Les Graphes

1 Généralités sur les graphes

Définitions

Un **graphe non orienté** est un ensemble de points reliés par des lignes. Ces points sont alors appelés des **sommets** et les lignes sont appelées les **arêtes**.
Le nombre de sommets du graphe est appelé **ordre**.
Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.
Quand deux sommets sont reliés par une arête on dit qu'ils sont **adjacents**.
Enfin, une **boucle** est une arête dont les extrémités ont le même sommet.

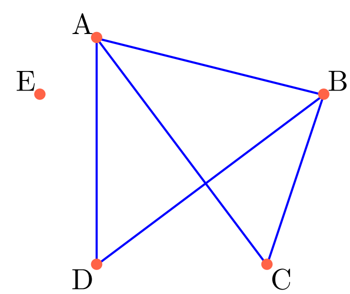
Exemple

Le graphe non orienté ci-contre est d'ordre 5 puisqu'il comporte 5 sommets.

Le degré des sommets A et B est de 3 alors que celui du sommet E est de 0.

B et C sont adjacents mais pas D et C.

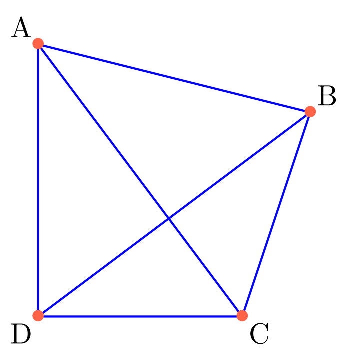
Il n'y a pas de boucle sur ce graphe.



Définition

On dit qu'un graphe est **complet** si tous les sommets sont adjacents entre eux.

Exemple



Tous les sommets sont reliés entre eux par une arête : il s'agit donc d'un graphe complet.

Propriété

La somme des degré de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes présentes dans ce graphe.

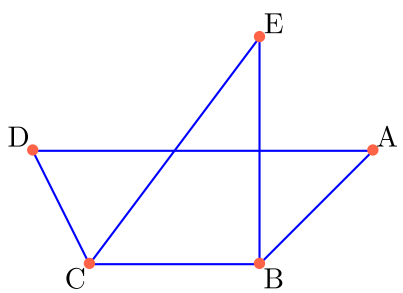
Exemple

On reprend l'exemple de la définition précédente.
Chacun des sommets a un ordre égal à 3. Leur somme est donc égale à 12.
Dans ce graphe, il y a 6 arêtes. Le double de 6 est bien égal à 12.

Définitions

On considère un graphe non orienté.
On appelle **chaîne** une succession d'arêtes mises les unes à la suite des autres.
La **longueur de la chaîne** est alors le nombre d'arêtes qui composent cette chaîne. Si ses extrémités coïncident, on parle de **chaîne fermée**.
Enfin, on appelle **cycle** une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

Exemple



Sur le graphe ci-contre, A - B - E est une chaîne de longueur 3.

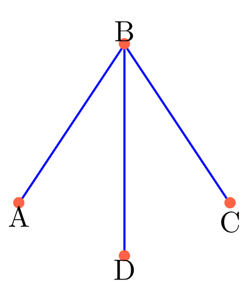
B - E - C - B est une chaîne fermée de longueur 3.

A - D - C - B - A est un cycle de longueur 4.

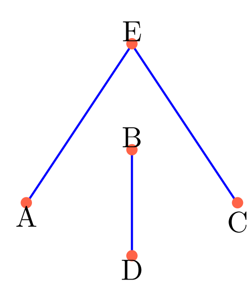
Définition

On dit qu'un graphe est **connexe** si chacun des sommets du graphe peut être relié à un autre par une chaîne.

Exemple



Ce premier graphe est connexe.
Chacun des sommets peut être relié à un autre par une chaîne.



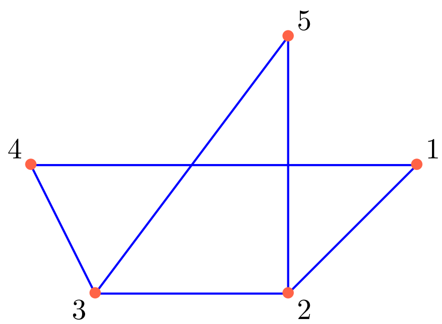
Ce n'est pas le cas de celui-ci.
I et H ne peuvent pas être reliés aux autres sommets du graphe.

2 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère un graphe non orienté d'ordre n où chacun des sommets est numéroté de 1 à n.
On appelle **matrice d'adjacence** associée à ce graphe la matrice carrée de taille n dont chaque coefficient a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Exemple



La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient a_{45} vaut 0 car aucune arête ne relie les sommets 4 et 5.

Remarque

On remarque que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

Propriété

On considère une matrice d'adjacence A d'un graphe non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
Le nombre de chemins (ou chaînes) de longueur p reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient a_{ij} de la matrice A^p, où $p \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration

Montrons cette propriété par récurrence.

Initialisation

Pour $p = 1$, $A^n = A$ qui est la matrice d'adjacence du graphe. Donc a_{ij} est, par définition, le nombre de chemins de longueur 1 reliant le sommet i au sommet j.

Hérédité

Supposons que pour un entier p supérieur ou égal à 1, la propriété soit vraie.

Démonstration : suite et fin

$$\left(a_{ij}^{(p+1)}\right) = A^{p+1} = A \times A^p = (a_{ij}) \times \left(a_{ij}^{(p)}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^{(p)}\right)$$

a_{ik} est le nombre de chemins de longueur 1 reliant le sommet i au sommet k.
$a_{kj}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur p reliant le sommet k au sommet j.
Donc $a_{ik}a_{kj}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur $p+1$ reliant le sommet i au sommet j en passant par le sommet k.
En sommant tous ces chemins, on montre que la proposition est héréditaire.

Conclusion

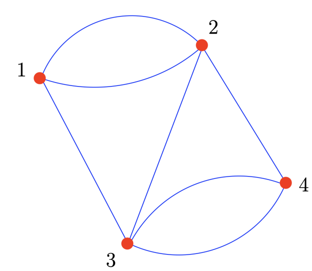
La proposition est vraie au rang 1 et est héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemple (d'après lycée d'adulte)

Les arêtes du graphe ci-contre représentent des pistes de ski de fond mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphe sont les différents points d'accès à ce domaine skiable.
On souhaite connaître le nombre de parcours de 6 km reliant le sommet 3 à lui-même.

La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



On en déduite que $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 14 & 5 \\ 16 & 8 & 11 & 14 \\ 14 & 11 & \mathbf{8} & 16 \\ 5 & 14 & 16 & 4 \end{pmatrix}$.

On a alors 8 parcours reliant le sommet 3 à lui-même.

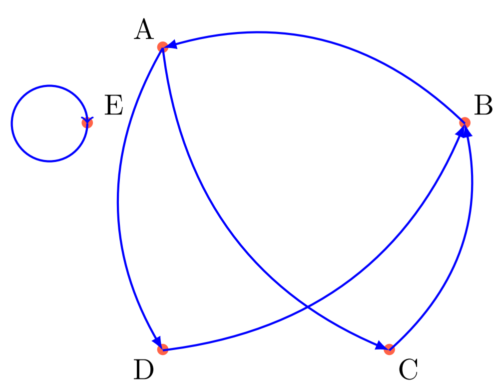
3 Graphes orientés, pondérés

Définitions

On dit qu'un graphe est **orienté** si ses arêtes sont affectés d'un sens.
Dans ce cas, les arêtes sont appelés les **arcs**. On appellera alors **chemin** une succession d'arcs et **circuit** un chemin fermé dont tous les arcs sont distincts.

Exemple

Le graphe ci-contre est un graphe orienté d'ordre 5.
Il y a une boucle sur le sommet E.
A−C−B est un chemin de longueur 2.
B−A−D−B est un circuit de longueur 3.

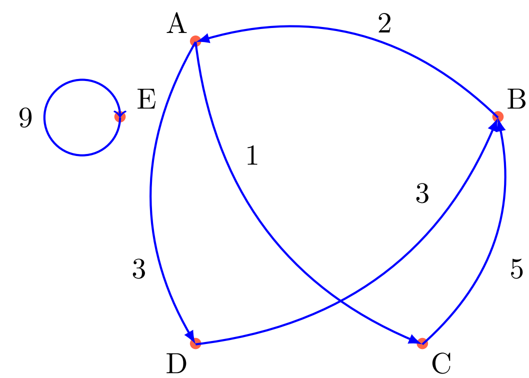


Définitions

On dit qu'un graphe est **pondéré** si ses arêtes sont affectées d'un nombre que l'on appelle alors **poids**.
Le **poinds** d'une chaîne (ou d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (ou des arcs) qui la constitue.

Exemple

Le graphe ci-contre est un graphe orienté pondéré.
Le poids entre le sommet D et B est de 3.
Le poids du chemin B−A−D−B est de 8 $(2 + 3 + 3)$.



Remarque

Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids le plus petit.

4 Chaîne de Markov

Définition

On appelle **graphe probabiliste** un graphe orienté pondéré tel que :

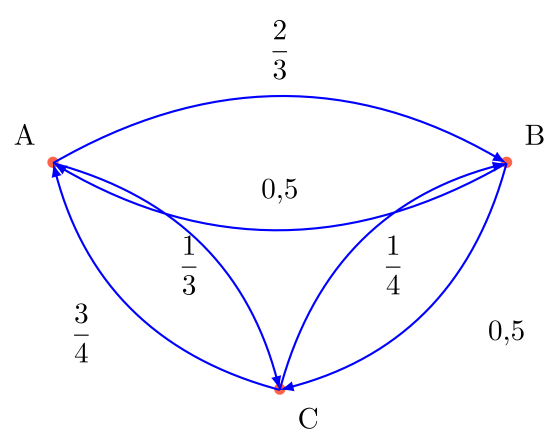
- Tous les poids sont des réels de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
- La somme des poids des chemins issus d'un sommet est égale à 1.

La matrice d'adjacence d'un tel graphe est alors appelée **matrice stochastique**.

Exemple

Le graphe ci-contre est un graphe probabiliste.
La somme des chemins issus de A est égale à 1, tout comme celle des chemins issus de B et de C.
La matrice d'adjacene de ce graphe est la suivante :
La somme des coefficients d'une même ligne est égale à 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$



Définitions

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) prenant des valeurs x_i où chaque x_i appartient à un ensemble fini E.
On suppose que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_0, X_1, ..., X_n)$ est la même que celle de X_{n+1} sachant X_n.
On dit alors que la suite de variables aléatoires (X_n) est une **chaîne de Markov** sur E.
E est appelé l'**espace d'états**.

Remarques

On peut aussi formuler cette définition de façon plus formelle :
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeur dans un ensemble fini dénombrable E. On dit que (X_n) est une chaîne de Markov si pour tout x_0, x_1, ..., x_{n+1} dans E, on a :

$$P\left(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\right) = P\left(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n\right).$$

Autrement dit, dans une chaîne de Markov, l'état à l'étape $n+1$ ne dépend que de celui à l'état n et non de ceux antérieurs. La probabilité de passer d'un état à un autre ne dépend donc pas de n.

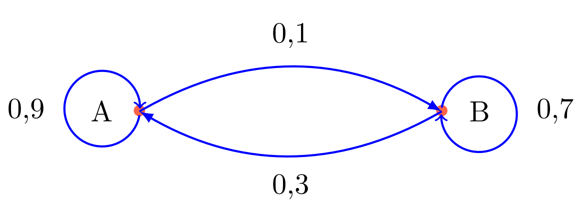
Définition

On appelle **distribution initiale** d'une chaîne de Markov (X_n) la loi de probabilité de X_0. Elle est représentée par une matrice ligne, souvent notée π_0.

Exemple

La maire de la ville de Jean-Kevin propose une carte jeune annuelle donnant droit aux 12-18 ans à des réductions dans certains magasins de la ville.
Ces dernières années, lors du renouvellement de la carte, on a constaté que 10% des possesseurs de la carte ne la rachètent pas. De plus, 30% de cette population qui ne la possédaient pas l'année précédente achètent la carte.
On fait l'hypothèse que l'effectif de la population des 12-18 ans est constant et que l'évolution va rester la même pour les prochaines années.
En 2018, 80% des jeunes 12-18 ans ne possèdent pas la carte.

Nous sommes dans une situation d'une chaîne de Markov à deux états. On note A l'état « posséder une carte jeune » et B l'état « ne pas posséder une carte jeune ». On a alors le graphe probabiliste associé à cette situation :



La distribution initiale est donnée par la matrice ligne suivante :

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Définition

On appelle **matrice de transition** d'une chaîne de Markov (X_n) la matrice carré d'ordre n dont le coefficient a_{ij} est la probabilité de transition situé sur l'arc reliant le sommet i vers le sommet j. Si l'arc n'existe pas, le coefficient est nul.

Exemple

En reprenant l'exemple de la carte jeune, la matrice de transition associée à la situation est la matrice carrée d'ordre 2 ci-dessous :

$$T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit (X_n) une chaîne de Markov de distribution initiale π_0 et dont la matrice de transition est notée T.
Soit k un entier naturel. On note π_k la matrice ligne des états à l'étape k.
La matrice ligne donnant la distribution à l'étape $k+1$ est :

$$\pi_{k+1} = \pi_k \times T$$

Démonstration

On se place dans le cas d'une chaîne de Markov à 3 états que l'on notera a, b et c.
Pour tout entier naturel k, les évènements $\{X_k = a\}$, $\{X_k = b\}$ et $\{X_k = c\}$ forment un système complet fini d'évènements.
Pour tout $x_j \in \{a\,;\,b\,;\,c\}$, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{k+1} = x_j) = P_{(X_k=a)}(X_{k+1} = x_j)P(X_k = a) + P_{X_k=b}(X_{k+1} = x_j)P(X_k = b) + P_{X_k=c}(X_{k+1} = x_j)P(X_k = c)$$

Ce qui est bien le j-ième coefficient de la matrice $\pi_k T$.

Propriété

Soit (X_n) une chaîne de Markov de distribution initiale π_0 et dont la matrice de transition est notée T.
Soit k un entier naturel. On note π_k la matrice ligne des états à l'étape k.
La matrice ligne donnant la distribution à l'étape k est :

$$\pi_k = \pi_0 T^k$$

Démonstration

On considère une chaîne de Markov à p états.

Initialisation

Pour $k = 0$, $T_0 = I_p$. On a donc bien $\pi_0 T^0 = \pi_0$.

Démonstration : suite et fin

Hérédite

Supposons que pour un entier naturel k, on ait $\pi_k = \pi_0 T^k$.

$$\begin{aligned}\pi_{k+1} &= \pi_k T \\ &= \pi_0 T^k T \\ &= \pi_0 T^{k+1}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$, elle est héréditaire.

Conclusion

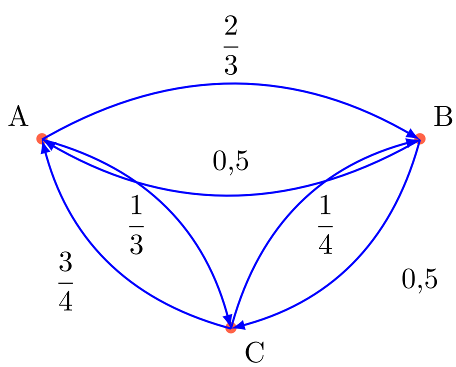
La propriété est vraie au rang $k = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang : elle est donc vraie pour tout entier naturel k.

Remarque

Si on note P la matrice de transition d'une chaîne de Markov, le coefficient (ij) de la matrice P^n est la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j en n transitions.

Exemple (d'après Maths et Tiques)

Dans une équipe de football, trois attaquants A, B et C se font des passes de façon aléatoire. Cette situation est représentée par le graphe ci-dessous.



La matrice de transition associée à cette situation est donc la suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Au début de la situation, c'est l'attaquant A qui a le ballon. La distribution initiale est donc $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On cherche la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la $3^{\text{ème}}$ passe.

A l'aide de la calculatrice, on trouve tout d'abord : $T^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$.

Puis $\pi_3 = \pi_0 \times T^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \end{pmatrix}$.

La probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la $3^{\text{ème}}$ passe est donc de $\frac{17}{72}$ soit environ 24%.

5 Distribution invariante

Définition

Soit (X_n) une chaîne de Markov convergente. On note T sa matrice de transition.
Si la suite (π_n) des états de cette chaîne vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n T$ alors la limite π de cette suite définit un **état stable** qui est solution de l'équation $\pi = \pi T$.
Quand une telle distribution π existe, on la nomme **distribution invariante** de la chaîne de Markov.

Exemple

On considère la matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$ d'une chaîne de Markov (X_n).

Supposons que cette chaîne possède un état stable $\pi \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. On a alors $\pi = \pi T$ et $x + y = 1$. On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} 0,94x + 0,14y & = & x \\ 0,06x + 0,86y & = & y \\ x + y & = & 1 \end{cases}$$

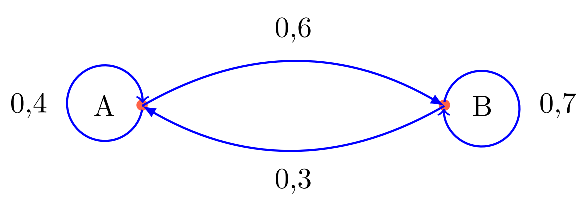
Après résolution, on trouve $x = 0,7$ et $y = 0,3$.

Propriété

On considère une chaîne de Markov à deux états de matrice de transition T. Soient p et q deux réels tout deux compris strictement entre 0 et 1.
On a $T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.
La suite des matrices lignes (π_n) des états d'une telle chaîne converge vers une distribution invariante π tel que $\pi = \pi T$.
De plus, π ne dépend pas de la distribution initiale π_0.

Exemple

On souhaite étudier la convergence de la chaîne de Markov représentée par le graphe orienté pondéré ci-dessous :



La matrice de transition associée est $T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. On pose (π_n) la suite des matrices lignes des états de cette chaîne de Markov.
On a donc $\pi_{n+1} = \pi_n T$. Soient p et q deux réels tels que $p + q = 1$.
L'état stage recherché est de la forme $\pi \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ et vérifie $\pi = \pi T$.

Exemple : suite et fin

On a donc $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. On obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p & = & 0,4p + 0,3q \\ q & = & 0,6p + 0,7q \end{array} \right.$$

On trouve alors $q = 2p$. Puisque $p + q = 1$ on obtient $1 - p = 2p$ soit $p = \dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{2}{3}$.

Autrement dit, quel que soit la distribution initiale, la probabilité d'être en A tend vers $\dfrac{1}{3}$ et la probabilité d'être en B tend vers $\dfrac{2}{3}$.

Exercices sur les graphes et calculs matriciels

> Modéliser à l'aide d'un graphe, d'une matrice

Exercice n°1

Jean-Kevin travaille beaucoup. Chaque année, il est susceptible de travailler à Abu Dhabi ou Bangkok.

- S'il travaille à Abu Dhabi, la probabilité qu'il y reste l'année suivante est de 0,7
- S'il travaille à Bangkok, la probabilité qu'il déménage à Abu Dhabi l'année suivante vaut 0,3.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Sachant qu'il travaille actuellement à Abu Dhabi, quelle est la probabilité qu'il y soit dans deux ans ?

Exercice n°2

Quand Jean-Kevin réussi son pénalty, il a deux chances sur trois de réussir le suivant. Mais s'il le rate, il n'a qu'une chance sur quatre de réussir le suivant.

1. Représenter cette situation par une chaîne de Markov.
2. Déterminer la matrice de transition associée.

Exercice n°3

Un essaim d'abeilles d'abeilles peut évoluer chaque année de trois manières qui s'exclue mutuellement. Il peut essaimer, produire du miel ou contracter une maladie. L'évolution suit les règles suivantes :

- s'il a essaimé l'année passée, il contracte une maladie l'année en cours avec une probabilité de 0,1 et il produit du miel avec une probabilité de 0,8 ;
- s'il a produit du miel l'année passée, il essaime avec une probabilité de 0,9 et contracte une maladie avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il a contracté une maladie l'année passée, il en contracte une nouvelle l'année en cours avec une probabilité de 0,03 et il produit du miel avec une probabilité 0,8.

La première année, un naturaliste observe que la ruche a essaimé.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit à nouveau en train d'essaimer lorsque le naturaliste reviendra trois années plus tard ?
2. Si on observe le développement de l'essaim sur une longue période, quelle proportion représentent les années où cet essaim a produit du miel ?

Exercice n°4

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».
Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :
vv90% des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;

- 15% des clients n'ayant pas le profil « consommateur bio » entraient dans la catégorie « consommateur bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20% des clients ont le profil « consommateur bio ».

Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

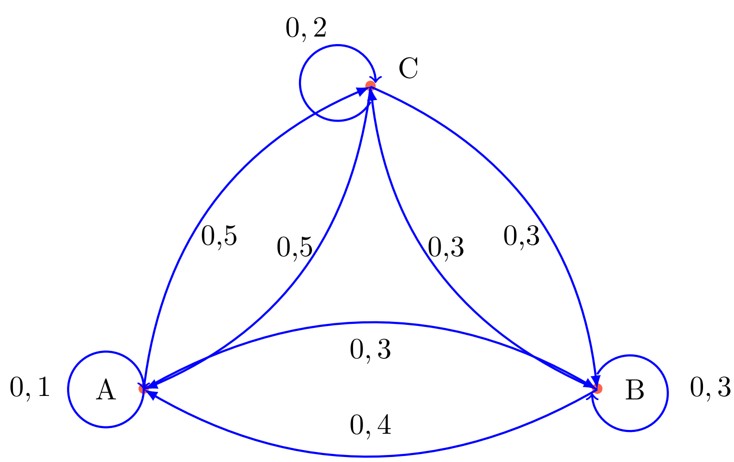
- b_n la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013 + n$ soit un « consommateur bio »
- c_n la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013 + n$ ne soit pas un « consommateur bio »
- P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} b_n & c_n \end{pmatrix}$ donnant l'état probabiliste lors de l'année $2013 + n$.

1. (a) Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».
   (b) Donner P_0 ainsi que la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.
   (c) On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».

> Les chaînes de Markov

Exercice n°5

On considère une marche aléatoire représentée par le graphe probabiliste ci-dessous :



On note a_n, b_n et c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n.

1. Déterminer une expression de chacun des termes a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant l'état à l'étape n.
   Déterminer la matrice A de transition telle que $U_{n+1} = U_n \times A$.
3. On note $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant l'état à l'étape n.
   Déterminer la matrice B de transition telle que $V_{n+1} = B \times V_n$.

Exercice n°6

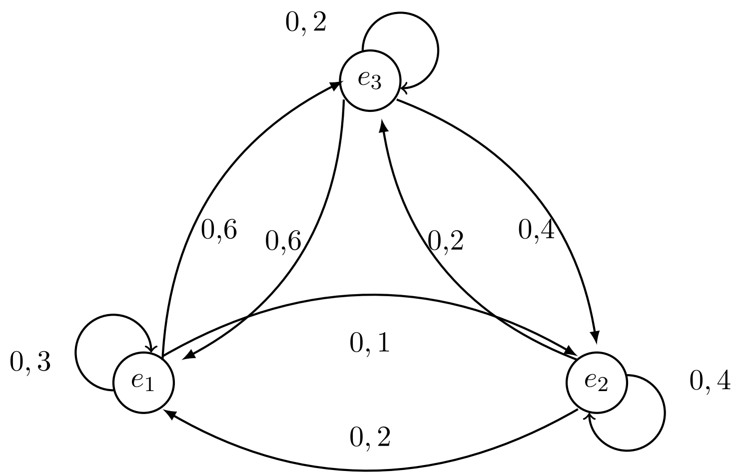
On considère deux gaz A et B qui en contact se transforme l'un en l'autre. Au départ, le mélange est composé de 20 l de gaz A et de 50 l de gaz B.
Un étude montre que chaque heure :

- 20% du gaz A se transforme en gaz B ;
- 60% du gaz B se transforme en gaz A.

1. Représenter la situation par un graphe pondéré.
2. Déterminer la matrice de transition associée.
3. Déterminer la composition du mélange au bout de 3 heures.

Exercice n°7

On considère une chaîne de Markov (X_n) dans l'espace des états $\{e_1\,;\,e_2\,;\,e_3\}$ dont les évolutions, étapes par étapes, des distributions sont représentées par le graphe pondéré ci-dessous :



1. Donner la matrice de transition A associée à ce graphe.
2. On note $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ la matrice représentant la distribution invariante de la chaîne (X_n).
   On donne également $B = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & -0,8 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\pi \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) A l'aide de la calculatrice, déterminer le déterminant de la matrice B.
   (c) Justifier l'équivalence entre les systèmes $\begin{cases} -0,7x + 0,2y + 0,6z = 0 \\ 0,1x - 0,6y + 0,2z = 0 \\ 0,6x + 0,4y - 0,8z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} -0,7x + 0,2y + 0,6z = 0 \\ 0,1x - 0,6y + 0,2z = 0 \\ 0,1x - 0,6y + 0,2z = 0 \end{cases}$
   (d) Que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions de ce système ?
3. On donne $C = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 1 \\ 0,2 & -0,6 & 1 \\ 0,6 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\pi \times C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que $C \times \begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & -1,3 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = I_3$.

(c) En déduire les coefficients de la matrice π.

> Utiliser le calcul matriciel

Exercice n°8 On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que : $\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$

1. On considère les matrices suivantes définies pour tout entier naturel n par $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 telle que pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n + B$.
2. (a) Montrer que la matrice $I_2 - A$ est inversible. On donnera l'expression de la matrice $(I_2 - 1)^{-1}$.
   (b) Déterminer la matrice X telle que $X = AX + B$.
   (c) Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, déterminer les valeurs de leur limite.
3. On considère la suite (V_n) de matrices colonnes définies pour tout entier naturel n par $V_n = X_n - X$. En déduire que pour tout entier naturel n on a $V_n = A^n \times V_0$.
4. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible.
   (b) On note D la matrice définie par $D = P^{-1} \times A \times P$. Donner une expression de D^n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n.
5. Si $x_0 = 1$ et si $y_0 = 2$, que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

Exercice n°9 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Effectuer le calcul $A \times B$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y - z & = & 5 \\ 3x + 6y - 4z & = & 13 \\ 2x + 5y - 3z & = & 11 \end{cases}$.

Exercice n°10

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2013 et b_n pour l'opérateur B.
On a ainsi $a_0 = b_0 = 300$.
Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} & = & 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note enfin $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

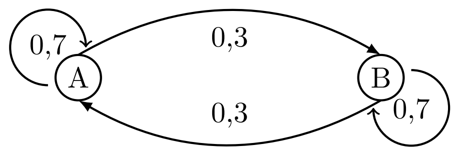
1. (a) Déterminer U_1.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = MU_n + P$.
2. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser sa matrice inverse.
   (c) Déterminer la matrice U telle que $U = MU + P$.
3. Pour tout entier naturel n on pose $V_n = U_n - U$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n on a $V_{n+1} = M \times V_n$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n on a $V_n = M^n \times V_0$.
4. On admet que pour tout entier naturel n on a $V^n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$.
   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).
   (b) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Correction des exercices sur les graphes et matrices

> Modéliser à l'aide d'un graphe, d'une matrice

Exercice n°1

1. On obtient le graphe probabiliste ci-dessous où A désigne Abu-Dhabi et B désigne Bangkok.

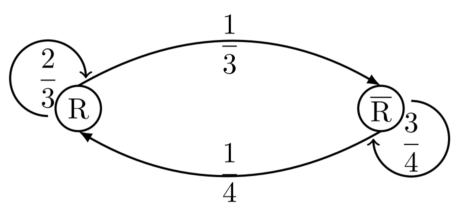


2. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

   D'après l'énoncé, la répartition initiale est donnée par la matrice ligne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Puis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,58 & 0,42 \end{pmatrix}$.
   La probabilité que Jean-Kevin soit à Abu Dhabi deux ans après est donc de 0,58.

Exercice n°2

1. En notant R il réussi son pénalty et $\overline{\text{R}}$ il le rate, on obtient le graphe suivant :



2. La matrice de transition associée est alors $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Exercice n°3

1. On peut traduire cette situation par une chaîne de Markov à 3 états dont la matrice de transition est la suivante : $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,17 & 0,8 & 0,03 \end{pmatrix}$. D'après l'énoncé, la distribution initiale est $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On cherche à déterminer P_3. Or, pour tout entier naturel n, on a $P_n = P_0 \times M^n$.
   En particulier, $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,26371 & 0,65 & 0,08629 \end{pmatrix}$.

   La probabilité que la ruche soit de nouveau en train d'essaimer trois ans plus tard est de 0,26371.

2. La matrice M ne contient aucun 0, donc la suite (P_n) des distributions converge vers la distribution invariante de cette chaîne de Markov. Notons la $P = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. On a $P = PM$ ce qui revient au système :

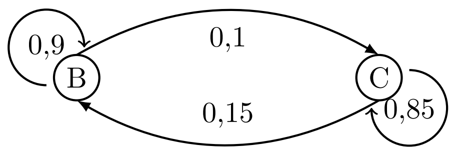
$$\left\{\begin{array}{rcl} 0,1a + 0,9b + 0,17c & = & a \\ 00,8a + 0,05b + 0,8c & = & b \\ 0,1a + 0,05b + 0,03c & = & c \end{array}\right.$$

A l'aide de ce système et puisque $a + b + c = 1$ on trouve $P \approx \begin{pmatrix} 0,47076 & 0,45714 & 0,07210 \end{pmatrix}$.

Si on observe l'essaim sur une longue période, il produira du miel $45,71\%$ du temps.

Exercice n°4

1. (a) On obtient le graphe suivant :



(b) On a $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

La matrice de transition associée est $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

(c) $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,825 & 0,0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

En 2015, la probabilité que le client choisi soit un « consommateur bio » est de 0,375.

> Les chaînes de Markov

Exercice n°5

1. On a $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,4b_n + 0,5c_n$
$b_{n+1} = 0,4a_n + 0,3b_n + 0,3c_n$
$c_{n+1} = 0,5a_n + 0,3b_n + 0,2c_n$

2. Prenons $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

$$U_n \times A = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

3. Prenons $B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

$$B \times V_n = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1a_n + 0,4b_n + 0,5c_n \\ 0,4a_n + 0,3b_n + 0,3c_n \\ 0,5a_n + 0,3b_n + 0,2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}$$

Exercice n°6

1. D'après l'énoncé, on a $a_0 = 20$ et $b_0 = 50$. On a ensuite :
$$\begin{cases} a_{n+1} & = & 0,8a_n + 0,6b_n \\ b_{n+1} & = & 0,2a_n + 0,4b_n \end{cases}$$
On a ainsi $a_1 = 0,8 \times 20 + 0,6 \times 50 = 46$ et $b_1 = 0,2 \times 20 + 0,4 \times 50 = 24$
Ensuite, on a $a_2 = 0,8 \times 46 + 0,6 \times 24 = 51,2$ et $b_2 = 0,2 \times 46 + 0,4 \times 24 = 18,8$
Enfin, on a $a_3 = 0,8 \times 51,2 + 0,6 \times 18,8 = 52,24$ et $b_3 = 0,2 \times 51,2 + 0,4 \times 18,8 = 17,76$.

2. A l'aide de la calculatrice, on trouve : $\begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,752 & 0,248 \\ 0,744 & 0,256 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 52,24 & 17,76 \end{pmatrix}$.

Exercice n°7

1. On a la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$.

2. (a) La matrice π associée à la distribution invariante est telle que $\pi \times A = \pi$.

   Ce qui est équivalent à $\pi \times A - \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \pi(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \pi \left[\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \pi \times \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \pi \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) En notant L_1 et L_3 respectivement la première ligne et la troisième ligne du système on remarque que $-L_1 - L_3 = -(-0,7x + 0,2y + 0,6z) - (0,6x + 0,4y - 0,8z) = 0$
   ce qui revient à $0,1x - 0,6y + 0,2z = 0$.
   Ainsi, la troisième ligne du second système est obtenue par combinaison linéaire des lignes du premier système : les deux systèmes sont donc équivalents.

   (c) Ce système étant équivalent à un système de deux équations à trois inconnues, son ensemble de solution est soit vide soit possède une infinité de solution.

3. (a) On a $C \times \pi = \begin{pmatrix} -0,7x + 0,2y + 0,6z & 0,1x - 0,6y + 0,2z & x + y + z \end{pmatrix}$.

   D'après la question 2.a, on a $-0,7x + 0,2y + 0,6z = 0$; $0,1x - 0,6y + 0,2z = 0$.
   Puisque x, y et z représentent la probabilité des trois états de l'espace des états de la distribution stable, on a $x + y + z = 1$.

(b) $C \times \begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & -1,3 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 1 \\ 0,2 & -0,6 & 1 \\ 0,6 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & -1,3 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = I_3.$

(c) π vérifie la relation $\pi \times C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui revient à $\pi \times C \times C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times C^{-1}$

ce qui revient à $\pi \times I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 1 \\ 0,2 & -0,6 & 1 \\ 0,6 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$

> Utiliser le calcul matriciel

Exercice n°8

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Puis $A \times X_n + B = \begin{pmatrix} x_n + y_n + 1 \\ -2x_n + 4y_n + 3 \end{pmatrix}$.

2. (a) $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de cette matrice est $0 \times (-3) - 2 \times (-1) = 2$. Ce déterminant est non nul donc la matrice $I_2 - A$ est inversible.

On a $(I_2 - A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(I_2 - A)} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Soit X telle que $X = AX + B$

$\Leftrightarrow \quad X - AX = B$

$\Leftrightarrow \quad (I_2 - A)X = B$

$\Leftrightarrow \quad (I_2 - A)^{-1} \times (I_2 - A)X = (I_2 - A)^{-1}B$

$\Leftrightarrow \quad I_2X = (I_2 - A)^{-1}B$

$\Leftrightarrow \quad X = (I_2 - A)^{-1}B$

$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Par passage à la limite, si la suite de matrice (X_{n+1}) converge et vérifie $X_{n+1} = AX_n + B$ alors elle converge vers la matrice X telle que $AX + B = X$.

Ainsi, si la suite (X_n) converge alors elle tend vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = -1$.

3. Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 0$, $A^0 \times V_0 = I_2 \times V_0 = V_0$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 0, on ait $V_n = A^n \times V_0$.

$V_{n+1} = X_{n+1} - X = AX_n + B - X = AX_n + B - (AX + B) = AX_n - AX = A(X_n - X) = AV_n = A(A^n \times V_0) = A^{n+1}V_0$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

4. (a) $\det(P) = 1 \times (-2) - 1 \times (-1) = -1$.
Le déterminant est non nul, donc P est inversible et on a :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b)
$$\begin{aligned} P^{-1} \times A \times P &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \times P \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \times P \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la puissance n-ième de la matrice diagonale D est $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

(c) Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 0$, on a $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$
Et $A^0 = I_2$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 0, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} \\ &= PDI_2D^nP^{-1} \end{aligned}$$

$= PD^{n+1}P^{-1}$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -3^n \\ 2^n & -2\times 3^n \end{pmatrix} \times P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -3^n \\ 2^n & -2\times 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 2^n - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2\times 3^n & -2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. On a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc $V_0 = X_0 - X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Puis $V_n = A^n \times V_0 = \begin{pmatrix} 2\times 2^n - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2\times 3^n & -2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2\times 3^n \\ -2^n + 4\times 3^n \end{pmatrix}$

   Par définition des suites, on obtient $V_n = X_n - X$ donc $X_n = V_n + X = \begin{pmatrix} -2^n + 2\times 3^n \\ -2^n + 4\times 3^n - 1 \end{pmatrix}$.

   Donc $x_n = -2^n + 2\times 3^n = 3^n\left(2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ et $y_n = -2^n + 4\times 3^n - 1 = 3^n\left(4 - \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right)$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

Exercice n°9

1. $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \quad A \times B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ La solution du système est donc $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$.

Exercice n°10

1. (a) $a_1 = 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 = 330$ et $b_1 = 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 = 280$.

   (b) $$M \times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0n2b_n \\ 0,1a_n + 0,6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

2. (a) $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) D'après la question précédente, la matrice $(I - M)$ est inversible est sa matrice inverse est $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Soit U la matrice telle que $U = MU + P$.

   $\Leftrightarrow \quad U - MU = P$

   $\Leftrightarrow \quad I_2U - MU = P$

   $\Leftrightarrow \quad (I_2 - M)U = P$

   $\Leftrightarrow \quad (I_2 - M)^{-1}(I_2 - M)U = (I_2 - M)^{-1}P$

   $\Leftrightarrow \quad U = (I_2 - M)P$

   $\Leftrightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

3. (a) $$V_{n+1} = U_{n+1} - U$$
   $$= MU_n + P - U$$
   $$= MU_n + P - (MU + P)$$
   $$= MU_n - MU$$
   $$= M(U_n - U)$$
   $$= MV_n$$

   (b) Montrons ce résultat par récurrence.

   Initialisation

   $M^0 \times V_0 = I \times V_0 = V_0$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 0, on ait $V_n = M^nV_0$.

$V_{n+1} = MV^n = M(M^nV_0) = M^{n+1}V_0$. La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

4. (a) Puisque $V_n = U_n - U$ alors $U_n = V_n + U = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\dfrac{50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

   On a donc $a_n = -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 380$.

   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 380$.

   (b) A long terme, l'opérateur A aura 380 milliers d'abonnés.