Étude d'équations fonctionnelles (Ecrin P 1995)

Durée : 4 heures

Notations du problème

On désigne par :

- F l'espace vectoriel réel des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$;
- E le sous-espace vectoriel de F constitué des applications polynomiales;
- E_n le sous-espace vectoriel de E des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n;
- $T : f \mapsto T(f)$ l'endomorphisme de F, où $T(f)$ désigne l'élément de F défini par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad T(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Les éléments de E peuvent aussi être considérés comme des polynômes.

Partie I.

On note Δ l'endomorphisme de E induit par T.

Question 1. Pour $P \in E$, calculer le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.

Question 2. Prouver que le noyau de Δ est égal à E_0.

Question 3. Montrer que Δ admet une unique valeur propre. Quel est le sous-espace propre associé ?

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que l'image par Δ de E_n est égale à E_{n-1}.

b) Établir que si l'on se donne un élément Q de E_{n-1} alors il existe un unique élément P de E_n tel que $Q = \Delta(P)$ et $P(0) = 0$.

Question 5. Application numérique

Déterminer $A \in E_3$ de sorte que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $A(x+1) - A(x) = x^2$ et $A(0) = 0$.

En déduire la valeur de $S(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II.

Question 6. Étude de l'injectivité de T

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note f_n l'élément de F défini par : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_n(x) = \cos(2\pi n x)$.

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \operatorname{Ker} T$, puis démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre dans F. $\operatorname{Ker} T$ est-il de dimension finie ?

Question 7. Étude de la surjectivité de T

On se donne un élément g de F et une fonction réelle ϕ définie sur $]0,1]$. Prouver qu'il existe un et un seul élément f de F tel que : $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \phi(x)$ et $T(f) = g$. T est-elle surjective ?

Question 8. Étude des valeurs propres de T

Soit λ un réel quelconque et $F(\lambda) = \left\{ f \in F \,\middle|\, T(f) = \lambda f \right\}$.

Démontrer qu'il existe un élément f de $F(\lambda)$ tel que : $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = 1$. Quelles sont les valeurs propres de T ?

Partie III.

Soit a un réel quelconque. On se propose de montrer qu'il existe un unique élément f_a de F vérifiant l'ensemble $\mathcal{C}_1(a)$ des conditions suivantes :

$$\mathcal{C}_1(a) \quad \begin{cases} \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ \mathrm{T}(f_a)(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_a(1) = a \\ f_a \text{ est croissante sur } \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Question 9. On suppose qu'il existe deux éléments ϕ et ψ de F vérifiant $\mathcal{C}_1(a)$, et on note $\delta = \phi - \psi$.

a) Prouver que pour tout $x \in \left]0,1\right]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta(x) = \delta(x+n)$, puis préciser $\delta(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]0,1\right]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \delta(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$, et en déduire que $\phi = \psi$.

Question 10. On suppose dans cette question uniquement qu'une fonction f_a vérifiant $\mathcal{C}_1(a)$ existe.
Déterminer la limite de f_a en 0. Déterminer la limite de f_a en $+\infty$. *On pourra utiliser la suite* $\left(f_a(n)\right)_{n\geqslant 1}$.

Question 11. On pose, pour $x \in \left]0,+\infty\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

a) Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\left]0,+\infty\right[$.

b) On pose, pour $x \in \left]0,+\infty\right[$: $f_a(x) = a - \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Vérifier que f_a est l'unique élément de F vérifiant $\mathcal{C}_1(a)$.

Question 12. Établir que f_a est continue sur $\left]0,+\infty\right[$.

Question 13. Prouver que f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0,+\infty\right[$ et que :

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[, \quad f_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Partie IV.

On se propose de montrer qu'il existe un unique élément g de F vérifiant l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des conditions suivantes :

$$\mathcal{C}_2 \quad \begin{cases} \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ \mathrm{T}(g)(x) = \ln(x) \\ g(1) = 0 \\ g \text{ est dérivable sur } \left]0,+\infty\right[\text{ et } g' \text{ est croissante sur } \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Question 14. Démontrer que si g vérifie $\mathcal{C}_2$ alors il existe un réel a de sorte que g' vérifie $\mathcal{C}_1(a)$.

Question 15. Démontrer qu'il existe un unique élément g de F vérifiant la condition $\mathcal{C}_2$ et que cette application g est obtenue pour $a = -\displaystyle\int_1^2 f_0(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 16. Établir que $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$.

Question 17. En déduire que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$, $g(x) = -\ln(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \right)$.

Partie V.

Question 18. Démontrer qu'il existe un unique élément h de F vérifiant l'ensemble $\mathcal{C}_3$ des conditions suivantes :

$$\mathcal{C}_3 \quad \begin{cases} \forall x \in \,]0,+\infty[\,,\ h(x+1) = xh(x) \\ \forall x \in \,]0,+\infty[\,,\ h(x) > 0 \\ h(1) = 1 \\ h \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \dfrac{h'}{h} \text{ est croissante sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

et exprimer h en fonction de g. Calculer $h(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On note, pour $x \in \,]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n(x) = \dfrac{(n+1)^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Question 19. Démontrer, en utilisant des résultats obtenus dans les parties précédentes, que pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = h(x)$.

Question 20. On se propose de calculer $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Pour cela on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n+1}}$ et en déduire que $\lim \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = 1$.

b) Calculer I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.

c) Exprimer $v_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n}}$ et de n. En déduire la valeur de $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$.