

16

Fonctions vectorielles

« La liberté, comme la mathématique, est fille de l'imagination. »

René Thom, médaillé Fields (1923–2002)

Plan de cours

I	Limite et continuité d'une fonction vectorielle	1
II	Dérivabilité d'une fonction vectorielle	2
III	Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment	4
IV	Suites et séries de fonctions vectorielles	6
V	Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice	7

On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle toute fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. En pratique, on considérera souvent des fonctions à valeurs dans $E = \mathbb{R}^p$, donc des fonctions de la forme :

$$f : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t \longmapsto (f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{cases}$$

Les fonctions numériques $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ sont appelées *fonctions composantes* ou *fonctions coordonnées* de f . Plus généralement, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $f = f_1 e_1 + \dots + f_p e_p$. L'équivalence des normes en dimension finie nous assurera que les propriétés de régularité (comme la continuité et la dérivabilité) ne dépendent pas de la base choisie.

Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie p .

I | Limite et continuité d'une fonction vectorielle

Définition 16.1 : Limite

On dit que f admet $\ell \in E$ pour limite en $t_0 \in I$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - \ell\| = 0$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| < \eta \implies \|f(t) - \ell\| < \varepsilon$$

On peut montrer que lorsque la limite existe, elle est unique. De plus, si $E = \mathbb{R}^p$, f admet $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ pour limite en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si chaque fonction composante f_i admet ℓ_i comme limite en t_0 .

Définition 16.2 : Continuité

- f est dite continue en $t_0 \in I$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| < \eta \implies \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$$

- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Proposition 16.3 : Continuité et fonctions composantes

f est continue en $t_0 \in I$ si et seulement si f_i est continue en t_0 quel que soit $i \in \{1, \dots, p\}$.

Exemple

| L'application $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune des fonctions composantes l'est.

II | Dérivabilité d'une fonction vectorielle

A – Dérivation en un point et sur un intervalle

Définition 16.4 : Dérivabilité

- L'application f est dite dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe.
On appelle alors vecteur dérivé en t_0 le vecteur $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ et on le note $f'(t_0)$.
- L'application f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I et on appelle dérivée de f l'application $f' : t \mapsto f'(t)$.

De manière équivalente, f dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ existe. En d'autres termes,

$$f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0) + o(t - t_0) \quad \text{i.e.} \quad f(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h)$$

La dérivabilité de f se traduit également par la dérivabilité des fonctions composantes.

Proposition 16.5

Si E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $f = f_1 e_1 + \dots + f_p e_p$, alors f est dérivable si et seulement si les fonctions f_i le sont. Dans ce cas, $f' = f'_1 e_1 + \dots + f'_p e_p$.

Exemple

L'application $R : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto R'(t) = R(t + \pi/2)$.

On peut, comme en dimension 1, définir le vecteur dérivé de f à droite ou à gauche, mais l'intérêt est mince.

Proposition 16.6

Toute application dérivable est continue.

Démonstration

Si f est dérivable en t_0 , $f(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h)$ donc $f(t_0 + h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(t_0)$. ■

B – Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 16.7 : Premières opérations

Soient $f, g : I \rightarrow E$ deux fonctions dérivables sur I .

- (i) si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;
- (ii) si $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , $\lambda \cdot f$ l'est également et $(\lambda \cdot f)' = \lambda' \cdot f + \lambda \cdot f'$;
- (iii) si $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow I$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f \circ \lambda$ l'est également et $(f \circ \lambda)' = \lambda' \cdot (f' \circ \lambda)$;

Attention, le produit $f \times g$ a rarement un sens lorsque $p \neq 1$!

Exercice 1

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

- (i) Établir la dérivabilité de $t \mapsto A(t)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et exprimer la dérivée.
- (ii) Supposons que $A(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Même question avec $t \mapsto A^{-1}(t)$.

Proposition 16.8 : Dérivabilité et application linéaire

Soient $f : I \rightarrow E$ une fonction dérivable sur I et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u \circ f$ est dérivable et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Démonstration

Tout repose sur la linéarité (et donc la continuité de u en dimension finie). En effet,

$$\frac{u(f(t_0+h)) - u(f(t_0))}{h} = u\left(\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} u(f'(t_0))$$

On peut aussi écrire $u(f(t_0+h)) \underset{h \rightarrow 0}{=} u(f(t_0)) + h u(f'(t_0)) + o(h)$ par continuité de u . ■

Exemples

| Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur I , $\operatorname{Re}(f)$ également. Si $g : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable sur I , $\operatorname{Tr}(g)$ également.

Proposition 16.9 : Dérivabilité et application bilinéaire

Soient $f : I \rightarrow F$ et $g : I \rightarrow G$ deux fonctions dérivables sur I et $B : F \times G \rightarrow E$ bilinéaire. Alors, $B(f, g)$ est dérivable sur I et $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Démonstration

Travaillons ici avec les développements limités. f et g sont supposées dérivables sur I donc pour tout $t_0 \in I$,

$$f(t_0+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h) \quad \text{et} \quad g(t_0+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} g(t_0) + h \cdot g'(t_0) + o(h)$$

Par bilinéarité de B , $B(f(t_0+h), g(t_0+h)) \underset{h \rightarrow 0}{=} B(f(t_0), g(t_0)) + h[B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0))] + o(h)$.

C'est la continuité de B qui permet, par exemple, d'affirmer que $B(f(t_0), o(h)) = o(h)$. ■

Exemples

| Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ deux fonctions dérivables. Si $E = \mathbb{R}^3$, $f \wedge g$ est dérivable sur I et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
Si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire sur E , $\langle f | g \rangle$ est dérivable sur I et $\langle f | g \rangle' = \langle f' | g \rangle + \langle f | g' \rangle$.

La propriété précédente s'étend à toute application multilinéaire.

Exercice 2

| Si E est un espace euclidien et f dérivable, $\|f\|$ est constante si et seulement si le vecteur vitesse f' est orthoradial, c'est-à-dire s'il est orthogonal à f en tout point.

Exercice 3

| Calculer $\Delta_n(x) = \det(A)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par $a_{i,j} = \frac{x^{i-j+1}}{(i-j+1)!}$ si $i \geq j-1$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

C – Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ **Définition 16.10**

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k -ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I .

Exercice 4

| Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^n$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'application g définie par $g(x) = (f(x) - f(0))/x$ si $x \neq 0$, $g(0) = f'(0)$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

Lorsque l'on multiplie f par une fonction λ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on retrouve un résultat bien connu.

Proposition 16.11 : Formule de Leibniz

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , $(\lambda \cdot f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{(k)} f^{(n-k)}$.

III | Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment

A – Définition et premières propriétés

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. de dimension p , il suffit d'intégrer les fonctions composantes (ce sont des fonctions numériques) dans une base prédéfinie :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^p f_i(t) e_i \right) dt = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$$

À condition bien entendu que le résultat ne dépende pas de la base choisie, ce que l'on admet !

Théorème / Définition 16.12 : Intégrale d'une fonction vectorielle continue

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue sur $[a, b]$, où E est un e.v.n. de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Le vecteur $\sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$, on l'appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$$

On retrouve les propriétés classiques de l'intégrale en raisonnant composante par composante, à l'exception de la positivité et de la croissance (propriétés découlant de la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$).

Théorème 16.13 : Propriétés de l'intégrale

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow E$ deux fonctions continues où $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. de dimension finie, avec $a < b$.

- (i) *Linéarité de l'intégrale* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$
- (ii) *Relation de Chasles* : $\forall c \in [a, b], \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$
- (iii) *Convergence des sommes de Riemann* : $\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$
- (iv) *Inégalité triangulaire* : $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$

Démonstration

Si les trois premières propriétés découlent directement d'un travail sur les fonctions composantes dans une base donnée, la dernière est un peu plus subtile. Appuyons-nous sur les sommes de Riemann en posant,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(t_k)$ où $t_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$.

Par inégalité triangulaire (discrète),

$$\|S_n(f)\| = \left\| \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(t_k) \right\| \leq \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \|f(t_k)\|$$

• Comme $S_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$ et $\|\cdot\|$ est continue, $\|S_n(f)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|$.

• De même, par continuité de $\|f\|$, $\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \|f(t_k)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \|f\|$.

On peut conclure en passant à la limite dans l'inégalité : $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$. ■

B – Intégrale fonction de sa borne supérieure

On retrouve également les théorèmes classiques de première année qui établissent le lien entre dérivation et intégration.

Théorème 16.14 : Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Théorème 16.15

Pour toute fonction $f : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.

C'est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 0 ! Il en découle presque immédiatement une autre propriété bien connue.

Corollaire 16.16 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| \leq M$, alors :

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M \cdot |b - a|$$

Démonstration

Soient $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. Alors,

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq M \cdot |b - a|$$

Si $b < a$, il suffit d'invertir les bornes de l'intégrale, la valeur absolue fait alors son œuvre. ■

C – Formules de Taylor

Théorème 16.17 : Formules de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a, x \in I$.

- Formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{avec } M = \sup_{t \in [a, b]} \|f^{(n+1)}(t)\|$$

- Formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

IV | Suites et séries de fonctions vectorielles

En vue de l'étude prochaine des équations différentielles, on généralise sommairement les résultats du chapitre « Suites et séries de fonctions » aux fonctions vectorielles.

Par la suite, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignera une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow E$ où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé supposé de dimension finie.

Définition 16.18 : Convergences simple et uniforme (suite de fonctions)

- On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

- On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sup_{x \in I} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in I, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

Outre le fait que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, on retrouve tous les résultats relatifs à la continuité, dérivabilité et intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. Par exemple :

Théorème 16.19 : Continuité de la limite uniforme

La limite uniforme d'une suite convergente de fonctions continues sur I est continue sur I .

On considère désormais la série de fonctions $\sum f_n$ où les fonctions f_n sont définies sur I et à valeurs dans E .

Définition 16.20 : Convergences simple, uniforme et normale

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I .

En cas de convergence, on appelle *fonction somme* de la série la fonction S définie par :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I .
- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, I}$ converge.

Bien entendu, si la série de fonctions converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I .

Théorème 16.21

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a .

Attention aux liens et confusions possibles avec la convergence absolue telle que définie dans le chapitre « Norme sur un espace vectoriel normé ».

On admet l'extension suivante du théorème.

Théorème 16.22 : Théorème de la double limite

Soient $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E et a un point adhérent à I (ou $a = \pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a .
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

S'ajoutent les deux théorèmes suivants de dérivation et d'intégration terme à terme *sur un segment*.

Théorème 16.23 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- $\sum f_n$ converge simplement sur I .
- $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Théorème 16.24 : Intégration terme à terme sur un segment

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans E , convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n(x) dx$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

Exercice 5

- Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M\| < 1$ pour une certaine norme sous-multiplicative, $\sum M^k$ converge et préciser sa somme.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 1$, et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que :

$$\forall r \geq R, \quad A^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{k+1} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta$$

- Retrouver le théorème de Cayley-Hamilton.

En revanche, le théorème de convergence dominée et son homologue, le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, ne s'appliquent pas dans le cadre du programme aux fonctions vectorielles.

V | Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

Rappelons la définition de l'exponentielle d'un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, ainsi que la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{et} \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

L'équivalence des normes en dimension finie nous assure, grâce à une norme bien choisie, la convergence absolue des séries sous-jacentes, donc l'existence de l'exponentielle. Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$, alors $\exp(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a))$. C'est peut-être une évidence, mais faisons observer que l'application $\exp(a)$ est bien linéaire.

Théorème 16.25 : Dérivation de $\exp(tA)$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction vectorielle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto A \times \exp(tA)$.

De même, si $a \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie, $t \mapsto \exp(ta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto a \circ \exp(ta)$.

Démonstration

Appliquons le théorème de dérivation terme à terme d'une série vectorielle en travaillant sur un segment.

Pour cela, soient $a \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \frac{t^n A^n}{n!}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et pour tout $t \in [-a, a]$, $f'_n(t) = \frac{n t^{n-1} A^n}{n!}$.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur $[-a, a]$ (vers la fonction $t \mapsto \exp(tA)$).
- Établissons la convergence normale (donc uniforme) de $\sum f'_n$ à l'aide d'une norme sous-multiplicative :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\| \frac{n t^{n-1} A^n}{n!} \right\| \leq \frac{|t|^{n-1} \|A^n\|}{(n-1)!} \leq \frac{a^{n-1} \|A\|^n}{(n-1)!}$$

La série numérique $\sum \frac{a^{n-1} \|A\|^n}{(n-1)!}$ converge donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

L'application $\varphi : t \mapsto \exp(tA)$ est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et donc plus globalement sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = A \times \exp(tA)$$

Lemme 16.26

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors A et $\exp(B)$ commutent.

Démonstration

En revenant aux sommes finies (polynômes de matrices) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A \times \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \times A$$

Un passage à la limite est concluant, en utilisant la continuité du produit (app. bilinéaire en dim. finie). ■

Proposition 16.27

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible. On pourrait s'appuyer sur un produit de Cauchy de séries matricielles (pas vraiment dans les clous vis-à-vis du programme). Choisissons un chemin de traverse.

Démonstration

Considérons l'application $\phi : t \mapsto \exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB)$. ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme les matrices A, B et $A+B$ commutent avec nos trois exponentielles,

$$\phi'(t) = (A+B)\phi(t) - A\phi(t) - B\phi(t) = 0$$

ϕ est donc constante sur $\mathbb{R}$. $\phi(0) = I_n$ donc $\phi(1) = \exp(A+B)\exp(-A)\exp(-B) = I_n$

- Pour $B = 0$, $\exp(A)\exp(-A) = I_n$. On vient d'établir que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et :

$$\exp(A) \times \exp(-A) = \exp(-A) \times \exp(A) = \exp(0) = I_n$$

- De l'égalité $\exp(A+B)\exp(-A)\exp(-B) = I_n$, on tire $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$. ■

En pratique, les calculs d'exponentielles ne sont pas toujours aisés. Néanmoins, si A et B sont semblables, alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ le sont également. En effet, si $A = P B P^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(P B P^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P B^n P^{-1}}{n!} = P \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!} \right) P^{-1} = P \exp(B) P^{-1}$$

par continuité de l'application linéaire $M \mapsto P M P^{-1}$ en dimension finie. D'où l'utile résultat suivant.

Proposition 16.28

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1} A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors, $\exp(A)$ est diagonalisable et :

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}$$

Plus généralement, en trigonalisant, $\text{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et on remarque que A et $\exp(A)$ partagent les mêmes vecteurs propres : si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ ,

$$A X = \lambda X \quad \text{et} \quad \exp(A) X = e^\lambda X$$

Plusieurs options sont donc envisageables pour calculer des exponentielles de matrices : calcul direct de $A^n/n!$ puis de la somme dans un contexte qui s'y prête, diagonalisation de la matrice pour appliquer le résultat ci-dessus, réduction de Dunford de la matrice en cas de non-diagonalisabilité ($A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $D N = N D$) puisqu'alors $\exp(A) = \exp(D) \exp(N) \dots$

Exercice 6

Calculer l'exponentielle des trois matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit $A \in \text{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Construire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.