

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point-Développements limités Chapitre 6

Corrections exercices types

Exercice 1. exo 6-1

1. Soient $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = x^3$, montrons que $f(x) = o(g(x))$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{Donc } f(x) = o(g(x)).$$

2. Montrons que $e^{-\sqrt{x}} = o(\frac{1}{x^2})$. On a $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}}$.

On pose $X = \sqrt{x}$ alors, $X^2 = x$, $X^4 = x^2$, qd x tend vers $+\infty$, X aussi.

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^4}{e^X} = 0 \text{ par C.C.}$$

$$\text{Donc } e^{-\sqrt{x}} = o(\frac{1}{x^2}).$$

Exercice 2. exo 6-2

1. On a $\ln(x) = o(\sqrt{x})$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ par C.C ou par négligeabilités usuelles, on a $\ln(x) = o(x^\alpha)$ avec $\alpha = 1/2 > 0$.

2. On a d'après le cours que $x^\alpha = o(e^{\beta x})$, $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$.

Donc ici avec $\alpha = 3, \beta = 1$ on a $x^3 = o(e^x)$

3. On sait d'après le cours que : $\ln(x) = o(x^{1/12})$, d'où par opérations sur les négligeables :
 $(\ln(x))^3 = o(x^{3/12}) = o(x^{1/4})$.

4. On a d'après le cours que $\forall \alpha > 0$:

$$\ln(x) = o(\frac{1}{x^\alpha}) \text{ donc ici avec } \alpha = 3/2 \text{ on a : } \ln(x) = o(x^{-3/2}).$$

5. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$ par C.C.

$$\text{Donc } x^4 - x^2 + 2 = o(e^{x+1}).$$

6. On a $\frac{x^{3/2}}{e^{x^2}} = \frac{X^{3/4}}{e^X}$ en posant $X = x^2$ avec qd x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{e^{x^2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^{3/4}}{e^X} = 0 \text{ par C.C.}$$

$$\text{D'où : } x^{3/2} = o(e^{x^2}).$$

Exercice 3. exo 6-3 Trouver la limite en $-\infty$ de $\frac{x^2+1}{x^5}$ qui est une F.I. du type $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{On a que } \frac{x^2+1}{x^5} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} (\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}) \text{ et on sait que } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0; \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^5} = 0.$$

Exercice 4. exo 6-4

— Trouver la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

$$\text{On a } \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = 0.$$

— Trouver la limite en $+\infty$ de $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} e^{1/x} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$.

$$\frac{1}{x^2} e^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc par équivalent usuel } \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} e^{1/x} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} e^{1/x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}.$$

$$\text{Puis } \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'où}$$

$$\ln(1 + \frac{1}{x^2}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Finalement, par quotient d'équivalents : } \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} e^{1/x} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1/(2x^2)}{1/x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} e^{1/x} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Exercice 5. exo 6-5 Donnons le DL au voisinage de 0, à l'ordre 2 de f définie sur $] -1, +\infty[$, par : $f(x) = e^{-2x} \sqrt{1+x}$.

Il y a plusieurs méthodes pour trouver le DL en 0 à l'ordre 2 de f soit par DLs usuels (le plus court), soit par la formule de Taylor-Young (le plus long).

f est de classe C^2 sur $] -1, +\infty[$, par produit et composées de fonctions de classe C^2 sur $] -1, +\infty[$ (car $1+x > 0$).

Par DL usuels en 0 on a :

$$f(x) \underset{0}{=} (1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)) \times (1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - 2x - x^2 + 2x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2).$$

Par la formule de Taylor-Young :

$$\text{On a } f(x) \underset{0}{=} f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2).$$

On calcule :

$$\bullet f(0) = 1$$

$$\bullet f'(x) = -2e^{-2x} \sqrt{1+x} + \frac{e^{-2x}}{2\sqrt{1+x}}, \text{ donc } \bullet f'(0) = -\frac{3}{2}.$$

Puis :

$$\bullet f''(x) = 4e^{-2x} \sqrt{1+x} - \frac{e^{-2x}}{2\sqrt{1+x}} - \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x}} \text{ donc } \bullet f''(0) = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Ainsi par Taylor-Young : } f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2)$$

Exercice 6. exo 6-6

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right).$$

$$\text{On a : } \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)}.$$

Puis par DL usuel en 0 :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On en déduit que $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ d'où l'équivalent suivant :

$$\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \text{ et } x \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x^2.$$

$$\text{Ainsi par quotient d'équivalent : } \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 7. exo 6-7

1. Par DL usuel en 0, on a le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x)$:

$$f(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

2. DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $g(x) = \frac{e^x}{1+x} = e^x \times \frac{1}{1+x}$, par produit des DL usuels du cours au voisinage de 0 :

$$g(x) \underset{0}{=} (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \times (1 - x + x^2 + o(x^2)) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - x^2 + x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

3. DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $h(x) = x\sqrt{1+x}$, par produit des DL usuels du cours :

$$h(x) \underset{0}{=} x \times (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Exercice 8. 6-8 Nature d'une série

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

- On remarque tout d'abord que $\forall n \geq 1$, la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est positive. Car par un argument de concavité on a toujours : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
- Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}$ tend vers 0, donc on va utiliser le DL usuel du cours pour la fonction logarithme. On sait que $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, d'où le DL à l'ordre 2 de $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$ est : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
D'où le DL à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de u_n :
$$u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$
- Or la série de terme général $1/n^2$ est une série de Riemann convergente car ($\alpha > 1$) donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

Exercice 9. 6-9 Étude locale

Faire l'étude locale complète en 0 de la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$, par : $f(x) = e^{-2x} \sqrt{1+x}$.

- f est de classe C^2 sur $] -1, +\infty[$ par composée et produit de fonctions de classe C^2 sur $] -1, +\infty[$.
On fait un DL à l'ordre 2 en 0 de f , c'est un produit de DL usuels en 0 :
$$f(x) \underset{0}{=} (1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)) \times \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} 1 - 2x + 2x^2 + \frac{x}{2} - x^2 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$
$$f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2).$$
- D'où :
 $y = 1 - \frac{3}{2}x$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative C_f de la fonction f au point de coordonnées (0, 1).
- De plus, comme : $f(x) - (1 - \frac{3}{2}x) \underset{0}{=} \frac{7}{8}x^2 + o(x^2)$ avec $\frac{7}{8} > 0$, alors C_f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 10. 6-10

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-x} + xe^{\frac{1}{x}}$.
Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique et préciser la position de la courbe de la fonction f par rapport à cette asymptote.
On remarque tout d'abord que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.
Puis que quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0.
On va utiliser le DL usuel à l'ordre 2 au voisinage de 0 de e^x , donc ici en $\frac{1}{x}$ cela devient un DL en $+\infty$:
$$e^{\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi $f(x) \underset{+\infty}{=} e^{-x} + x \times \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$
$$f(x) \underset{+\infty}{=} e^{-x} + x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} 1 + x + e^{-x} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \frac{1}{2x}) = 0$ et $f(x) - (1+x) \underset{+\infty}{=} e^{-x} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
Par conséquent la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $+\infty$.
Et comme au voisinage de $+\infty$, $e^{-x} + \frac{1}{2x} > 0$, la courbe de f est au-dessus de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
- De même pour la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.
Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0.
On va utiliser le DL usuel à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$, donc ici en $\frac{1}{x}$ cela devient un DL en $+\infty$:
Ainsi $f(x) \underset{+\infty}{=} x \times \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$.

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{8x} = 0$ et $f(x) - (x + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Par conséquent la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

Et comme au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{8x} < 0$, la courbe de f est en dessous de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

📌 Annexe : règle sur les "o" :

$$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$$

$$o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$$

$$k \times o(x^2) = o(x^2)$$

$$x(a + bx + cx^2 + o(x^2)) = ax + bx^2 + o(x^2)$$

$$\frac{bx + cx^2 + o(x^2)}{x} = b + cx + o(x)$$

$$\frac{ax^2 + o(x^2)}{x^2} = a + o(1)$$