

Compléments sur le calcul matriciel – TD₃

Matrices

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times A^\top = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_3 .
2. En déduire A^{-1} et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

et f l'endomorphisme canoniquement associé à J .

1. Déterminer la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
2. En déduire les puissances successives de J .

Exercice 4 :

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente : c'est-à-dire une matrice telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.
Montrer que la matrice $I_n - N$ est inversible.
Indication : penser à la formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique.
2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A$ et B est nilpotente.
Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $A + B \in GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5 :

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Résoudre l'équation $X + \text{tr}(X).A = B$ où $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Indication : commencer par calculer la trace de la matrice $X + \text{tr}(X).A$.

Matrices semblables

Exercice 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^3 = 0$ et $A \neq 0$.

1. Montrer que si $A^2 \neq 0$, alors A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que si $A^2 = 0$, alors A est semblable à la matrice $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Matrices définies par blocs**Exercice 8 :**

Soient A, B, C et D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit les matrices par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

On suppose que $M^\top \times J \times M = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Exercice 9 :

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Dans cette question, on suppose A inversible. Montrer que $\det(I_n - A \times B) = \det(I_n - B \times A)$.
2. Effectuer les produits matriciels par bloc suivant :

$$\begin{pmatrix} I_n - B \times A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n - A \times B \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que la relation obtenue à la question 1 est encore vraie lorsque A est quelconque.

Sous-espaces stables**Exercice 10 :**

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x))$ soit une base de E .
2. Montrer que la seule droite de E stable par f est $\mathbb{R}f^2(x)$.
3. Montrer que le seul plan de E stable par f est $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

Rappel : pour $u \neq 0_E$, on note $\mathbb{R}u = \text{Vect}(u)$.

Exercice 11 :

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\text{Id}_E$

1. Montrer que si F est une droite vectorielle de E , alors F n'est pas stable par f .
2. Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $\text{Vect}(x, f(x))$ est un plan stable par f .

Trace d'une matrice, d'un endomorphisme**Exercice 12 :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = \text{tr}(A) = 1$.

Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

Exercice 13 :

Soit H une matrice carrée complexe de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne A et une matrice ligne B telles que $H = AB$.
2. Montrer que $H^2 = \text{tr}(H)H$.

Exercice 14 :

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\varphi(A \times B) = \varphi(B \times A)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \text{tr}$.

Exercice 15 :

1. Donner la dimension de $\text{Ker}(\text{tr})$ et justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.
2. Montrer que $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa matrice dans

$$M \mapsto M + \text{tr}(M) \cdot I_n$$
une adaptée à la somme directe de la question précédente.

Exercice 16 :

Calculer le déterminant et la trace des endomorphismes :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \text{et} & & g : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto M^\top & & & M &\mapsto \text{tr}(M) \cdot I_n \end{aligned}$$

Déterminant**Exercice 17 :**

Montrer qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair n'est pas inversible.

Exercice 18 :

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{\max(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$. En déduire le déterminant des matrices $(\max(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et $(\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $s_k = \sum_{j=1}^k j$. Calculer le déterminant de

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}$$
Exercice 20 :

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \times \det(A-B).$$

Exercice 21 :

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+M) = \det(M).$$

Montrer que $A = 0$.

Exercice 22 :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{rg}(B) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $B = C \times L$.
2. Montrer que

$$\det(A+B) \times \det(A-B) \leq \det(A^2).$$

Exercice 23 :

On considère l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto (\lambda.X^n + \mu).P(1) + X \times P'(X). \end{aligned}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Indication : on pourra commencer par le cas $n = 2$.

Exercice 24 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

On considère les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- On suppose que $a \neq b$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on note $D(x) = \det(A + x.U)$.
 - Montrer que D est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
 - Calculer $D(-a)$ et $D(-b)$.
 - En déduire $\det(A)$.
- On suppose que $a = b$ et $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$. Calculer $\det(A)$.

Exercice 25 : Autour du déterminant de Vandermonde

- Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur $a_1, \dots, a_n$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

- Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$.
- Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ des scalaires deux à deux distincts.
Montrer que la famille : $((X - a_0)^n, (X - a_1)^n, \dots, (X - a_n)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}_{(n)}$.

- Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des scalaires. Calculer le déterminant de la matrice : $A = ((a_i + b_j)^{n-1})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Compléments sur le calcul matriciel – Exercices supplémentaires

Matrices

Exercice 26 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer l'inverse de A en résolvant un système linéaire.

Exercice 27 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer l'inverse de A en utilisant la matrice augmentée.

Exercice 28 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par :

$$\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si } i \neq j \\ a_{i,j} = 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 29 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$.

Matrices définies par blocs

Exercice 30 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme fixé.

Écrire par blocs la matrice $P(B)$ à l'aide de $P(A)$ et $P'(A)$.

Exercice 31 :

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi : M \mapsto \text{tr}(A \times M)$.