $\operatorname{rg} \varphi$.

EXERCICE 8: [Indications] – Chercher – Un peu de géométrie...

On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- On considère s la symétrie axiale par-rapport à l'axe des abscisses dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une formule pour s puis vérifier que c'est bien une application linéaire. Quelle est la matrice de la symétrie axiale dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?
- On considère p la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées. Déterminer une formule pour p et en déduire que c'est une application linéaire. Déterminer la matrice de p dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?
- Si le repère est orthonormé, on admet que la rotation r d'angle θ et de centre O dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est une application linéaire. Quelle est la matrice de r dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?
- Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

EXERCICE 9: [Indications] – cours

- Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
- Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
- Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

EXERCICE 10: [Indications] – Chercher – Mobiliser – Calculer – Dire si les applications suivantes sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

- $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x + z, x + y + z)$
- $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x - y, 2x + y, y)$
- $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une des bases de $\mathbb{R}^3$.
- $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x^2, y^3)$
- $u : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
 $f \mapsto f'$
- $u : \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid v \text{ est } p \text{ périodique}\} \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $v \mapsto (v_0, \dots, v_{p-1})$
- $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto (P(0), P')$

EXERCICE 11: [Indications] – Calculer –

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et λ un paramètre réel. On pose φ l'application linéaire de E dans E telle que

$$\begin{cases} \varphi(1) &= 1 + X \\ \varphi(X) &= 1 - X \\ \varphi(X^2) &= 1 + \lambda X^2 \end{cases}$$

- Quelle est l'image d'un polynôme quelconque de E par φ ?
- Comment choisir λ pour que φ soit surjective ? injective ?

EXERCICE 12: [Indications] – Calculer – Chercher –

On considère l'application $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (2x - y, -4x + 2y)$

- u est-elle linéaire ?
- Donner son noyau.
 - Quel est le rang de u ?
 - u est-elle surjective ?
 - Déterminer $\operatorname{Im} u$.
- Reprendre l'exercice avec $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, -x - y)$. Déterminer dans ce cas $u^2 = u \circ u$ sans faire de calculs supplémentaires.

EXERCICE 13: [Indications] – Chercher – Soient A et B les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$A = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \quad B = \{(x, y, z) : x = -y = -z\}$$

1. Exprimer E et B respectivement comme l'image et le noyau d'une même application linéaire $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer à vue la dimension de B . En déduire la dimension de A sauf déterminer de base de A .

EXERCICE 14: [Indications] – Calculer – On considère les applications

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, 2x + y, y) \quad (x, y, z) \mapsto (x + z, 5x - 2y + z)$$

1. On admet que f, g sont linéaires. Donner leur noyau respectif ainsi que leur image respective.
2. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Qu'en est-il de $f \circ g$?

EXERCICE 15: [Indications] – Calculer – Chercher – ☆
Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $g \in \mathcal{L}(F, E)$, et :

$$\varphi : E \times F \longrightarrow E \times F$$

$$(x, y) \longmapsto (x + g(y), y)$$

Montrer que φ est un automorphisme de $E \times F$.

EXERCICE 16: [Indications] – Chercher – ☆☆
Soit $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U : E \rightarrow E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt. \\ \text{et } U(f)(0) = f(0). \end{cases}$$

1. Montrer que $U \in L(E)$.
2. Déterminer $\ker U$ et $\text{Im } U$.
3. Donner un exemple de fonction dans $\text{Im } u$ qui n'est pas dans $\mathcal{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et en donner un antécédent.

EXERCICE 17: [Indications] – Mobiliser – Chercher – Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z + a\bar{z}$

où a est un nombre complexe donné non nul.

1. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$?

3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Changement de base

EXERCICE 18: [Indications] – Raisonner – Calculer –

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. a) Donner la matrice A de T dans la base donnée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
b) Déterminer le noyau de T .
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
a) Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
b) Calculer $T(f_2)$ et $T(f_3)$.
3. En déduire la matrice B de T dans cette nouvelle base.

EXERCICE 19: [Indications] – Cours – Calculer –

1. Soient $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, ainsi que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$M(f)_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer $M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3}$ où $\mathcal{B}'_2 = \{(1, 0)_{\mathcal{B}_2}, (-1, 1)_{\mathcal{B}_2}\}$.
 - b) Déterminer $M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}$ où $\mathcal{B}'_3 = \{(1, -1, 1), (-1, -1, 1), (0, 2, 0)\}$.
2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base d'un espace vectoriel E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, -1)_{\mathcal{B}}, (1, 2, 0)_{\mathcal{B}}, (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}\}$

EXERCICE 20: [Indications] – Cours – Calculer –

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, (0, 1, 2)_{\mathcal{B}}, (1, 0, 3)_{\mathcal{B}}\}$ deux bases d'un espace vectoriel E et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICE 21: [Indications] – Chercher – Calculer –

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\ker(u) = \text{Vect}\{X^2 - X, X^2 + 1\}$ et $u(2 + X) = 1 + X$. Déterminer l'image de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 22: [Indications] – Cours – Calculer –

Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\ker T$ et $\operatorname{Im} T$.
2. Soient $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_3 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3) .
 - b) Calculer P^{-1} .
 - c) Écrire la matrice D de T dans la base (f_1, f_2, f_3) .
 - d) Trouver une manière plus simple de déterminer D .
3. En déduire A^3 .

Pour aller un peu plus loin

EXERCICE 23: [Indications] – Chercher – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Donner des exemples d'endomorphismes nilpotents.
2. Soient f et g deux endomorphismes de E , nilpotents, et qui commutent. Montrer que $f \circ g$ et $f + g$ sont également nilpotents.
3. Montrer que si f est nilpotent alors $\operatorname{Id}_E - f \in GL(E)$ et exprimer son inverse $(\operatorname{Id}_E - f)^{-1}$.
4. Montrer que si f est nilpotent et $a \in GL(E)$ alors $a - f \in GL(E)$.

EXERCICE 24: [Indications] – Chercher –

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ est liée.
 - a) Montrer que si $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}} \vec{x}$.
 - b) Comparer $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{y}}$ lorsque $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre.
 - c) Montrer que f est une homothétie.
2. Montrer que si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E , f est une homothétie.

Indications

Exercice 7

1. Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par φ^{n-1} .

Exercice 24

1.
 - b) faire intervenir $\vec{x} + \vec{y}$ pour montrer que $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$
 - c) Montrer que pour $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée on a aussi $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$