

Convergences et approximations Chapitre 13

Preuve des résultats importants du cours

Inégalité de Markov et conséquences

Inégalité de Markov

- Preuve : [Inégalité de Markov](#)

Si X est une var (discrète ou à densité) définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, positive et ayant une espérance alors on a :

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

- Cas discret :

Si X est une var discrète positive, $\forall a > 0$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, avec $x_k \in \mathbb{N}$,

$$\text{on a } E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k) \geq \sum_{x_k \geq a} x_k P(X = x_k) \geq a \sum_{x_k \geq a} P(X = x_k)$$

$$\text{Or, } \sum_{x_k \geq a} P(X = x_k) = P(X \geq a).$$

$$\text{D'où : } E(X) \geq aP(X \geq a) \text{ soit : } \forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

- Cas à densité :

$$\text{Si } X \text{ est une var à densité positive, alors } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t f(t) dt \geq \int_a^{+\infty} t f(t) dt \geq a \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

$$\text{Or, } \int_a^{+\infty} f(t) dt = P(X \geq a) \text{ d'où : } E(X) \geq aP(X \geq a) \text{ soit } \forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

$$\text{NB : De plus comme } [X > a] \subset [X \geq a], \text{ on a : } \forall a > 0, P(X > a) \leq P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

- Preuve : [Inégalité de Bienaymé-Tchebychev](#)

Si X est une var (discrète ou à densité) définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant un moment d'ordre 2, alors on a :

$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Appliquons l'inégalité de Markov à la v.a.r. $Y = (X - E(X))^2$: Y est une v.a.r. positive et comme $E(X^2)$ existe alors $E(Y)$ existe et on a $E(Y) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$.

$$\text{Inégalité de Markov avec } a = \epsilon^2, \text{ entraîne : } \forall \epsilon > 0, P([X - E(X)]^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{E(Y)}{\epsilon^2} = \frac{V(X)}{\epsilon^2} \quad (*).$$

$$\text{Or, } \forall \epsilon > 0, [|X| \geq \epsilon] = [X^2 \geq \epsilon^2], \text{ d'où } [|X - E(X)| \geq \epsilon] = [(X - E(X))^2 \geq \epsilon^2].$$

En remplaçant dans (*), on obtient ainsi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres

- Preuve : [Loi faible des grands nombres](#)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var définies sur le même espace probabilisé, **indépendantes**, ayant chacune une espérance m et une variance σ^2 .

Si l'on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon) = 0.$$

La loi faible des grands nombres est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : il suffit d'appliquer cette dernière à la v.a.r. $\bar{X}_n$ qui admet un moment d'ordre 2.

En effet, on a : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, et par linéarité de l'espérance que $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{nm}{n} = m$.

Puis par indépendance des variables X_i et par propriété de la variance :

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

D'où l'inégalité de B-T donne :

$$\forall \epsilon > 0, \quad 0 \leq P(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Le résultat annoncé se déduit alors du théorème d'encadrement, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0$ et $0 \leq P(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon)$.

Convergence en loi

Convergence en loi de la loi binomiale

• Preuve :  CV de la loi binomiale

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que, pour tout entier naturel n non nul, et supérieur à λ (réel strictement positif), $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Pour tout entier naturel n non nul, et supérieur à $\lambda > 0$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, alors :

$$\forall k \in [0, n], P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}. \text{ On va chercher un équivalent en } +\infty.$$

$$\text{On se rappelle que } \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

$$(\text{rappel : } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Or chaque facteur du numérateur est équivalent à n et on a k facteurs.

D'où l'équivalent du coefficient binomial est : $\forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

$$\text{Par conséquent : } \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\text{Puis, } \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{(n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}.$$

$$\text{or, } (n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda \text{ par équivalent usuel}$$

$$\text{Puis par continuité de la fonction exponentielle, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)} = e^{-\lambda}$$

$$\text{Donc finalement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(X = k), \text{ avec } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

On a bien prouvé que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Approximations

Approximations : lois normales

• Preuve : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi ayant chacune la même espérance m et la même variance σ^2 , et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \frac{S_n - n \times m}{\sqrt{n\sigma^2}}$.

On approche la loi de $S_n = \sqrt{n\sigma^2} S_n^* + nm$ par la loi $\mathcal{N}(n \times m, n\sigma^2)$ dès que $n \geq 30$.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi ayant chacune la même espérance m et la même variance σ^2 , et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \frac{S_n - n \times m}{\sqrt{n\sigma^2}}$.

D'après le TCL, S_n^* converge en loi vers une v.a.r Z telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

On se pose alors la question de savoir ce que résultat permet de conclure quand à la loi de S_n .
Déterminons alors la fonction de répartition de S_n .

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= P([S_n \leq x]) \\ &= P([S_n - nm \leq x - nm]) \\ &= P\left(\left[\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \\ &= P\left([S_n^* \leq \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}]\right) \\ &\simeq P\left(Z \leq \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \text{ pour } n \text{ grand} \\ &= P([\sigma\sqrt{n}Z + nm \leq x]) \\ &= F_{\sigma\sqrt{n}Z + nm}(x) \end{aligned}$$

Donc pour n grand, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sigma\sqrt{n}Z + nm$ ont même loi.

Déterminons la loi de $Z_n = \sigma\sqrt{n}Z + nm$.

Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale.

Soit on se rappelle le résultat sur les transformées affines de lois normales :

Comme $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sigma\sqrt{n}Z + nm \hookrightarrow \mathcal{N}(\sigma\sqrt{n} \times 0 + nm, (\sigma\sqrt{n})^2 \times 1)$.

Soit on détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant espérance et variance de Z_n :

$$E(Z_n) = E(\sigma\sqrt{n}Z + nm) = \sigma\sqrt{n}E(Z) + nm = nm \text{ car } E(Z) = 0$$

$$V(Z_n) = V(\sigma\sqrt{n}Z + nm) = (\sigma\sqrt{n})^2 V(Z) = n\sigma^2 \text{ car } V(Z) = 1.$$

Ainsi, pour n grand, la variable S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n \times m, n\sigma^2)$

Approximations : lois binomiales

- Preuve : [lois binomiales](#)

On approche la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, npq)$ dès que $n \geq 30, np \geq 5, nq \geq 5$.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p , ayant chacune la même espérance p et la même variance pq , et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$.

On sait alors que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et d'après le TCL, S_n^* converge en loi vers une v.a.r Z telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

On se pose alors la question de savoir ce que résultat permet de conclure quand à la loi de S_n .

Déterminons alors la fonction de répartition de S_n .

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= P([S_n \leq x]) \\ &= P([S_n - np \leq x - np]) \\ &= P\left(\left[\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right]\right) \\ &= P\left([S_n^* \leq \frac{x - np}{\sqrt{npq}}]\right) \\ &\simeq P\left(Z \leq \frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ pour } n \text{ grand} \\ &= P([\sqrt{npq}Z + np \leq x]) \\ &= F_{\sqrt{npq}Z + np}(x) \end{aligned}$$

Donc pour n grand, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sqrt{npq}Z + np$ ont même loi.

Déterminons la loi de $Z_n = \sqrt{npq}Z + np$.

Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale.

Soit on se rappelle le résultat sur les transformées affines de lois normales :

Comme $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sqrt{npq}Z + np \hookrightarrow \mathcal{N}(\sqrt{npq} \times 0 + np, (\sqrt{npq})^2 \times 1)$.

Soit on détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant espérance et variance de Z_n :

$$E(Z_n) = E(\sqrt{npq}Z + np) = \sqrt{npq}E(Z) + np = np \text{ car } E(Z) = 0$$

$$V(Z_n) = V(\sqrt{npq}Z + np) = (\sqrt{npq})^2 V(Z) = npq \text{ car } V(Z) = 1.$$

Ainsi, pour n grand, la variable S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(np, npq)$.

Remarque :

Considérons n et p définis de telle sorte qu'on peut approcher la v.a.r S_n par la v.a.r. Z_n qui suit la loi $\mathcal{N}(np, npq)$.

On devrait écrire : $\forall k \in [0, n] P([S_n = k]) \simeq P([Z_n = k])$

or comme Z_n est v.a.r à densité, $P([Z_n = k]) = 0$.

Ainsi l'approximation ci-dessus n'est pas bonne, on écrira plutôt :

$$P([S_n = k]) \simeq P([k - 0,5 < Z_n < k + 0,5]).$$

On appelle cela la correction de continuité.

Approximations : lois de Poisson

- Preuve : [lois de Poisson](#)

On approche la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ dès que $\lambda \geq 18$.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre α , ayant chacune la même espérance α et la même variance α , et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}$.

On sait alors que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\alpha)$ et d'après le TCL, S_n^* converge en loi vers une v.a.r Z telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

On se pose alors la question de savoir ce que résultat permet de conclure quand à la loi de S_n .

Déterminons alors la fonction de répartition de S_n .

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= P([S_n \leq x]) \\ &= P([S_n - n\alpha \leq x - n\alpha]) \\ &= P([\frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \leq \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}]) \\ &= P([S_n^* \leq \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}]) \\ &\simeq P([Z \leq \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}]) \text{ pour } n \text{ grand} \\ &= P([\sqrt{n\alpha}Z + n\alpha \leq x]) \\ &= F_{\sqrt{n\alpha}Z + n\alpha}(x) \end{aligned}$$

Donc pour n grand, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sqrt{n\alpha}Z + n\alpha$ ont même loi.

Déterminons la loi de $Z_n = \sqrt{n\alpha}Z + n\alpha$.

Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale.

Soit on se rappelle le résultat sur les transformées affines de lois normales :

Comme $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sqrt{n\alpha}Z + n\alpha \hookrightarrow \mathcal{N}(\sqrt{n\alpha} \times 0 + n\alpha, (\sqrt{n\alpha})^2 \times 1)$.

Soit on détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant espérance et variance de Z_n :

$$E(Z_n) = E(\sqrt{n\alpha}Z + n\alpha) = \sqrt{n\alpha}E(Z) + n\alpha = n\alpha \text{ car } E(Z) = 0$$

$$V(Z_n) = V(\sqrt{n\alpha}Z + n\alpha) = (\sqrt{n\alpha})^2 V(Z) = n\alpha \text{ car } V(Z) = 1.$$

Ainsi, pour n grand, la variable S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$.

Comme α est quelconque, pour λ assez grand, on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.