
I	Rappels de Sup	3
I.1	Espaces vectoriels, sous-espace vectoriel	3
I.2	Base d'un espace vectoriel	12
I.3	Dimension d'un espace vectoriel et rang d'une famille de vecteurs	18
	Existence des bases	19
	Toutes les bases ont le même nombre d'éléments	20
I.4	Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie	25
I.5	Applications linéaires	26
I.6	Isomorphismes en dimension finie	33
I.7	Théorème du rang	35
I.8	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel	37
I.9	Formes linéaires et hyperplans	40
II	Produit d'espaces vectoriels	43
II.1	Définition	43
II.2	Produit d'espaces vectoriels en dimension finie	44
III	Somme de sous-espaces vectoriels	45
III.1	Définition	45
III.2	Somme directe de sous-espaces vectoriels	45
III.3	Sommes directes en dimension finie	48
IV	Interpolation de Lagrange	52
IV.1	Position du problème	52
IV.2	Polynômes de Lagrange	52
IV.3	Déterminant de Vandermonde	55
V	Annexe	57
V.1	Testons l'IA sur ce chapitre	57
V.2	À la fin de ce chapitre,...	58

Algèbre linéaire

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$. Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de $\mathbb{K}$. Déterminant de Vandermonde.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points est le polynôme constant égal à 1. Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Rappels de Sup

I.1. Espaces vectoriels, sous-espace vectoriel



Définition 1.1 – Espace vectoriel

Soit E ensemble muni :

- d'une **loi de composition interne** notée « $+$ » : c'est-à-dire, une application : $E \times E \rightarrow E$
 $(x, y) \mapsto x + y.$

Cette loi est aussi appelée **addition**.

- d'une **loi externe** notée « $\cdot$ » : c'est-à-dire, une application : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$
 $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x.$

Cette loi est aussi appelée **multiplication par un scalaire**.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** (ou $\mathbb{K}$ -ev) lorsque :

- La loi de composition interne « $+$ » vérifie :

- La loi « $+$ » est **associative** :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z).$$

On pourra alors oublier les parenthèses et écrire $x + y + z$.

- La loi « $+$ » est **commutative** :

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x.$$

- La loi « $+$ » possède un **élément neutre** noté 0_E :

$$\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x.$$

- Pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que :

$$x + y = y + x = 0_E.$$

Un tel élément y est unique et est appelé l'**opposé de x** . On le note $-x$.

- La loi externe « $\cdot$ » vérifie :

- La loi « $\cdot$ » est **distributive par rapport à l'addition de E** :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y.$$

- La loi « $\cdot$ » est **distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$** :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x.$$

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $x \in E$, on a :

$$(\lambda \times \mu).x = \lambda.(\mu.x).$$

- 1 vérifie :

$$\forall x \in E, 1.x = x.$$

 Remarque 1.1

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

 Exemple 1.1 – Espaces vectoriels de référence

Notation	Espace vectoriel	Vecteurs	Vecteur nul
$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{K}^n$	n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$	$(0, \dots, 0)$
	$\mathbb{K}[X]$	Polynômes	Polynôme nul 0
$n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{K}_n[X]$	Polynômes de degré $\leq n$	Polynôme nul 0
$(n, p) \in \mathbb{N}^2$	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	Matrices n lignes p colonnes	Matrice nulle 0 ou $0_{n,p}$
$X \neq \emptyset$ E $\mathbb{K}$ -espace vectoriel	$E^X = \mathcal{F}(X, E)$	Fonctions de X dans E	Fonction nulle $x \mapsto 0$
I intervalle non vide	$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$	Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$	Fonction nulle $x \mapsto 0$
$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$	$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	Suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$	Suite nulle $(0)_{n \in \mathbb{N}}$

 Exercice 1.1 – Deux relations *triviales* à connaître

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit $x \in E$. Montrer que $0.x = 0_E$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\lambda.0_E = 0_E$.

Résolution

1. Par distributivité, on a :

$$0.x = (0 + 0).x = 0.x + 0.x.$$

On ajoute de chaque côté $-0.x$. Il vient :

$$0.x = 0_E.$$

2. Par distributivité, on a :

$$\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E.$$

On ajoute de chaque côté $-\lambda.0_E$. Il vient :

$$\lambda.0_E = 0_E.$$

 Définition 1.2 – Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une **combinaison linéaire** est une expression de la forme

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \dots + \lambda_n.u_n$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E .

Une **combinaison linéaire des vecteurs** $u_1, \dots, u_n$ est une expression de la forme

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \dots + \lambda_n.u_n$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires.

Théorème 1.1 – Caractérisations des sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On a l'équivalence : F est un **sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si, les trois points suivants sont vérifiés :

- ▶ F est **inclus** dans E : $F \subset E$.
- ▶ Le vecteur nul de E **appartient** à F : $0_E \in F$.
- ▶ **Stabilité par combinaison linéaire** :

$$\forall (u, v) \in F \times F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot u + v \in F.$$

♪ ♪ ♪ *Un sous-espace vectoriel est une partie non vide et stable par combinaison linéaire d'un espace vectoriel.*

Exemple 1.2

Les ensembles $\{0_E\}$ (appelé espace nul) et E sont des sous-espaces vectoriels de E . On les appelle **sous-espaces vectoriels triviaux** de E .

Remarque 1.2

Le vecteur nul appartient **toujours** à un sous-espace vectoriel.

Corollaire 1.1

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Méthode 1.1

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exercice 1.2

Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = x + y - 3z = 0\}$ est un espace vectoriel. Interpréter géométriquement cet ensemble.

Résolution

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- ▶ On a : $F \subset \mathbb{R}^3$.
- ▶ On a : $(0, 0, 0) \in F$ car $0 + 2 \times 0 + 0 = 0 + 0 - 3 \times 0 = 0$.
- ▶ Soient $(x_1, y_1, z_1) \in F$, $(x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a : $\lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\lambda \times x_1 + x_2, \lambda \times y_1 + y_2, \lambda \times z_1 + z_2)$. De plus,

$$\lambda \times x_1 + x_2 + 2(\lambda \times y_1 + y_2) + \lambda \times z_1 + z_2 = \lambda \times (x_1 + 2y_1 + z_1) + x_2 + 2y_2 + z_2.$$

Or $(x_1, y_1, z_1) \in F$ et $(x_2, y_2, z_2) \in F$. Donc, $x_1 + 2y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 + z_2 = 0$. D'où,

$$\lambda \times x_1 + x_2 + 2(\lambda \times y_1 + y_2) + \lambda \times z_1 + z_2 = 0.$$

De même, comme $(x_1, y_1, z_1) \in F$ et $(x_2, y_2, z_2) \in F$,

$$\lambda \times x_1 + x_2 + \lambda \times y_1 + y_2 - 3(\lambda \times z_1 + z_2) = \lambda \times \underbrace{(x_1 + y_1 - 3z_1)}_{=0} + \underbrace{(x_2 + y_2 - 3z_2)}_{=0} = 0.$$

Ainsi, $\lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in F$.

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, c'est un espace vectoriel.

Il s'agit de l'intersection de deux plans vectoriels distincts, donc une droite vectorielle.

**Exercice 1.3**

Montrer que $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\}$ est un espace vectoriel.

Résolution

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On a : $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- La suite nulle converge vers 0 donc celle-ci appartient à F .
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Par définition, $\lambda.(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \times u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite.
De plus, par opération sur les limites, $\lambda \times u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc, $\lambda.(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$.

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est un espace vectoriel.

 Exemple 1.3

Le théorème 1.1 page 5 permet aussi de montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

Par exemple, l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \times y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il ne contient pas le vecteur nul $(0, 0)$.

**Définition 1.3 – Intersection et union d'ensembles**

Soit X un ensemble.

On considère A et B deux parties de X .

- On note :

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \quad \text{« } A \text{ inter } B \text{ »}.$$

Soit $x \in X$. On a l'équivalence :

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

- On note :

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad \text{« } A \text{ Union } B \text{ »}.$$

Soit $x \in X$. On a l'équivalence :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

On considère $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties indexée par un ensemble I .

- On note :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in I, x \in A_i\} \quad \text{« intersection des } A_i \text{ »}.$$

Soit $x \in X$. On a l'équivalence :

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i.$$

- On note :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I, x \in A_i\} \quad \text{« Union des } A_i \text{ »}.$$

Soit $x \in X$. On a l'équivalence :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i.$$

Remarque 1.3

Avec les notations précédentes,

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B \quad \text{et} \quad \forall i \in I, A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i,$$

de plus,

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B \quad \text{et} \quad \forall i \in I, \bigcap_{i \in I} A_i \subset A_i.$$

Théorème 1.2 – Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un espace vectoriel.

Démonstration

Soit I un ensemble d'indices et $(F_i)_{i \in I}$ des sous-espaces vectoriels de E . On note $F = \bigcap_{i \in I} F_i$.

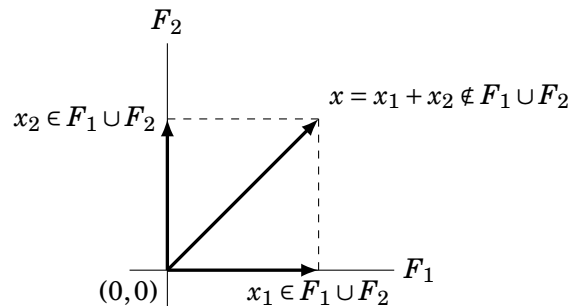
- Pour tout $i \in I$, $F_i \subset E$, donc, $F \subset E$.
- Pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$, donc, $0_E \in F$.
- Soient $(u, v) \in F \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $i \in I$, $(u, v) \in F_i \times F_i$. Or, pour tout $i \in I$, F_i est un sous-espace vectoriel de E , donc $\lambda.u + v \in F_i$. D'où, $\lambda.u + v \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E . □

Attention – En général, l'union de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel

Donnons un contre-exemple : on note $E = \mathbb{R}^2$ et on considère $F_1 = \{(x, y) \in E \mid y = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in E \mid x = 0\}$ deux sous-espaces vectoriels de E .

Les vecteurs $x_1 = (1, 0)$ et $x_2 = (0, 1)$ appartiennent à $F_1 \cup F_2$ mais $x_1 + x_2 = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$.



Exercice 1.4

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Résolution

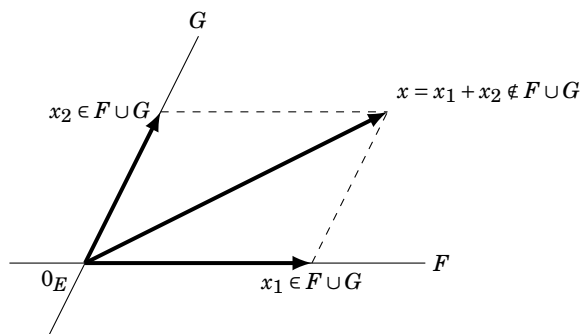
($\Leftarrow$) On suppose que $F \subset G$ ou $G \subset F$. Montrons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E .

- Supposons que $F \subset G$. Dans ce cas, $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Supposons que $G \subset F$. Dans ce cas, $F \cup G = F$ est un sous-espace vectoriel de E .

Dans les deux cas, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E .

($\Rightarrow$) On raisonne par contraposée. On suppose que $F \not\subset G$ ou $G \not\subset F$. Montrons que $F \cup G$ n'est un sous-espace vectoriel de E .

Comme $F \not\subset G$, il existe $x_1 \in F$ tel que $x_1 \notin G$.
De même, comme $G \not\subset F$, il existe $x_2 \in G$ tel que $x_2 \notin F$.
Notons $x = x_1 + x_2$. Montrons par l'absurde que $x \notin F \cup G$.



- Supposons que $x \in F$. On a : $x_2 = x - x_1$ avec $x \in F$ et $x_1 \in F$.
Comme F est un sous-espace vectoriel de E , on sait que $x_2 \in F$. Contradiction.
- Supposons que $x \in G$. On a : $x_1 = x - x_2$ avec $x \in G$ et $x_2 \in G$.
Comme G est un sous-espace vectoriel de E , on sait que $x_1 \in G$. Contradiction.

Il existe donc deux vecteurs x_1 et x_2 de $F \cup G$ tels que $x_1 + x_2 \notin F \cup G$.

Donc, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Théorème 1.3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

On note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ ou $\text{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$:

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration

On utilise le théorème 1.1 page 5 :

- Comme E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, toute combinaison linéaire de vecteurs de E appartient à E , donc $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset E$
- En prenant $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, on a :

$$0_E = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k \in E$$

- Soient $(u, v) \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \times \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$u = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k \quad \text{et} \quad v = \sum_{k=1}^n \mu_k \cdot u_k.$$

D'où,

$$\lambda \cdot u + v = \sum_{k=1}^n \underbrace{(\lambda \times \lambda_k + \mu_k)}_{\in \mathbb{K}} \cdot u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Ainsi, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E . □

Exercice 1.5

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

Montrer que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent les vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$.

Résolution

On note F l'intersection des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent les vecteurs $u_1, \dots, u_n$.

Par le théorème 1.2 page 7, F est un sous-espace de E .

De plus, par définition de F , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_i \in F$.

Donc, par stabilité par combinaison linéaire, toute combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$ appartient à F . D'où,

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset F.$$

D'autre part, par le théorème 1.3 page 8, on a montré que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E . De plus, les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ appartiennent à $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Donc,

$$F \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Remarque 1.5

Cet exercice montre que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $u_1, \dots, u_n$: autrement dit, si H est un sous-espace vectoriel de E qui contient $u_1, \dots, u_n$, alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset H$.



Définition 1.4 – Espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

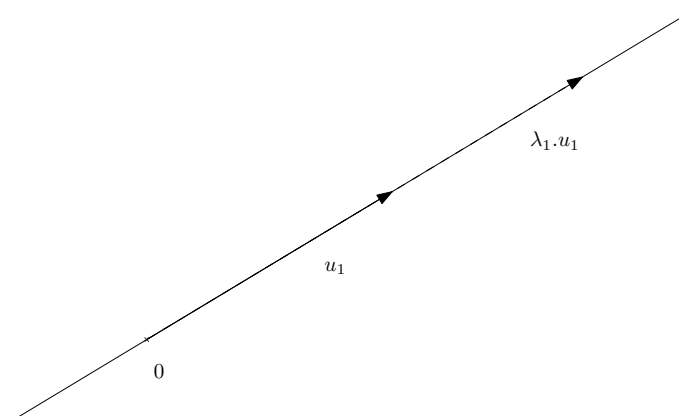
Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . L'ensemble $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est appelé **espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$** .

Exemple 1.4

► Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

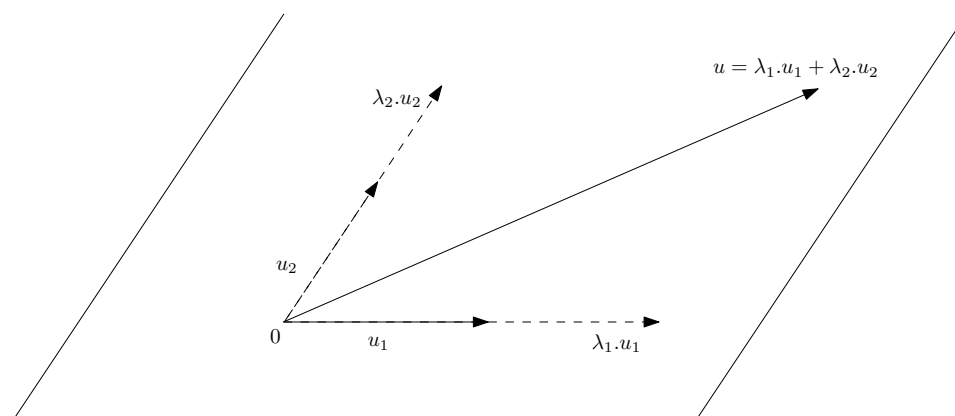
Si $u_1 \in E$, alors

$$\text{Vect}(u_1) = \{\lambda_1 \cdot u_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{K}\}.$$



Si $(u_1, u_2) \in E^2$, alors

$$\text{Vect}(u_1, u_2) = \{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}.$$



► Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel engendré par $1, X, \dots, X^n$ est $\mathbb{R}_n[X]$.

► On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\text{Vect}(I_3, A, A^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \gamma \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$



Exercice 1.6

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. $F_1 = \{(a, a+b, 2b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & -b \\ c & b & a+b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

3. F_3 l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Résolution

1. On a :

$$F_1 = \{a \cdot (1, 1, 0) + b \cdot (0, 1, 2) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 2)).$$

Donc, F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On a :

$$F_2 = \left\{ a \cdot I_3 + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Donc, F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ sont 1 et 2. Donc, les solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda \times e^{2x} + \mu \times e^x.$$

Donc, en notant $\varphi : x \mapsto e^{2x}$ et $\psi : x \mapsto e^x$, on a :

$$F_3 = \text{Vect}(\varphi, \psi).$$

Donc, F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque 1.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un vecteur non nul de E . L'ensemble $\text{Vect}(u)$ est noté $\mathbb{K}u$.



Méthode 1.2 – Reconnaître un « Vect » pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel

Dans l'exercice précédent, l'idée est toujours la même. En effet, les éléments des trois ensembles F_i sont définis par leur expression (on connaît « la forme » des vecteurs). Dans ce cas, repérer un sous-espace vectoriel engendré est très simple et évite d'utiliser le théorème 1.1 page 5.

L'autre intérêt réside dans le fait que cette technique donne une famille génératrice (Définition 1.8 page 16) de l'espace.



Théorème 1.4 – Propriétés des « Vect »

► Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . L'espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ ne change pas lorsqu'on effectue sur les vecteurs de la famille l'une des opérations suivantes :

(i) changer l'ordre des vecteurs,

- (ii) multiplier un vecteur par un scalaire **non nul**.
- (iii) ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des **autres** vecteurs.
- (iv) supprimer un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

► **Égalité importante** : Soient $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On a :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Voir page 45 pour la définition de la somme $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n)$.

Démonstration

►

- (i) Conséquence de la commutativité de l'addition.
- (ii) Soit $\mu \neq 0$. Montrons que $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{Vect}(\mu.u_1, u_2, \dots, u_n)$.
Soit $x \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i . u_i = \mu . \left(\frac{\lambda_1}{\mu} . u_1 \right) + \sum_{i=2}^n \lambda_i . u_i \in \text{Vect}(\mu.u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Donc,

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) \subset \text{Vect}(\mu.u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Soit $x \in \text{Vect}(\mu.u_1, u_2, \dots, u_n)$. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \lambda_1 . (\mu.u_1) + \sum_{i=2}^n \lambda_i . u_i = (\lambda_1 \times \mu) . u_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i . u_i \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Donc,

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) \supset \text{Vect}(\mu.u_1, u_2, \dots, u_n).$$

(iii) Clair.

- (iv) Pour simplifier les notations, on renumérote les vecteurs et on suppose que u_1 est combinaison linéaire de $u_2, \dots, u_n$ (cela est justifié par le point (i)).

On a : $u_1 = \mu_2 . u_2 + \dots + \mu_n . u_n$.

On a clairement $\text{Vect}(u_2, \dots, u_n) \subset \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Soit $x \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que :

$$x = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2 + \dots + \lambda_n . u_n = \lambda_1 . (\mu_2 . u_2 + \dots + \mu_n . u_n) + \lambda_2 . u_2 + \dots + \lambda_n . u_n \in \text{Vect}(u_2, \dots, u_n).$$

Ainsi,

$$\text{Vect}(u_2, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

► Un vecteur de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n)$ est la somme d'une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ et d'une combinaison linéaire des vecteurs $u_{k+1}, \dots, u_n$. Il s'agit donc d'une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$.

Donc,

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

L'inclusion réciproque est justifiée par l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i . u_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i . u_i + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i . u_i.$$

□

I.2. Base d'un espace vectoriel

Définition 1.5 – Famille libre

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

- On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** lorsque : pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k = 0_E \implies [\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0].$$

On dit également que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont **linéairement indépendants**.

- Lorsque la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée** ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont **linéairement dépendants**.

Proposition 1.1

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . On suppose que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Alors, pour tout vecteur $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ **unique** tel que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i$.

♪ ♪ ♪ *Tout vecteur de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$.*

Démonstration

Soit $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Par définition, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i$.

Pour montrer l'unicité, on suppose qu'il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot u_i$. Montrons que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = \mu_i$.

On remarque que :

$$0_E = v - v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i - \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) \cdot u_i.$$

Par liberté de la famille $(u_1, \dots, u_n)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i - \mu_i = 0$. Autrement dit, $\lambda_i = \mu_i$. □

Méthode 1.3

- Pour montrer qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, on considère une combinaison linéaire quelconque de ses vecteurs qu'on suppose nulle.

Pour cela, on écrit **toujours** : « Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n = 0_E$ ». C'est notre **hypothèse** (H).

On montre alors qu'on aboutit à la **conclusion** (C) : $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ (tous les scalaires sont nuls).

Pendant la démonstration de (H) $\Rightarrow$ (C), on peut utiliser les définitions et propriétés des vecteurs u_i ou des théorèmes.

- Pour montrer qu'une famille de vecteurs est liée, il suffit de trouver une combinaison linéaire nulle de ses vecteurs dont les scalaires sont non tous nuls.

Exercice 1.7

Dans $\mathbb{C}^3$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, 2)$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Résolution

Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois nombres complexes. On suppose que :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 = (0, 0, 0).$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0. \end{cases}$$

Après résolution du système linéaire, on obtient, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc,

la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

**Exercice 1.8**

Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère les vecteurs $u_1 = \sin$ et $u_2 = \cos$. Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre.

Résolution

Soit λ_1 et λ_2 deux réels. On suppose que :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 = \tilde{0}, \quad (\text{I.1})$$

où $\tilde{0}$ est la fonction nulle. On évalue (I.1) en 0. On obtient alors $\lambda_2 = 0$.

D'où, $\lambda_1.u_1 = \tilde{0}$. Or, la fonction $\sin$ n'est pas la fonction nulle. Donc, $\lambda_1 = 0$. Ainsi,

la famille (u_1, u_2) est libre.

**Exercice 1.9**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit (u_1, u_2, u_3) une famille libre de E . On pose $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = u_1 + u_3$ et $v_3 = u_2 + u_3$. Étudier la liberté de la famille (v_1, v_2, v_3) .
2. Soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de E . On pose $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = u_1 + u_4$ et $v_3 = u_2 + u_3$ et $v_4 = u_3 + u_4$. Étudier la liberté de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) .

Résolution

1. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda.v_1 + \mu.v_2 + \nu.v_3 = 0_E.$$

D'où,

$$(\lambda + \mu).u_1 + (\lambda + \nu).u_2 + (\mu + \nu).u_3 = 0_E.$$

Or, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Donc,

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0. \end{cases}$$

Après résolution, $\lambda = \mu = \nu = 0$.

La famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

2. On a : $v_1 + v_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = v_2 + v_3$. D'où, $v_1 + v_4 - v_2 - v_3 = 0_E$.
On a trouvé une famille de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1, -1, -1, 1)$ non tous nuls vérifiant

$$\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \lambda_3.v_3 + \lambda_4.v_4 = 0_E.$$

La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée.

**Définition 1.6 – Vecteurs colinéaires**

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u et v deux vecteurs de E .

On dit que u et v sont *colinéaires* lorsque :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda.v \quad \text{ou} \quad \exists \mu \in \mathbb{K}, v = \mu.u.$$

Autrement dit, u est un multiple de v ou lorsque v est un multiple de u .

**Exercice 1.10**

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u et v deux vecteurs de E .

Montrer que u et v sont colinéaires si, et seulement si,

$$v = 0_E \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda.v.$$

Résolution

($\Rightarrow$). On suppose que u et v sont colinéaires. On sait alors que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda.v \quad \text{ou} \quad \exists \mu \in \mathbb{K}, v = \mu.u.$$

On raisonne par disjonction de cas :

- Cas 1 : $v = 0_E$, et c'est terminé.
- Cas 2 : $v \neq 0_E$.

Par hypothèse, on a $u = \lambda.v$ ou $v = \mu.u$.

Si la première égalité est vraie, alors c'est terminé.

Si la seconde égalité est vraie, alors $\mu \neq 0$ (car $v \neq 0$) et $u = \frac{1}{\mu}.v$ et c'est terminé.

($\Leftarrow$) On suppose que

$$v = 0_E \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda.v.$$

En posant $\mu = 0$, on a montré que u et v sont colinéaires.

**Remarque 1.7**

Il ne faut pas oublier la condition $v = 0_E$! En effet, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 0)$ sont colinéaires mais il n'existe pas de scalaire α tel que $u = \alpha.v$.

**Proposition 1.2**

1. Une famille composée d'au moins un vecteur nul est liée.
2. Une famille composée d'un seul vecteur non nul est libre.
3. Une famille composée de deux vecteurs non colinéaires est **libre**.
4. Si une famille est liée, alors un des vecteurs de la famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

Démonstration

1. Soit $(u_1, \dots, u_n, 0_E)$ une famille de E . On a :

$$0.u_1 + \dots + 0.u_n + 1.0_E = 0_E.$$

Donc, $(u_1, \dots, u_n, 0_E)$ est liée.

2. Soit $u \neq 0_E$ dans E . On suppose qu'il existe $\lambda \in E$ tel que $\lambda.u = 0_E$.

On sait alors que $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$.

Comme $u \neq 0$, on a : $\lambda = 0$.

Donc, la famille (u) est libre.

3. Soient u, v deux vecteurs non colinéaires de E . On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\lambda.u + \mu.v = 0_E.$$

Par l'absurde, on suppose que $\lambda \neq 0$, alors $u = -\frac{\mu}{\lambda}.v$. Contradiction : u et v sont non colinéaires.

Donc, $\lambda = 0$, d'où, $\mu.v = 0_E$.

Donc, $\mu = 0$ et $v = 0_E$.

Comme u et v sont non colinéaires, $v \neq 0_E$, donc, $\mu = 0$.

Ainsi, (u, v) est libre.

4. On sait qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires et $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

$$\lambda_{i_0} \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_n.u_n = 0_E.$$

En notant $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_{i_0}}$, on a :

$$u_{i_0} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n \mu_k.u_k.$$

□



Exercice 1.11

Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et v un vecteur de E . La famille $(u_1, \dots, u_n, v)$ est libre si, et seulement si, $v \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Résolution

($\Rightarrow$) Montrons la contraposée. On suppose que : $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k.u_k$. D'où,

$$v + \sum_{k=1}^n (-\lambda_k).u_k = 0_E$$

On a donc trouvé une combinaison linéaire nulle des vecteurs $u_1, \dots, u_n, v$ dont les scalaires sont non tous nuls. La famille $(u_1, \dots, u_n, v)$ est liée.

($\Leftarrow$) On suppose que $v \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Soit $(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\lambda.v + \sum_{k=1}^n \lambda_k.u_k = 0_E$.

Par l'absurde on montre que $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors $v = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right).u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Contradiction avec $v \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Donc, $\lambda = 0$, puis $\sum_{k=1}^n \lambda_k.u_k = 0_E$. Or, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ainsi, la famille la famille $(u_1, \dots, u_n, v)$ est libre.



Proposition 1.3

1. Toute sous-famille d'une famille libre est une famille libre.
2. Toute sur-famille d'une famille liée est une famille liée.

Démonstration

1. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre. On en extrait une famille de $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ vecteurs. Quitte à renuméroter les vecteurs, on considère la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_p.u_p = 0_E$. On se ramène à une combinaison linéaire nulle des vecteurs $u_1, \dots, u_n$:

$$0_E = \lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_p.u_p = \lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_p.u_p + 0.u_{p+1} + \dots + 0.u_n.$$

La liberté de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ implique que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

2. Clair.

□

**Définition 1.7 – Famille de polynômes échelonnée en degré**

On dit qu'une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ est **échelonnée en degré** lorsque :

$$0 \leq \deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n).$$

**Théorème 1.5**

Une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre.

Démonstration

On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: « une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre ».

Initialisation. $n = 0$. Soit (P_0) une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré. Alors, $0 \leq \deg(P_0)$. Donc $P_0 \neq 0$. Ainsi, la famille (P_0) est composée d'un seul vecteur non nul, c'est une famille libre : $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Soit $(P_0, \dots, P_n, P_{n+1})$ une famille de polynôme échelonnée en degré. La famille de polynômes $(P_0, \dots, P_n)$ est alors échelonnée en degré. Par hypothèse de récurrence, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_k)$.

Donc, $P_{n+1} \notin \text{Vect}(P_0, \dots, P_n)$.

On en déduit que la famille $(P_0, \dots, P_n, P_{n+1})$ est libre (voir exercice 1.11 page 15) : $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Ce qui achève la récurrence. $\square$

**Définition 1.8 – Famille génératrice**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une **famille génératrice de E** lorsque $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

♪ ♪ ♪ *Tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$:*

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k.$$

On dit aussi que la famille $\mathcal{F}$ **engendre E** .

**Proposition 1.4**

Toute sur-famille d'une famille génératrice est une famille génératrice.

**Définition 1.9 – Base**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une **base de E** lorsqu'elle est libre et génératrice de E .

**Remarque 1.8**

Un même espace vectoriel peut posséder plusieurs bases.

**Exercice 1.12**

1. Donner différentes bases de $\mathbb{K}^2$.
2. Donner différentes bases de $\mathbb{K}^n$.
3. Donner différentes bases de $\mathbb{K}_n[X]$.

Résolution

- Les familles $((1,0),(0,1))$ et $((1,0),(1,1))$ sont des bases de $\mathbb{K}^2$.
En effet, elles sont composées de $2 = \dim(\mathbb{K}^2)$ vecteurs non colinéaires de $\mathbb{K}^2$.
- On note :

$$e_1 = (1,0,\dots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0) \quad \dots \quad e_n = (0,\dots,0,1).$$

On note également :

$$\varepsilon_1 = (1,0,0,\dots,0), \quad \varepsilon_2 = (1,1,0,\dots,0), \quad \varepsilon_3 = (1,0,1,0,\dots,0) \quad \dots \quad \varepsilon_n = (1,0,\dots,0,1),$$

et

$$u_1 = (1,0,0,\dots,0), \quad u_2 = (1,1,0,\dots,0), \quad u_3 = (1,1,1,0,\dots,0) \quad \dots \quad u_n = (1,\dots,1),$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Montrons que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \cdot \varepsilon_n = (0, \dots, 0).$$

En travaillant coordonnée par coordonnée, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \dots + \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \vdots & & \\ \lambda_n & = & 0 \end{array} \right.$$

On en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Donc, la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est libre. Elle est de plus composée de $n = \dim(\mathbb{K}^n)$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Par la proposition 1.5 page 23,

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Montrons que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n = (0, \dots, 0).$$

En travaillant coordonnée par coordonnée, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \dots + \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_2 + \dots + \lambda_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_n & = & 0 \end{array} \right.$$

On en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Donc, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre. Elle est de plus composée de $n = \dim(\mathbb{K}^n)$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Par la proposition 1.5 page 23,

$(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

3.

Théorème 1.6

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

La famille $\mathcal{F}$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$:

$$\forall u \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k.$$

Démonstration

L'existence vient du caractère générateur de la famille (Définition 1.8 page 16).

L'unicité vient de la liberté de la famille (Proposition 1.1 page 12). □

Remarque 1.9

L'existence des scalaires λ_k est assurée par le caractère générateur de la famille $(u_1, \dots, u_n)$.

L'unicité des scalaires λ_k est assurée par le caractère libre de la famille $(u_1, \dots, u_n)$.

**Définition 1.10 – Coordonnées d'un vecteur dans une base**

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in E$.

On appelle **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** l'unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k$.

Exemple 1.5

On note $E = \mathbb{K}_n[X]$. La famille de polynômes non nuls $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est échelonnée en degré. Par le théorème 1.5 page 16, c'est une famille libre de E . De plus, elle engendre $\mathbb{K}_n[X]$. C'est une base.

Les coordonnées d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ dans la base $\mathcal{B}$ sont ses coefficients $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

1.3. Dimension d'un espace vectoriel et rang d'une famille de vecteurs**Définition 1.11 – Dimension finie**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On dit que E est de **dimension finie** lorsque E possède une famille génératrice finie.
- Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemple 1.6 – Espaces vectoriels de référence

1. $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie. Une famille génératrice finie est sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ où :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Une famille génératrice finie est sa base canonique $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position ligne i colonne j qui vaut 1.
3. $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie. Une famille génératrice finie est sa base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.
4. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Montrons-le par l'absurde.

On suppose qu'il existe une famille génératrice finie $(P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$.

On note $N = \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_n))$. Tout polynôme de $\text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$ est alors de degré inférieur ou égal à N .

D'où $X^{N+1} \in \mathbb{K}[X]$ et $X^{N+1} \notin \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$.

Donc, $\mathbb{K}[X] \neq \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$: contradiction (la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est supposée génératrice de $\mathbb{K}[X]$).

Remarque 1.10

Dans la définition d'espace vectoriel de « dimension finie », on ne définit pas ce qu'est la « dimension » d'un espace vectoriel.

Pour aboutir à cette définition, on commence par montrer deux propriétés : si E est un espace de dimension finie et si $E \neq \{0_E\}$,

- alors il existe des bases de E .
- alors toutes les bases de E possèdent le même nombre de vecteurs.

Existence des bases

Lemme 1.1

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E .

Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E , alors on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E en utilisant des vecteurs de $\mathcal{G}$.

Démonstration

Donnons une démonstration algorithmique de ce résultat. On note $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_p)$.

Étape 1 :

- **Cas 1 :** si g_1 appartient à $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, alors on ne complète pas la famille $(u_1, \dots, u_n)$ et on pose $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0$.
- **Cas 2 :** si g_1 n'appartient pas à $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors (voir exercice 1.11 page 15) la famille $(u_1, \dots, u_n, g_1)$ est libre. On pose alors $\mathcal{F}_1 = (u_1, \dots, u_n, g_1)$.

Dans les deux cas, la famille $\mathcal{F}_1$ est libre.

Étape 2 : on recommence l'étape précédente avec g_2

- **Cas 1 :** si g_2 appartient à $\text{Vect}(\mathcal{F}_1)$, alors on ne complète pas la famille $\mathcal{F}_1$ et on pose $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$.
- **Cas 2 :** si g_2 n'appartient pas à $\text{Vect}(\mathcal{F}_1)$ alors (voir exercice 1.11 page 15) la famille $\mathcal{F}_2$, composée des vecteurs de $\mathcal{F}_1$ et g_2 , est libre.

Dans les deux cas, la famille $\mathcal{F}_2$ est libre.

On continue ainsi de suite jusqu'à avoir testé tous les vecteurs de $\mathcal{G}$. Cette procédure s'arrête car $\mathcal{G}$ contient un nombre fini de vecteurs et, par construction, la famille $\mathcal{F}_p$ obtenue à la fin de l'algorithme :

- est libre,
- est composée uniquement des vecteurs de $\mathcal{F}$ et des éventuels vecteurs de $\mathcal{G}$ qui ont été ajoutés.

De plus, toujours par construction, $\text{Vect}(\mathcal{F}_p)$ contient les vecteurs $g_1, \dots, g_p$. D'où,

$$E = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p) \subset \text{Vect}(\mathcal{F}_p) \subset E.$$

Donc, $E = \text{Vect}(\mathcal{F}_p)$: la famille $\mathcal{F}_p$ engendre E .

Ainsi, la famille $\mathcal{F}_p$ engendre E et est libre, c'est une base et cette base est composée des vecteurs de $\mathcal{F}$ et des éventuels vecteurs de $\mathcal{G}$ qui ont été ajoutés. □

Théorème 1.7 – Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$.

Toute famille libre de E peut-être complétée en une base de E .

Démonstration

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E .

Comme E est de dimension finie, il existe $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E .

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.1 page 19. □

Théorème 1.8

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ possède une base.

Démonstration

Par hypothèse il existe u un vecteur non nul de E . La famille (u) est donc libre (car composée d'un seul vecteur non nul). On applique alors le théorème de la base incomplète pour obtenir une base de E . $\square$

🔗 Théorème 1.9 – Théorème de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$.

De toute famille génératrice finie de E , on peut extraire une base de E .

Démonstration

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E .

Comme $E \neq \{0_E\}$, il existe $u \in \mathcal{G}$ non nul. La famille $\mathcal{F} = (u)$ est alors libre.

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.1 page 19. $\square$

Toutes les bases ont le même nombre d'éléments**Lemme 1.2**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose qu'il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E .

1. Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E .
2. Toute famille de plus de $n + 1$ vecteurs de E est liée.
3. Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Démonstration**Montrons 1.**

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E .

- (i) On sait que $(e_1, \dots, e_n)$ engendre E , donc le vecteur u_1 s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$:

$$u_1 = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$.

Le vecteur u_1 est un vecteur d'une famille libre. Donc, $u_1 \neq 0_E$.

On en déduit qu'un des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est non nul.

Quitte à renuméroter les vecteurs de la famille $e_1, \dots, e_n$ (cette opération ne modifie pas le caractère générateur de la famille), on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$.

On en déduit que

$$e_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot (u_1 - \alpha_2 \cdot e_2 - \dots - \alpha_n \cdot e_n).$$

D'où,

$$\text{Vect}(u_1, e_2, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = E.$$

Donc, $(u_1, e_2, \dots, e_n)$ engendre E .

- (ii) On recommence avec u_2 . Comme $(u_1, e_2, \dots, e_n)$ engendre E ,

$$u_2 = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \dots + \beta_n \cdot e_n$$

où $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$.

La famille (u_1, u_2) est une sous-famille d'une famille libre. Donc, (u_1, u_2) est une famille libre.

On en déduit qu'un des scalaires $\beta_2, \dots, \beta_n$ est non nul. Comme précédemment, quitte à renuméroter les vecteurs $e_2, \dots, e_n$, on peut supposer $\beta_2 \neq 0$. On a alors :

$$e_2 = \frac{1}{\beta_2} \cdot (\beta_1 \cdot u_1 - \beta_3 \cdot e_3 - \dots - \beta_n \cdot e_n).$$

D'où,

$$\text{Vect}(u_1, u_2, e_3, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, e_2, \dots, e_n) = E.$$

Donc, $(u_1, u_2, e_3, \dots, e_n)$ engendre E .

- (iii) On recommence avec u_3 , puis $u_4, \dots, u_k$ où on montre que, $(u_1, u_2, \dots, u_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E .
Après n étapes, on a alors remplacé les vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ par les vecteurs de la famille $(u_1, \dots, u_n)$. Donc,

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = E.$$

On en déduit que $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E .

Or, $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre.

Donc, $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E .

Montrons 2.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ avec $p > n$ une famille de vecteurs de E .

Par l'absurde, on suppose que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

En particulier, la sous-famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

D'après 1, $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E .

En particulier, $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E et

$$u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Donc, $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est une famille liée. Contradiction : $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est une sous-famille d'une famille libre.

Le point 3 est la contraposée de 2. □

Théorème 1.10

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Démonstration

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ deux bases de E .

- La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de E donc par théorème, la famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ possède au plus p vecteurs. Donc $n \leq p$.
- De même, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E et la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, donc $p \leq n$.

Ainsi, $n = p$ et les deux bases considérées ont le même nombre d'éléments. □

Définition 1.12 – Dimension

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. On appelle **dimension de E** , et on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$, le cardinal d'une de ses bases.
- Par convention, lorsque $E = \{0_E\}$, on pose $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim(E) = 0$.

Exemple 1.7

1. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .
2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \times p$.
3. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n + 1$.

Exercice 1.13

1. Déterminer la dimension de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$.
2. Déterminer la dimension de $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } x - 2z = 0\}$.
3. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaire supérieure.
4. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n .
5. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n .

Résolution

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) \in F \iff x = -y - 2z \iff (x, y, z) = y \cdot (-1, 1, 0) + z \cdot (-2, 0, 1).$$

Donc, $F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$.

La famille $((-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ engendre F . De plus, c'est une famille composée de **deux** vecteurs non colinéaires, donc il s'agit d'une famille libre.

Ainsi,

$((-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ est une base de F et $\dim(F) = 2$. C'est un plan vectoriel.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) \in G \iff \begin{cases} y = -x \\ z = \frac{1}{2}x \end{cases} \iff (x, y, z) = x \cdot \left(1, -1, \frac{1}{2}\right).$$

Donc, $G = \text{Vect}\left(1, -1, \frac{1}{2}\right) = \text{Vect}(2, -2, 1)$.

La famille $((2, -2, 1))$ engendre G . De plus, c'est une famille composée d'**un** vecteur non nul, donc il s'agit d'une famille libre.

Ainsi,

$((2, -2, 1))$ est une base de G et $\dim(G) = 1$. C'est une droite vectorielle.

3. Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a :

$$T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \iff \forall (i, j) \in [1, n]^2, [i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0] \iff T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \iff T = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} t_{i,j} \cdot E_{i,j}$$

où $E_{i,j}$ désigne les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi, $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$.

Ainsi, $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ engendre $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

De plus, c'est une sous-famille de la base $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Il s'agit donc d'une famille libre.

Ainsi, $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et

$$\dim(\mathcal{T}_n(\mathbb{K})) = \text{Card}(\{(i, j) \in [1, n]^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}) = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

4. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j} E_{i,j}$

On a $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Ce qui est équivalent à

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} \underbrace{(E_{i,j} + E_{j,i})}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \sum_{i=1}^n a_{i,i} \underbrace{E_{i,i}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})}.$$

Pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$, on note $S_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$ si $i < j$ et $S_{i,i} = E_{i,i}$ sinon.

L'équivalence précédente montre que la famille $(S_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

De plus, s'il existe $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{i,j} S_{i,j} = 0_n$, alors, en remontant les calculs précédents,

on a, $\lambda_{i,j} = 0$, pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$.

Donc, $(S_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une famille libre. Donc, $(S_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

On en déduit que

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \text{Card}(\{(i, j) \in [1, n]^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}) = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

5. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j} E_{i,j}$

On a $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$ (en particulier $a_{i,i} = 0$).

Ce qui est équivalent à

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} \underbrace{(E_{i,j} - E_{j,i})}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}.$$

Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on note $T_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$.

L'équivalence précédente montre que la famille $(T_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

De plus, s'il existe $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} T_{i,j} = 0_n$, alors, en remontant les calculs précédents,

on a, $\lambda_{i,j} = 0$, pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

Donc, $(T_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une famille libre. Donc, $(T_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

On en déduit que

$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \text{Card}\left(\{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\}\right) = \frac{n \times (n-1)}{2}.$$

Remarque 1.11

1. On dit qu'un espace vectoriel de dimension 1 est une **droite vectorielle**.
2. On dit qu'un espace vectoriel de dimension 2 est un **plan vectoriel**.



Proposition 1.5

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.
2. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.

Démonstration

- Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est de dimension n , donc, il possède une base $(e_1, \dots, e_n)$. Cette base est en particulier une famille génératrice de E composée de n vecteurs. D'après le lemme 1.2 page 20, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.
- Soit $(g_1, \dots, g_p)$ une famille génératrice de E . Par le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base de E . Comme E est de dimension n , cette base, qui est une famille libre, est composée de n vecteurs. Donc, par le lemme 1.2 page 20, $p \geq n$. $\square$

Remarque 1.12

Dans un espace vectoriel de dimension finie, il ne peut pas exister de famille libre composée de n vecteurs pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.8 – $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est échelonnée en degré. C'est donc une famille libre de $\mathbb{K}[X]$. On en déduit que $\mathbb{K}[X]$ ne peut pas être de dimension finie : c'est un espace vectoriel de dimension infinie.



Théorème 1.11 – Caractérisation des bases

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ (E n'est pas réduit à $\{0_E\}$) et $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E . On a les équivalences :

$\mathcal{F}$ est une base de $E \iff \mathcal{F}$ est libre et possède n vecteurs $\iff \mathcal{F}$ engendre E et possède n vecteurs.

Démonstration

- Montrons que $\mathcal{F}$ est une base de E si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est libre et possède n vecteurs.
- Par définition de base, si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors $\mathcal{F}$ est libre. De plus, $n = \dim(E)$ donc $\mathcal{F}$ possède n vecteurs.
 - Réciproquement, on suppose que $\mathcal{F}$ est libre et possède n vecteurs. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B}$ de E . Or, cette base contient $n = \dim(E)$ vecteurs. Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ ont donc le même nombre de vecteurs et $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. D'où, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de E .
- Montrons que $\mathcal{F}$ est une base de E si, et seulement si, $\mathcal{F}$ engendre E et possède n vecteurs.
- Par définition de base, si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors $\mathcal{F}$ engendre E . De plus, $n = \dim(E)$ donc $\mathcal{F}$ possède n vecteurs.
 - Réciproquement, on suppose que $\mathcal{F}$ engendre E et possède n vecteurs. Par le théorème de la base extraite, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{B}$ de E . Or, cette base contient $n = \dim(E)$ vecteurs et $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F} = \mathcal{B}$: $\mathcal{F}$ est une base de E .

□

💡 Exemple 1.9 – Formule de Taylor pour les polynômes

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$. La famille $(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$.

C'est donc une famille libre composée de $n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs. Par théorème, $(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ est une base de E .

On en déduit que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ (unique) tel que :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k (X-a)^k.$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$P^{(j)} = \sum_{k=j}^n a_k \times k \times (k-1) \times \dots \times (k-j+1) \times (X-a)^{k-j}.$$

Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en évaluant en a cette égalité entre polynômes, on a : $P^{(j)}(a) = a_j \times j!$. Ainsi,

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \times (X-a)^k : \text{Formule de Taylor pour les polynômes.}$$

Remarque : les coordonnées de P dans la base $(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ sont $\left(P(a), \frac{P'(a)}{1!}, \dots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right)$.

**Définition 1.13 – Rang d'une famille de vecteurs**

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (quelconque) et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **rang de la famille de vecteurs** $\mathcal{F}$ la dimension de $\text{Vect}(\mathcal{F})$, le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1, \dots, u_p$. On le note $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ ou $\text{rg}(\mathcal{F})$.

👁 Remarque 1.13

Une famille génératrice finie de l'espace vectoriel $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est la famille $(u_1, \dots, u_p)$: cet espace vectoriel est donc de dimension finie. On note q sa dimension. Par la proposition 1.5 page 23, on a

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = q \leq p$$

Théorème 1.12 – Rang, familles libres et familles génératrices

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

1. On a : $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \min(p, n)$.
2. La famille $\mathcal{F}$ engendre E si, et seulement si, $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$.
3. La famille $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si, $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$.

Démonstration

1. D'après la remarque précédente, on a $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$.

Soit $(e_1, \dots, e_q)$ une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Il s'agit donc d'une famille libre de E . Or, E est de dimension n . Donc, $q \leq n$.

Or, par définition du rang, $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = q$.

Ainsi,

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq \min(p, n).$$

2. ($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ engendre E . Alors, $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Donc, par définition du rang,

$$n = \dim(E) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p).$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose que $n = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

Par hypothèse, une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ possède $n = \dim(E)$ vecteurs. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une telle base.

Or, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E et possède n vecteurs : par théorème, c'est une base de E . Donc, $(e_1, \dots, e_n)$ engendre E et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$: autrement dit,

$$E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Ainsi, $(u_1, \dots, u_p)$ engendre E .

3. ($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Par définition, elle est aussi génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. C'est donc une base de cet espace vectoriel. Donc, par définition du rang,

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = p.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose que $p = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

Par hypothèse, une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ possède p vecteurs.

Or, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et possède $p = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$ vecteurs.

Par théorème, $(u_1, \dots, u_p)$ est une base, et est donc en particulier une famille libre. □

Remarque 1.14

Dans le chapitre 3, nous rappellerons une méthode algorithmique pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs : la méthode de Gauß.

I.4. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 1.13

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Tout sous-espace vectoriel F de E est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- De plus,

$$F = E \iff \begin{cases} F \subset E \\ \dim(E) = \dim(F). \end{cases}$$

Démonstration

- Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrons que F est de dimension finie.

Si $F = \{0_E\}$, c'est terminé (F est de dimension nulle).

On suppose maintenant que $F \neq \{0_E\}$.

On considère A l'ensemble des cardinaux des familles libres de F .

Comme $F \neq \{0_E\}$, il existe $u \neq 0_E$ tel que $u \in F$. La famille (u) est libre. Donc, $1 \in A$ et A est non vide.

De plus, on sait qu'une famille libre de E possède au plus $n = \dim(E)$. Donc, A est majoré par n .

Ainsi, A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. Par théorème, il possède un plus grand élément noté p . Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de F .

Par l'absurde, on suppose que $(e_1, \dots, e_p)$ n'est pas une famille génératrice de F . Autrement dit, il existe $v \in F$ tel que $v \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Or, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, donc, $(e_1, \dots, e_p, v)$ est encore une famille libre de F . Cette famille contient $p + 1$ vecteurs, ce qui contredit la maximalité de p .

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est finie et engendre F , donc F est de dimension finie.

De plus, $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E . Par théorème, on a $p \leq n$.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre et engendre F , c'est donc une base de F . Par définition de dimension, $\dim(F) = p$. On a bien l'inégalité :

$$p = \dim(F) \leq \dim(E).$$

► ($\Rightarrow$) Si $E = F$, alors on a bien $\dim(E) = \dim(F)$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F (où $p = \dim(F)$).

Par hypothèse, $p = \dim(E)$. Donc, $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre (car c'est une base de F) composée de $\dim(E)$ vecteurs.

Par théorème, c'est une base de E . Ainsi,

$$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = E.$$

□

Remarque 1.15

Pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, on montre qu'il y a une inclusion et égalité des dimensions.



Exercice 1.14

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 3))$ sont égaux.

Résolution

► La famille $((1, 0, 1), (1, 1, 3))$ engendre G et est constituée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de G . On en déduit que G est de dimension 2.

► De plus, un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à F si, et seulement si, $(x, y, z) = (-2y + z, y, z) = y \cdot (-2, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 1)$.
Donc, $F = \text{Vect}((-2, 1, 0), (1, 0, 1))$.

On en déduit que la famille $((-2, 1, 0), (1, 0, 1))$ engendre F .

Or, elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Donc, $((-2, 1, 0), (1, 0, 1))$ est une base de F .

On en déduit que F est de dimension 2.

► De plus, on a $(1, 0, 1) \in F$ et $(1, 1, 3) \in F$. Donc, $G \subset F$. Or, $\dim(F) = 2 = \dim(G)$.
Donc, $F = G$.

I.5. Applications linéaires

Dans cette partie, E , F et G désignent trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.



Définition 1.14 – Application linéaire

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est **linéaire** lorsque :

(i) $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque 1.16

► Une application f de E dans F est linéaire si, et seulement si,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, f(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot f(u) + f(v).$$

C'est cette caractérisation qui est à utiliser dans les exercices.

► On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et tout $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot u_k\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot f(u_k).$$

Exemple 1.10

L'application $\text{id}_E : E \rightarrow E$ est linéaire. Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda \cdot \text{id}_E$ est linéaire.

$$x \mapsto x$$

Exercice 1.15

Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}$, l'application $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.

$$P \mapsto P(a)$$

Résolution

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$f(\lambda \cdot P + Q) = (\lambda \cdot P + Q)(a) = \lambda \times P(a) + Q(a) = \lambda \times f(P) + f(Q).$$

Donc, f est linéaire.

Remarque 1.17

Soit f une application linéaire de E dans F .

► On a : $f(0_E) = 0_F$. En effet :

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E).$$

En soustrayant l'égalité précédente par $f(0_E)$, on a $f(0_E) = 0_F$.

► En particulier, si $f(0_E) \neq 0_F$, alors f n'est pas linéaire!

► On a : pour tout $x \in E$, $f(-x) = -f(x)$. En effet, pour tout $x \in E$,

$$0_F = f(0_E) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x).$$

En soustrayant l'égalité précédente par $f(x)$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Définition 1.15 – Endomorphisme

Une application linéaire f de E dans E est un **endomorphisme de E** . On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

On définit deux opérations sur $\mathcal{F}(E, F)$, l'ensemble des applications de E dans F : pour tout $(f, g) \in \mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f + g : E &\rightarrow F & \text{et} & \quad \lambda \cdot f : E \rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) + g(x) & & \quad x \mapsto \lambda \cdot f(x). \end{aligned}$$

 Théorème 1.14

Muni de ces opérations $(\mathcal{F}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel dont l'élément neutre est la fonction nulle.

De plus, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Lorsque E et F sont de dimensions finies, $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

 Remarque 1.18

On retiendra que :

- pour toutes applications linéaires f et g , l'application $f + g$ est linéaire.
- pour toute application linéaire f et tout scalaire λ , l'application $\lambda.f$ est linéaire.

 Théorème 1.15

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Autrement dit, une composée d'applications linéaires est linéaire.

 Remarque 1.19 – Cas des endomorphismes

On déduit des théorèmes 1.14 et 1.15 que la somme et la composée d'endomorphismes de E sont des endomorphismes de E et que le produit par scalaire d'un endomorphisme de E est un endomorphisme de E .

 Définition 1.16

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On définit :

$$f^0 = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f.$$

Autrement dit,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

 Définition 1.17 – Endomorphismes commutatifs

Soient f et g deux endomorphismes de E . On dit que f et g **commutent** lorsque :

$$f \circ g = g \circ f.$$

 Exemple 1.11

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'endomorphisme $\lambda.\text{id}_E$ commute avec tous les endomorphismes de E .

 Théorème 1.16

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux endomorphismes de E qui **commutent**. Alors,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot g^k \circ f^{n-k} \quad (\text{formule du binôme}).$$

et

$$f^n - g^n = (f - g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} = (f - g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} g^k \circ f^{n-1-k}.$$



Proposition 1.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de F .

Alors, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = u_k$.

Remarque 1.20 – Important

♪ ♪ ♪ Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.



Théorème 1.17

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un sous-espace vectoriel de E et F_1 un sous-espace vectoriel de F . Alors,

1. $f(E_1) = \{f(x) \mid x \in E_1\}$ est un sous-espace vectoriel de F .
2. $f^{-1}(F_1) = \{x \in E \mid f(x) \in F_1\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 1.21

On peut résumer le théorème 1.17 en disant que l'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel et que l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.



Définition 1.18 – Image et noyau d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle :

- **image de f** le sous-espace vectoriel de F noté $\text{Im}(f)$ et défini par

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

- **noyau de f** le sous-espace vectoriel de E noté $\text{Ker}(f)$ et défini par

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Remarque 1.22 – Méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel

Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on peut montrer que c'est le noyau d'une application linéaire.



Proposition 1.7

On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base E . Alors, $\text{Im}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_n))$:

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

En particulier, $\text{Im}(f)$ est de dimension finie.

Remarque 1.23

Plus généralement, pour tout $(u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E (non nécessairement une base de E), on a :

$$f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_p)).$$

Remarque 1.24 – Comment travailler avec le noyau et l'image d'une application linéaire?

Les caractérisations suivantes sont à connaître et à utiliser dans les exercices.

► pour tout $y \in F$, on a :

$$y \in \text{Im}(f) \iff \exists x \in E, y = f(x).$$

► pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = 0_F.$$

Théorème 1.18

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

- f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.

Remarque 1.25 – Méthode pour montrer qu'une application linéaire est injective

Pour montrer qu'une application **linéaire** $f : E \rightarrow F$ est injective, on peut montrer que,

$$\forall x \in E, [f(x) = 0_F \implies x = 0_E].$$

En procédant ainsi, on montre que $\text{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est vraie car $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 1.19 – Application linéaire de rang fini

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels quelconques et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que f est de **rang fini** lorsque son image $\text{Im}(f)$ est de dimension finie. Le **rang de** f , noté $\text{rg}(f)$, est alors la dimension de $\text{Im}(f)$.

Proposition 1.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$.
- Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$.
De plus, en notant $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , le rang de f est égal au rang de la famille de vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_n))$:

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

- Si E et F sont de dimension finie, alors f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

Démonstration

► On sait que : $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F . Si F est de dimension finie, alors $\text{Im}(f)$ aussi. Donc f est de rang fini et, par définition du rang :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(F).$$

► Si E est de dimension finie, alors il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E (où on a noté $n = \dim(E)$). Or, on sait que,

$$\text{Im}(f) = f(E) = f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est finie et engendre $\text{Im}(f)$. Donc, f est de rang fini et, par définition du rang d'une famille de vecteurs,

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \leq n.$$

La dernière inégalité vient du théorème 1.12 page 25.

► C'est une conséquence des deux points précédents. □

Remarque 1.26

Parler du rang d'une application linéaire a donc un sens dès que E ou F est de dimension finie.

Théorème 1.19 – À savoir montrer

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini où E, F et G sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Alors $g \circ f$ est de rang fini et :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f)).$$

Démonstration

► Pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$. Donc, $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Comme g est de rang fini, $\text{Im}(g)$ est de dimension finie.

Donc, $\text{Im}(g \circ f)$ est de dimension finie et $\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(g))$.

Donc, $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.

► On sait que f est de rang fini. Notons $n = \text{rg}(f)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\text{Im}(f)$.

On a alors, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, puis,

$$\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f)) = g(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) \stackrel{*}{=} \text{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_n)).$$

L'égalité $\stackrel{*}{=}$ vient de la linéarité de g .

On en déduit que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(g \circ f)$ composée de n vecteurs. Donc, $\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq n$.

Donc, $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$. □

Exercice 1.16

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de rang fini où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que :

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

Résolution

Soit $y \in \text{Im}(u + v)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (u + v)(x)$. Or, $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$. De plus, $u(x) \in \text{Im}(u)$ et $v(x) \in \text{Im}(v)$. Donc, $y = u(x) + v(x) \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Ainsi, $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Les applications linéaires u et v sont de rang fini, donc, par la formule de Grassmann (Théorème 1.40 page 51), $\text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ est de dimension finie et

$$\dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) - \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v))$$

D'où, $\text{Im}(u + v)$ est de dimension finie et

$$\dim(\text{Im}(u + v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)).$$

On en déduit que $u + v$ est de rang fini et

$$\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

Montrons la seconde inégalité. En appliquant l'inégalité précédente avec u remplacé par $u + v$ et v par $-v$, on a :

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(u + v + (-v)) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(-v).$$

De plus, $\text{rg}(-v) = \text{rg}(v)$ (en effet, par linéarité $\text{Im}(-v) = \{-v(x) | x \in E\} = \{v(-x) | x \in E\} = \{v(z) | z \in E\} = \text{Im}(v)$). Donc,

$$\text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u + v).$$

De même, on montre que $\text{rg}(v) - \text{rg}(u) \leq \text{rg}(u + v)$. Donc, $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.



Définition 1.20 – Isomorphisme

Soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . On dit que f est **isomorphisme de E sur F** lorsque f est linéaire et bijective.



Proposition 1.9

Soit f un isomorphisme de E sur F . Alors, sa bijection réciproque f^{-1} est une application linéaire. C'est donc un isomorphisme de F sur E .

Démonstration

Soit $(y_1, y_2) \in F \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par bijectivité de f , il existe $(x_1, x_2) \in E \times E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Par linéarité de f , on a : $\lambda.y_1 + y_2 = f(\lambda.x_1 + x_2)$.

D'où, par bijectivité de f , $f^{-1}(\lambda.y_1 + y_2) = \lambda.x_1 + x_2$. On a aussi $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Donc,

$$f^{-1}(\lambda.y_1 + y_2) = \lambda.f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2).$$

Ainsi, f^{-1} est linéaire. □



Définition 1.21 – Espaces vectoriels isomorphes

On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F .

Remarque 1.27

La définition précédente peut aussi s'énoncer sous la forme : on dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme de F sur E .



Proposition 1.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

L'application linéaire f est un isomorphisme si, et seulement si, il existe une application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. Dans ce cas, g est linéaire.



Proposition 1.11

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Si f et g sont des isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exemple 1.12

Considérons les applications linéaires :

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{C}[X] & \rightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} g : \mathbb{C}[X] & \rightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X-1) \end{array}$$

On vérifie facilement que $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{C}[X]}$ et $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{C}[X]}$. Donc f est un isomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}[X]$.



Définition 1.22 – Automorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Lorsque f est de plus un isomorphisme, on dit que f est un **automorphisme de E** .



Notation 1.1

On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E et on l'appelle le **groupe linéaire de E** .



Proposition 1.12

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Alors,

- Si $f \in \text{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \text{GL}(E)$.
- Si $f \in \text{GL}(E)$ et $g \in \text{GL}(E)$, alors $f \circ g \in \text{GL}(E)$ et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

I.6. Isomorphismes en dimension finie



Théorème 1.20

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. L'application f est injective, si, et seulement si, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.
2. L'application f est surjective, si, et seulement si, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F .
3. L'application f est bijective, si, et seulement si, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

Remarque 1.28 – Important

On pourra retenir que :

1. une application linéaire qui transforme une base de son espace de départ en une base de son espace d'arrivée est bijective.
2. une application linéaire bijective transforme une base de son espace de départ en une base de son espace d'arrivée.



Proposition 1.13

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où E, F et G sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1. Si f est un isomorphisme et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.
2. Si g est un isomorphisme et si f est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

Autrement dit, on ne modifie par le rang d'une application linéaire en composant à droite ou à gauche par un isomorphisme.



Proposition 1.14

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie.

On a l'équivalence : F est isomorphe à E si, et seulement si, F est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

Corollaire 1.2

Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Remarque 1.29 – Polynômes et algèbre linéaire

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{P} \\ P &\mapsto \tilde{P}\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Comme $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, $\mathcal{P}$ est aussi de dimension infinie, et par suite l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ aussi.

Théorème 1.21

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels **de même dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une **application linéaire**. On a les équivalences :

$$f \text{ est bijective de } E \text{ sur } F \iff f \text{ est surjective de } E \text{ sur } F \iff f \text{ est injective sur } E$$

Remarque 1.30 – Méthodes pour montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme

► Avec les notations du théorème 1.21, pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que :

- f est linéaire,
- $\dim(E) = \dim(F)$,
- f est injective : $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

► Avec les notations du théorème 1.21, pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que :

- f est linéaire,
- $\dim(E) = \dim(F)$,
- f est surjective : $\text{Im}(f) = F$.

Remarque 1.31 – Cas des endomorphismes

Si f est un endomorphisme de E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, la condition « $\dim(E) = \dim(F)$ » est vérifiée. Donc,

$$f \text{ est bijectif de } E \text{ sur } E \iff f \text{ est surjectif de } E \text{ sur } E \iff f \text{ est injectif sur } E$$

Remarque 1.32 – Prudence

► L'hypothèse $\dim(E) = \dim(F)$ du théorème 1.21 est fondamentale

L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective mais non surjective.

$$x \mapsto (x, x)$$

L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective mais non injective.

$$(x, y) \mapsto x$$

► L'hypothèse de dimension finie est fondamentale

L'application $f : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est injective mais non surjective.

$$u \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x u(t) dt \end{cases}$$

L'application $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ est surjective mais non injective.

$$P \mapsto P'$$



Exercice 1.17

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie.

1. Montrer que s'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = \text{id}_E$, alors u et v sont bijectifs.
2. Montrer que s'il existe $w \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ w = \text{id}_F$, alors u et w sont bijectifs.
3. Les affirmations précédentes sont-elles encore vraies en dimension infinie ?

Résolution

1. La propriété $v \circ u = \text{id}_E$ entraîne l'injectivité de u . Montrons le ! Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Par linéarité de v , on a $v \circ u(x) = v(0) = 0$. Or, $v \circ u(x) = \text{id}_E(x) = x$. Donc, $x = 0$.
Ainsi, l'application linéaire u est injective. De plus, $\dim(E) = \dim(F)$. Donc, par théorème, u est bijective.
On a alors $v = u^{-1}$ et v est bijective.
2. La propriété $u \circ w = \text{id}_F$ entraîne la surjectivité de u . Montrons le ! Soit $y \in F$. On a $u(w(y)) = y$. En posant $x = w(y) \in E$, on a : $y = u(x)$.
Ainsi, l'application linéaire u est surjective. De plus, $\dim(E) = \dim(F)$. Donc, par théorème, u est bijective.
On a alors $w = u^{-1}$ et w est bijective.
3. Non. Prendre $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et considérer :
 - l'application qui à $f \in E$ associe la dérivée de f .
 - l'application qui à $f \in E$ associe sa primitive qui s'annule en 1.

I.7. Théorème du rang



Théorème 1.22

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si S est un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E , alors f induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$.



Théorème 1.23 – Théorème du rang

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque. Alors, f est de rang fini et

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$



Exercice 1.18

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de même dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a l'équivalence :

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{rg}(f) = n.$$

Résolution

- Si f est un isomorphisme, alors f est surjective et donc $\text{Im}(f) = F$. Donc, en comparant les dimensions,

$$\text{rg}(f) = n.$$

- On suppose que $\text{rg}(f) = n$. On sait que E et F sont de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) = 0.$$

D'où, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Donc, f est injective.

Donc, par théorème, f est bijective et est linéaire : c'est un isomorphisme. $\square$

Exercice 1.19

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{K}_{n+1}[X] &\rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X)\end{aligned}$$

1. Vérifier que φ est bien définie et est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de φ .
3. L'application φ est-elle injective? surjective? bijective?

Résolution

1. Montrons que φ est linéaire : soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}_{n+1}[X] \times \mathbb{K}_{n+1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\lambda.P_1 + P_2) = (\lambda.P_1 + P_2)(X+1) - (\lambda.P_1 + P_2)(X) = \lambda.(P_1(X+1) - P_1(X)) + P_2(X+1) - P_2(X) = \lambda.\varphi(P_1) + \varphi(P_2).$$

Donc, φ est linéaire.

Soit $k \in [0, n+1]$.

Par la formule du binôme de Newton, on a $\varphi(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \in \mathbb{K}_{k-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X]$.

Donc, tous les vecteurs de la bases canoniques de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ ont pour image un vecteur de $\mathbb{K}_n[X]$.

Ainsi, par linéarité de φ et stabilité par combinaison linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. Donc, φ est bien définie et est linéaire.

2. Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tel que $\varphi(P) = 0$, c'est-à-dire, $P(X+1) = P(X)$.

On montre par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(k) = P(0)$. On en déduit que le polynôme $P(X) - P(0)$ possède une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. On en déduit que P est constant.

D'où $\text{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{K}_0[X]$.

Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}_0[X]$, alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que : $P = \mu$. Donc, $\varphi(P) = 0$. D'où, $\mathbb{K}_0[X] \subset \text{Ker}(\varphi)$. Ainsi,

$$\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{K}_0[X].$$

Par ce qui précède, le noyau de φ est de dimension 1. De plus, $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ est de dimension finie. D'où, par le théorème du rang

$$\text{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{K}_{n+1}[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n+2-1 = n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X]).$$

Le rang de φ est égal à la dimension de l'espace d'arrivée, donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}_n[X]$

3. On a : $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}_n[X]$ donc, φ est surjective.
De plus, $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ donc, φ n'est pas injective.
On en déduit que, φ n'est pas bijective.

Exercice 1.20

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

- (i) $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$,
- (ii) $E = \text{Im}(u) + \text{Ker}(u)$,
- (iii) $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$,
- (iv) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.

Résolution

Montrons la chaîne d'implication $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

► L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est claire.

► Montrons que $(ii) \Rightarrow (iii)$

Supposons que $E = \text{Im}(u) + \text{Ker}(u)$.

On a $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$ (en effet, pour tout $x \in E$, $u^2(x) = u(u(x)) \in \text{Im}(u)$).

Réciproquement, soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = u(x)$.

De plus, comme $E = \text{Im}(u) + \text{Ker}(u)$, il existe $a \in \text{Ker}(u)$ et $b \in \text{Im}(u)$ tel que $x = a + b$.

Par linéarité de u , on a : $y = u(x) = u(a) + u(b) = u(b)$.

De plus, $b \in \text{Im}(u)$, donc, il existe $c \in E$ tel que $b = u(c)$. Donc, $y = u(b) = u(u(c)) = u^2(c) \in \text{Im}(u^2)$. D'où, $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^2)$.

Donc, $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$.

► Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (iv)

On sait que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ (en effet, si $u(x) = 0_E$, alors $u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$).

De plus, E est de dimension finie et u et u^2 sont linéaires, donc, par le théorème du rang :

$$\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) \quad \text{et} \quad \dim(E) = \text{rg}(u^2) + \dim(\text{Ker}(u^2)).$$

Or, $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$, d'où $\text{rg}(u^2) = \text{rg}(u)$. Donc, $\dim(\text{Ker}(u^2)) = \dim(\text{Ker}(u))$.

Ainsi, $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$.

► Montrons que (iv) $\Rightarrow$ (i)

Soit $y \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$. D'où $u(y) = 0_E$ et il existe alors $x \in E$ tel que $y = u(x)$.

Donc, $0_E = u(y) = u(u(x))$. Autrement dit, $x \in \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$. Donc, $y = u(x) = 0_E$.

Ainsi, $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\}$. Autrement dit, la somme $\text{Im}(u) + \text{Ker}(u)$ est directe.

De plus, d'après le théorème du rang, on a : $\dim(E) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u))$.

Ainsi (Théorème 1.39 page 51), $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$.

I.8. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel



Définition 1.23 – Homothétie

On appelle **homothétie** de E , toute application de la forme $\lambda \cdot \text{id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.



Proposition 1.15

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie $\lambda \cdot \text{id}_E$ est un automorphisme de E . Sa bijection réciproque est $\frac{1}{\lambda} \cdot \text{id}_E$.



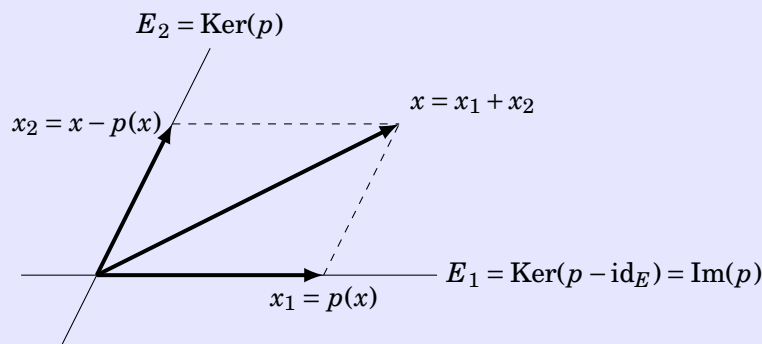
Définition 1.24 – Projection

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Pour tout $x \in E$, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. La projection sur E_1 parallèlement à E_2 est l'endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $p(x) = x_1$.

En particulier, on a :

$$\forall x \in E_1, p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in E_2, p(x) = 0_E.$$



 Théorème 1.24

Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 , on a :

1. $p \circ p = p$.
2. $\text{Im}(p) = E_1$ et $\text{Ker}(p) = E_2$.
3. $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$.

**Définition 1.25 – Projecteurs**

On dit qu'un endomorphisme de E est un **projecteur** ou une **projection** s'il existe E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tels que p soit la projection de E_1 sur E_2 .

 Théorème 1.25

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

1. On a l'équivalence :

p est un projecteur si, et seulement si, $p \circ p = p$.

2. Dans ce cas, $E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\text{Ker}(p - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

 Remarque 1.33 – Projecteurs associés

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . On considère :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 ,
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1 .

On dit que p et q sont des **projecteurs associés**.

**Proposition 1.16**

Soit p et q sont deux projecteurs associés. Alors,

- $p + q = \text{id}_E$,
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

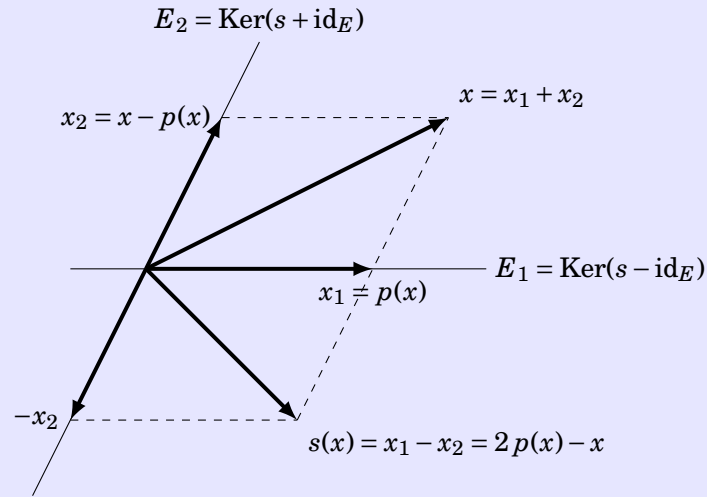
**Définition 1.26 – Symétrie**

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Pour tout $x \in E$, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. La symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est l'endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $s(x) = x_1 - x_2$.

Autrement dit,

$$\forall x \in E_1, s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in E_2, s(x) = -x.$$



Remarque 1.34 – Relation entre symétries et projections

Avec les notations de la définition, en considérant p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 , alors :

$$s = 2p - \text{id}_E.$$

On dit que p est la projection associée à s .

Théorème 1.26

Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 , on a :

1. $s \circ s = \text{id}_E$.
2. $\text{Ker}(s - \text{id}_E) = E_1$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E) = E_2$.

Remarque 1.35

Une symétrie est un automorphisme et $s^{-1} = s$.

Théorème 1.27

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

1. On a l'équivalence :

$$s \text{ est une symétrie si, et seulement si, } s \circ s = \text{id}_E.$$

2. Dans ce cas, $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Exemple 1.13

1. Pour $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'application linéaire :

$$\begin{aligned} s: E &\rightarrow E \\ f &\mapsto \begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(-x) \end{cases} \end{aligned}$$

vérifie $s \circ s = \text{id}_E$. De plus, $\text{Ker}(s - \text{id}_E) = \mathcal{P}$, l'ensemble des fonctions paires, et $\text{Ker}(s + \text{id}_E) = \mathcal{I}$, l'ensemble des

fonctions impaires.

Ainsi, s est la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires parallèlement à $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires, et on retrouve que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

2. Pour $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application linéaire :

$$\begin{aligned} p: E &\rightarrow E \\ A &\mapsto A^\top \end{aligned}$$

vérifie $s \circ s = \text{id}_E$. De plus, $\text{Ker}(s - \text{id}_E) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi, s est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

I.9. Formes linéaires et hyperplans



Définition 1.27 – Forme linéaire

On appelle **forme linéaire sur E** toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

💡 Exemple 1.14

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application linéaire $\varphi_i: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Les applications
- $$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont appelées formes linéaires coordonnées relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

2. On suppose que E est de dimension finie n . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour tout $x \in E$, il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$.

On définit alors $\varphi_i: E \rightarrow \mathbb{K}$ l'application que à x associe sa i -ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

$$x \mapsto x_i$$

La décomposition d'un vecteur dans une base étant unique, l'application φ_i est bien définie.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in E^2$. On décompose $x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k \cdot e_k$ dans la base $\mathcal{B}$.

On a : $\lambda \cdot x + y = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + y_k) \cdot e_k$. Donc, $\varphi(\lambda \cdot x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$.

Donc, φ_i est une forme linéaire sur E .

Les applications $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont appelées formes linéaires coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

3. L'application $\varphi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.
- $$P \mapsto \int_0^1 P(x) dx$$

En effet, par linéarité de l'intégrale, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$\varphi(\lambda \cdot P + Q) = \int_0^1 (\lambda \cdot P + Q)(x) dx = \lambda \int_0^1 P(x) dx + \int_0^1 Q(x) dx = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q).$$

4. Soit $a \in \mathbb{K}$. L'application $\varphi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.
- $$P \mapsto P(a)$$

En effet, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$\varphi(\lambda \cdot P + Q) = (\lambda \cdot P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q).$$


Proposition 1.17

L'image d'une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est de dimension 0 ou 1.

On a : $\text{rg}(\varphi) = 0$ si, et seulement si, $\text{Im}(\varphi) = \{0_E\}$ si, et seulement si, φ est la forme linéaire nulle.

On a : $\text{rg}(\varphi) = 1$ si, et seulement si, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$ si, et seulement si, φ n'est pas la forme linéaire nulle.

Démonstration

L'image de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ et $\dim(\mathbb{K}) = 1$. Donc, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 0$ ou $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$.


Proposition 1.18 – Dimension de l'ensemble des formes linéaires sur E

On suppose que E est de dimension finie n . On a :

$$\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E).$$

Démonstration

On sait E et $\mathbb{K}$ sont de dimensions finies. Donc, $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E)$.


Définition 1.28 – Hyperplan

On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul.

On appelle **hyperplan de E** tout noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

Remarque 1.36

En particulier, un hyperplan de E est le noyau d'une application linéaire et est par conséquent un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 1.15

1. L'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - y + 2z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. C'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y, z) \mapsto 3x - y + 2z$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$. L'ensemble $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(a) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}$.

$$P \mapsto P(a)$$

Remarque 1.37

1. Si $\dim(E) = 2$, alors les hyperplans de E sont les droites vectorielles.
2. Si $\dim(E) = 3$, alors les hyperplans de E sont les plans vectoriels.


Proposition 1.19

On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul.

Soit H un hyperplan de E . Pour tout $u \in E \setminus H$, on a :

$$E = H \oplus \text{Vect}(u).$$

On a alors le théorème suivant.

 Théorème 1.28

On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul.

Si H est un hyperplan de E , alors pour toute droite vectorielle D non contenue dans H on a $E = H \oplus D$.

Le théorème suivant est la réciproque du précédent.

 Théorème 1.29

On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. On note $D = \text{Vect}(u)$.

Tout supplémentaire de D dans E est un hyperplan.

 Remarque 1.38

On peut reformuler les deux résultats précédents : un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe $u \in E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(u)$.

Corollaire 1.3

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un sous-espace vectoriel de E .

Alors, H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

II. Produit d'espaces vectoriels

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Dans cette partie, on s'intéresse à l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \dots, x_p) \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \in E_i\},$$

produit cartésien de $E_1, \dots, E_p$.

II.1. Définition



Définition 1.29 – Produit cartésien d'espaces vectoriels

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

On munit $E_1 \times \cdots \times E_p$ de l'addition (loi interne) :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \forall (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

et de la multiplication par un scalaire (loi externe)

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \lambda.(x_1, \dots, x_p) = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_p).$$



Théorème 1.30

Avec les notations précédentes, $(E_1 \times \cdots \times E_p, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration

Vérifier chaque point de la définition 1.1 page 3.

Le vecteur nul de $E_1 \times \cdots \times E_p$ est $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_p})$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, l'opposé de $(x_1, \dots, x_p)$ est $(-x_1, \dots, -x_p)$

Remarque 1.39

L'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_p$ est aussi noté $\prod_{i=1}^p E_i$. Attention ! Avec la seconde notation, l'ordre des espaces vectoriels n'apparaît plus mais il est important.

Exemple 1.16

Les vecteurs du produit cartésien $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont de la forme (A, f) où A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, on a :

$$\lambda.(A, f) + (B, g) = (\lambda.A + B, \lambda.f + g).$$

Sur cet exemple, on remarque bien que les différents signes « + » et « . » ne sont pas les mêmes. Ils ne portent pas sur le même espace vectoriel.

II.2. Produit d'espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 1.31

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors, l'espace vectoriel $E_1 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

Démonstration

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $n_k = \dim(E_k)$ et on considère $(e_{k,1}, e_{k,2}, \dots, e_{k,n_k})$ une base de E_k . Montrons que la famille

$$\mathcal{F} = ((e_{1,1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p}), \dots, (e_{1,n_1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p}), (0_{E_1}, e_{2,1}, 0_{E_3}, \dots, 0_{E_p}), \dots, (0_{E_1}, e_{2,n_2}, 0_{E_3}, \dots, 0_{E_p}), \dots, (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, e_{p,1}), \dots, (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, e_{p,n_p}))$$

est une base de $E_1 \times \dots \times E_p$.

► La famille $\mathcal{F}$ contient $n_1 + \dots + n_p$ vecteurs de $E_1 \times \dots \times E_p$.

► Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $(\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n_k}) \in \mathbb{K}^{n_k}$ tel que $x_k = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} \cdot e_{k,j}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_p) &= (x_1, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p}) + (0_{E_1}, x_2, 0_{E_3}, \dots, 0_{E_p}) + \dots + (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, x_p) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} \cdot e_{1,j}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p} \right) + \left(0_{E_1}, \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} \cdot e_{2,j}, 0_{E_3}, \dots, 0_{E_p} \right) + \dots + \left(0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} \cdot e_{p,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} \cdot (e_{1,j}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p}) + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} \cdot (0_{E_1}, e_{2,j}, 0_{E_3}, \dots, 0_{E_p}) + \dots + \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} \cdot (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, e_{p,j}) \end{aligned}$$

On en déduit que la famille finie $\mathcal{F}$ engendre $E_1 \times \dots \times E_p$ et que $E_1 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie.

► Montrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,n_1}, \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,n_2}, \dots, \lambda_{p,1}, \dots, \lambda_{p,n_p}) \in \mathbb{K}^{n_1 + \dots + n_p}$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} \cdot (e_{1,j}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p}) + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} \cdot (0_{E_1}, e_{2,j}, 0_{E_3}, \dots, 0_{E_p}) + \dots + \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} \cdot (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, e_{p,j}) = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_p}).$$

Or,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} \cdot (e_{1,j}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p}) + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} \cdot (0_{E_1}, e_{2,j}, 0_{E_3}, \dots, 0_{E_p}) + \dots + \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} \cdot (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, e_{p,j}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} \cdot e_{1,j}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p} \right) + \left(0_{E_1}, \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} \cdot e_{2,j}, 0_{E_3}, \dots, 0_{E_p} \right) + \dots + \left(0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} \cdot e_{p,j} \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} \cdot e_{1,j}, \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} \cdot e_{2,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} \cdot e_{p,j} \right). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} \cdot e_{k,j} = 0_{E_k}$. Les familles $(e_{k,1}, e_{k,2}, \dots, e_{k,n_k})$ sont libres, donc $\lambda_{k,1} = \dots = \lambda_{k,n_k} = 0$.

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est une base de $E_1 \times \dots \times E_p$ et

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = n_1 + \dots + n_p = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

III. Somme de sous-espaces vectoriels

III.1. Définition



Définition 1.30 – Somme de sous-espaces vectoriels

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

La somme des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ est :

$$E_1 + \dots + E_p = \{u_1 + \dots + u_p \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_i \in E_i\}.$$



Proposition 1.20

La somme de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration

- Soit $u \in E_1 + \dots + E_p$. Par définition $u = u_1 + \dots + u_p$ avec pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k \in E_k$. Les $E_1, \dots, E_p$ étant des sous-espaces vectoriels ils sont inclus dans l'espace vectoriel E , on a $u \in E$. Donc, $E_1 + \dots + E_p \subset E$.
- Les $E_1, \dots, E_p$ étant des sous-espaces vectoriels, le vecteur nul 0_E appartient à ces sous-espaces vectoriels. D'où, $0_E = 0_E + \dots + 0_E \in E_1 + \dots + E_p$.
- Soient $u \in E_1 + \dots + E_p$, $v \in E_1 + \dots + E_p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition $u = u_1 + \dots + u_p$ et $v = v_1 + \dots + v_p$ avec, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k \in E_k$ et $v_k \in E_k$. Les $E_1, \dots, E_p$ étant des sous-espaces vectoriels de E , pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda \cdot u_k + v_k \in E_k$. D'où,

$$\lambda \cdot u + v = \sum_{k=1}^p \lambda \cdot u_k + v_k \in E_1 + \dots + E_p.$$

Remarque 1.40

L'ensemble $E_1 + \dots + E_p$ est également noté $\sum_{k=1}^p E_k$. L'addition dans E est commutative : contrairement au produit cartésien l'ordre d'écriture des sous-espaces vectoriels n'est pas important.

Exemple 1.17

On a :

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 0)) + \text{Vect}((1, 1)) + \text{Vect}((0, 1))$$

En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1) + y \cdot (0, 1).$$

III.2. Somme directe de sous-espaces vectoriels



Définition 1.31 – Somme directe

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On dit que la somme $E_1 + \dots + E_p$ est **directe** lorsque : pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$,

$$u_1 + \dots + u_p = 0_E \implies \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_k = 0_E.$$

Dans ce cas, la somme $E_1 + \dots + E_p$ est notée $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ ou $\bigoplus_{k=1}^p E_k$.

 Remarque 1.41

Pour montrer que la somme $E_1 + \dots + E_p$ n'est pas directe, il suffit de trouver p vecteurs $(u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ non tous nuls tels que $u_1 + \dots + u_p = 0_E$.

**Exercice 1.21**

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $F = \text{Vect}((1, 0))$, $G = \text{Vect}((1, 1))$ et $H = \text{Vect}((0, 1))$.

1. Vérifier que F et G sont en somme directe. De même, on vérifie que les sommes $F + H$ et $G + H$ sont directes.
2. La somme $F + G + H$ est-elle directe?

Résolution

1. Soit $(u, v) \in F \times G$ tel que $u + v = (0, 0)$.
Comme $u \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \cdot (1, 0)$. De même, comme $v \in G$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $v = \mu \cdot (1, 1)$.
On en déduit que $u + v = (\lambda + \mu, \mu) = (0, 0)$.
D'où, en identifiant les coefficients, $\mu = 0$, puis, $\lambda = 0$.
Ainsi, $F + G$ est une somme directe.
2. On pose $u = (1, 0) \in F$, $v = -1 \cdot (1, 1) \in G$ et $w = (0, 1) \in H$. On a : $u + v + w = (0, 0)$ mais les vecteurs u , v et w ne sont pas tous nuls.
Donc, la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

**Exercice 1.22**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On suppose que la somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe et on considère, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_k \in E_k \setminus \{0_E\}$.

Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Résolution

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_p \cdot x_p = 0_E$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k \cdot x_k \in E_k$.
D'où, par définition de somme directe, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k \cdot x_k = 0_E$, or $x_k \neq 0_E$, donc $\lambda_k = 0$. Ainsi, $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$: la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

**Théorème 1.32**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

La somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe si, et seulement si, tout élément $u \in E_1 + \dots + E_p$ se **décompose de manière unique** sous la forme $u = u_1 + \dots + u_p$ où, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k \in E_k$.

Démonstration

($\Rightarrow$) Supposons la somme $E_1 + \dots + E_p$ directe.

Soit $u \in E_1 + \dots + E_p$. On suppose que u se décompose sous la forme $u = u_1 + \dots + u_p = v_1 + \dots + v_p$, où, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k \in E_k$ et $v_k \in E_k$. Alors, $(u_1 - v_1) + \dots + (u_p - v_p) = 0_E$.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, E_k est un sous-espace vectoriel de E , donc $u_k - v_k \in E_k$.

Par définition de somme directe, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k - v_k = 0_E$. Ainsi, la décomposition de u est unique.

($\Leftarrow$) Supposons que tout élément $u \in E_1 + \dots + E_p$ se décompose de manière unique sous la forme $u = u_1 + \dots + u_p$ où, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k \in E_k$.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $u_1 + \dots + u_p = 0_E$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, E_k est un sous-espace vectoriel de E , donc $0_E \in E_k$. On a

$$u_1 + \dots + u_p = 0_E = 0_E + \dots + 0_E \in E_1 + \dots + E_p.$$

Par unicité de la décomposition de 0_E on a : pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k = 0_E$.

Ainsi, $u = 0_E$. □

⚙️ Théorème 1.33 – Cas de DEUX sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
La somme $F + G$ est directe si, et seulement si, $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que la somme $F + G$ est directe.

Soit $u \in F \cap G$. Alors,

$$0_E = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{(-u)}_{\in G}.$$

Par définition de somme directe, $u = 0_E$.

($\Leftarrow$) On suppose que la somme $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $(u, v) \in F \times G$ tel que $u + v = 0_E$. Alors, $u = -v \in F \cap G = \{0_E\}$. Donc $u = v = 0_E$. Ainsi, la somme $F + G$ est directe. □

🔍 Remarque 1.42 – Prudence !

La caractérisation du théorème 1.33 n'est valable que pour **deux** sous-espaces vectoriels. Dans l'exercice 1.21 page 46, on a :

$$F \cap G = \{0_E\}, \quad F \cap H = \{0_E\}, \quad G \cap H = \{0_E\} \quad \text{et} \quad F \cap G \cap H = \{0_E\},$$

cependant la somme $F + G + H$ n'est pas directe...

📦 Définition 1.32 – Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.

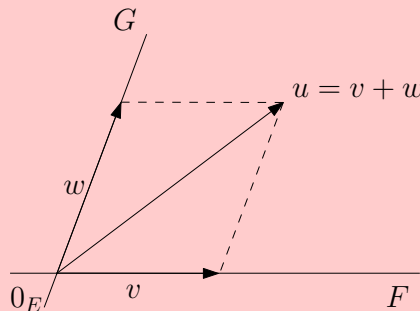
💡 Exemple 1.18

1. On a : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 0)) \oplus \text{Vect}((0, 1))$.
2. On a : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 0)) \oplus \text{Vect}((1, 1))$.
3. On a : $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)) \oplus \text{Vect}((1, 1, 1))$.

⚙️ Théorème 1.34

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On a l'équivalence : $E = F \oplus G$ si, et seulement si, pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$, tel que $u = v + w$.



Démonstration

($\Rightarrow$) Soit $u \in E$. Comme $E = F \oplus G$, u se décompose sous la forme $u = v + w$ où $v \in F$ et $g \in G$. Par le théorème 1.32 page 46 le couple (v, w) est unique.

($\Leftarrow$) On suppose que, pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$, $u = v + w$.

On en déduit que, $E \subset F + G$. L'autre inclusion est toujours vraie (F et G sous-espaces vectoriels de E). Donc $E = F + G$.

Par le théorème 1.32 page 46, l'unicité de la décomposition de tout vecteur $u \in F + G$ en $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ entraîne que la somme $F + G$ est directe.

Ainsi, $E = F \oplus G$. □

Théorème 1.35

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On a l'équivalence : $E = F \oplus G$ si, et seulement si, $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration

Conséquence immédiate de la définition de sous-espaces supplémentaires et du théorème 1.33 page 47. □

Exercice 1.23

Soit B un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant. On note n le degré de B (avec $n \geq 1$ car B n'est pas constant).

Montrer que : $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]B \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ où $\mathbb{K}[X]B = \{Q \times B \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

Résolution

► Soit $P \in \mathbb{K}[X]B \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Le polynôme P est un multiple de B et est de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Or, $\deg(B) = n \geq 1$, donc P est le polynôme nul. Donc, $\mathbb{K}[X]B$ et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sont en somme directe.

► Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Par le théorème de division euclidienne, il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$A = \underbrace{B \times Q}_{\in \mathbb{K}[X]B} + \underbrace{R}_{\in \mathbb{K}_{n-1}[X]} \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B) = n.$$

D'où, $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]B + \mathbb{K}_{n-1}[X]$. (En réalité, on a montré l'inclusion $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}[X]B + \mathbb{K}_{n-1}[X]$. L'autre est toujours vraie.) Donc,

$\mathbb{K}[X]B$ et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

III.3. Sommes directes en dimension finie

Notation 1.2

Soient $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ des familles de vecteurs d'un espace vectoriel. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$ la famille obtenue en concaténant les familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$: l'ordre des vecteurs est respectée et on conserve les éventuelles répétitions.

Théorème 1.36

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . On suppose que la somme des espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ est directe.

► Si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k , alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\bigoplus_{k=1}^p E_k$.

► Si de plus on a la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de E . En particulier, E est de dimension finie.

Démonstration

► Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $n_k = \dim(E_k)$ et $\mathcal{B}_k = (e_{k,1}, e_{k,2}, \dots, e_{k,n_k})$.

• Montrons que la famille $\mathcal{B} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,n_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,n_2}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,n_p})$ est libre.

Soit $(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,n_1}, \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,n_2}, \dots, \lambda_{p,1}, \dots, \lambda_{p,n_p}) \in \mathbb{K}^{n_1 + \dots + n_p}$ tel que :

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} \cdot e_{1,j}}_{\in E_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} \cdot e_{2,j}}_{\in E_2} + \dots + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} \cdot e_{p,j}}_{\in E_p} = 0_E.$$

Par définition de somme directe, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} \cdot e_{k,j} = 0_E$. Or, les familles $(e_{k,1}, e_{k,2}, \dots, e_{k,n_k})$ est libre. Donc, tous les scalaire $\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,n_1}, \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,n_2}, \dots, \lambda_{p,1}, \dots, \lambda_{p,n_p}$ sont nuls. On en déduit la liberté de la famille $\mathcal{B}$.

• Montrons que la famille $\mathcal{B} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,n_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,n_2}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,n_p})$ engendre $\bigoplus_{k=1}^p E_k$.

Soit $u \in \bigoplus_{k=1}^p E_k$. Par définition, $u = u_1 + \dots + u_p$ où, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k \in E_k$ et la famille $(e_{k,1}, e_{k,2}, \dots, e_{k,n_k})$ engendrent E_k , donc

il existe $(\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n_k}) \in \mathbb{K}^{n_k}$ tel que $x_k = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} \cdot e_{k,j}$. Ainsi,

$$x = \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j} \cdot e_{1,j} + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} \cdot e_{2,j} + \dots + \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} \cdot e_{p,j}.$$

► Conséquence immédiate du point précédent. □



Définition 1.33 – Base adaptée à une somme directe

Avec les notations du théorème 1.36 page 48, on dit que la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une **base adaptée à la décomposition (en somme directe) $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$** .

Remarque 1.43

Déterminer une telle base sera au centre du chapitre concernant la réduction des endomorphismes.



Théorème 1.37 – Fractionnement d'une base

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On fractionne la base $\mathcal{B}$ en

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p),$$

où $p \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_k).$$

Démonstration

Montrons que $E \subset \sum_{k=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$.

Soit $u \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E , u s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.

Quitte à réorganiser les vecteurs de la combinaison linéaire, u s'écrit alors comme une somme de vecteurs dont le premier est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_1$, le second est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_2$, et ainsi de suite.

Autrement dit, $u \in \sum_{k=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$.

Donc, $E \subset \sum_{k=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$. L'autre inclusion est claire.

Donc,

$$E = \sum_{k=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_k).$$

Montrons maintenant que la somme est directe.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_1) \times \dots \times \text{Vect}(\mathcal{B}_p)$ tel que $u_1 + \dots + u_p = 0_E$.

Par définition, le vecteur $u_1 + \dots + u_p$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base, tous les scalaires de la combinaison linéaire sont nuls.

Donc, $u_1 = \dots = u_p = 0_E$.

Ainsi,

$$E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_k).$$

□

Remarque 1.44

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la famille $\mathcal{B}_k$ est libre (comme sous-famille de la famille libre $\mathcal{B}$) et engendre $\text{Vect}(\mathcal{B}_k)$: c'est une base de $\text{Vect}(\mathcal{B}_k)$.



Proposition 1.21

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie E . Alors, F possède des supplémentaires.

Démonstration

On note n la dimension de E . Par le théorème 1.13 page 25, F est de dimension finie $p \leq n$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Par le théorème précédent,

$$E = \underbrace{\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)}_{=F} \oplus \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Ainsi, $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est un supplémentaire de F . □

Remarque : Lorsque $p = n$, on a : $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = E$ et $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E . Appliquer le théorème de la base incomplète est alors inutile. Un supplémentaire de F est $\{0_E\}$.



Théorème 1.38

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, E_k est de dimension finie.

► La somme $\sum_{k=1}^p E_k$ est de dimension finie et $\dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$.

► La somme $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe si, et seulement si, $\dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$.

► On suppose que la somme $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe. On a $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ si, et seulement si, $\dim(E) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$.

Démonstration

► Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $n_k = \dim(E_k)$ et $\mathcal{B}_k = (e_{k,1}, e_{k,2}, \dots, e_{k,n_k})$. Dans la démonstration du théorème 1.36, on a montré que la famille finie $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ (composée de $n_1 + \dots + n_p$ vecteurs) engendre $\sum_{k=1}^p E_k$.

Donc $\sum_{k=1}^p E_k$ est de dimension finie et

$$\dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) \leq n_1 + \dots + n_p = \sum_{k=1}^p \dim(E_k).$$

► ($\Rightarrow$) Supposons que la somme $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe.

D'après le théorème 1.36, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\sum_{k=1}^p E_k$ et $\dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) = n_1 + \dots + n_p = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\dim\left(\sum_{k=1}^p E_k\right) = n_1 + \dots + n_p = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$.

La famille $\mathcal{B}$ engendre $\sum_{k=1}^p E_k$ et possède $\dim\left(\sum_{k=1}^p E_k\right)$ vecteurs. Par théorème $\mathcal{B}$ est une base de $\sum_{k=1}^p E_k$. En fractionnant la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$, on a alors,

$$\sum_{k=1}^p E_k = \bigoplus_{k=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_k).$$

Or, $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k , donc $\sum_{k=1}^p E_k = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ et la somme $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe.

► On sait que $\bigoplus_{k=1}^p E_k \subset E$. Donc, $\bigoplus_{k=1}^p E_k = E$ si, et seulement si $\dim(E) = \dim\left(\bigoplus_{k=1}^p E_k\right)$.

Par le point précédent, comme la somme $\bigoplus_{k=1}^p E_k$ est directe, $\dim\left(\bigoplus_{k=1}^p E_k\right) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$. □

Théorème 1.39 – Caractérisation de sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On considère F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a $E = F \oplus G$ si, et seulement si,

$$F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Démonstration

Conséquence des théorème 1.33 page 47 et 1.38 page 50. □

Théorème 1.40 – Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On considère F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration

Soient F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F : $F = F_1 \oplus (F \cap G)$ et G_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans G : $G = G_1 \oplus (F \cap G)$.

► Soit $(u, v, w) \in F_1 \times G_1 \times (F \cap G)$ tel que $u + v + w = 0_E$.

D'où, $u = -v - w$. Or, $v \in G_1 \subset G$ et $w \in (F \cap G) \subset G$. Donc, $u \in F_1 \cap (F \cap G)$. Comme la somme $F_1 \oplus F \cap G$ est directe, on en déduit que $u = 0$.

On a donc, $v + w = 0$ avec $v \in G_1$ et $w \in F \cap G$. Comme la somme $G_1 \oplus F \cap G$ est directe, on en déduit que $v = w = 0$.

Ainsi, la somme $F_1 + G_1 + (F \cap G)$ est directe.

► De plus, $F + G = F_1 + (F \cap G) + G_1 + (F \cap G) = F_1 + G_1 + (F \cap G)$. Ainsi, $F + G = F_1 \oplus G_1 \oplus F \cap G$.

► Par le théorème 1.38 page 50, on a : $\dim(F + G) = \dim(F_1 \oplus G_1 \oplus F \cap G) = \dim(F_1) + \dim(G_1) + \dim(F \cap G)$.

Or, $F = F_1 \oplus F \cap G$ et $G = G_1 \oplus F \cap G$. Donc,

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= \dim(F_1) + \dim(G_1) + \dim(F \cap G) \\ &= \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G) - \dim(F \cap G) + \dim(F \cap G) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G). \end{aligned}$$

□

IV. Interpolation de Lagrange

IV.1. Position du problème

Dans $\mathbb{K}^2$, on considère $n + 1$ points notés (a_k, b_k) où $a_0, \dots, a_n$ sont des scalaires deux à deux distincts.

Existe-t-il une fonction polynomiale P telle que, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_j) = b_j$?



Exercice 1.24

Dans un premier temps, en considérant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, vérifier graphiquement que lorsque qu'il n'y a que deux points (a_1, b_1) et (a_2, b_2) , la réponse à la question est oui.

Dans un second temps, donner une fonction polynomiale P solution du problème.

Résolution

Construisons une fonction affine P dont le graphe passe par ces deux points. On note $P : x \mapsto \alpha \times x + \beta$ et on cherche α et β .
On cherche alors à résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha \times a_1 + \beta &= b_1 & (L_1) \\ \alpha \times a_2 + \beta &= b_2 & (L_2) \end{cases}$$

L'opération $L_2 - L_1$ donne $\alpha \times (a_2 - a_1) = b_2 - b_1$.

Donc, $\alpha = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$, puis, $\beta = b_1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \times a_1$.

Ainsi, une solution du problème est :

$$P : x \mapsto \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \times x + b_1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \times a_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \times (x - a_1) + b_1.$$

IV.2. Polynômes de Lagrange



Définition 1.34

Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n + 1$ -uplet de scalaires deux à deux distincts.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

Les polynômes $L_0, \dots, L_n$ sont appelés **polynômes de Lagrange** associés aux points $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Théorème 1.41 – Propriétés des polynômes de Lagrange

En utilisant les notations de la définition 1.34, on a :

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, L_i est un polynôme de degré n .
2. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$
3. On a $\sum_{i=0}^n L_i = 1$.
4. La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$.

Démonstration

1. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. L_i est un produit de n polynômes de degré 1, donc, L_i est de degré n .
2. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a :

$$L_i(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}.$$

Si $i \neq j$, alors un des facteurs du produit précédent est $\frac{a_j - a_j}{a_i - a_j} = 0$. Donc, $L_i(a_j) = 0$.

Si $i = j$, alors

$$L_i(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = 1.$$

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $\sum_{i=0}^n L_i(a_j) = 1$.

On en déduit que le polynôme $\sum_{i=0}^n L_i(a_j) - 1$ possède $n + 1$ racines distinctes.

Or, ce polynôme est une somme de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n , donc, $\sum_{i=0}^n L_i(a_j) - 1$ a un degré inférieur ou égal à n .

Par théorème, $\sum_{i=0}^n L_i(a_j) - 1 = 0$.

4. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On évalue l'égalité précédente en a_j , il vient :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = 0 = \lambda_j.$$

Donc, $\lambda_j = 0$.

Ainsi, $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre.

De plus, $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille composée de $n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$.

Ainsi, $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Il existe $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^n \mu_i L_i$.

En évaluant en a_j , où $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $P(a_j) = \mu_j$. □

Remarque 1.45 – Résolution du problème d'interpolation

On note $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$. On a, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_j) = b_j$.

Ainsi, P est une solution du problème d'interpolation.

Montrons qu'il n'existe pas d'autres solutions dans $\mathbb{K}_n[X]$. Soit $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q(a_j) = b_j$.

On remarque que $P - Q$ est de degré au plus n et, de plus, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont $n + 1$ racines de $P - Q$ deux à deux distinctes.

Donc, $P = Q$.


Exercice 1.25 – Une autre définition des polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n+1$ -uplet de scalaires deux à deux distincts.

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ définie, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

est un isomorphisme.

2. On note $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme $L_j \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $\varphi(L_j) = e_j$.
3. Résoudre le problème d'interpolation en utilisant la fonction φ .

Résolution

1. ► Montrons que φ est linéaire.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X] \times \mathbb{K}_n[X]$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda.P + Q) &= ((\lambda.P + Q)(a_0), \dots, (\lambda.P + Q)(a_n)) \\ &= (\lambda.P(a_0) + Q(a_0), \dots, \lambda.P(a_n) + Q(a_n)) \\ &= \lambda.(P(a_0), \dots, P(a_n)) + (Q(a_0), Q(a_1), \dots, Q(a_n)) \\ &= \lambda.\varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

Donc, φ est linéaire.

► Montrons que φ est injective.

Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. On a :

$$\varphi(P) = 0 \iff (P(a_0), \dots, P(a_n)) = (0, \dots, 0).$$

Donc, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, a_k est une racine de P .

On a trouvé $n+1$ racines distinctes à P un polynôme de degré au plus n (les a_k sont deux à deux distincts).

Par théorème, $P = 0$.

Donc, φ est injective.

► Montrons que φ est un isomorphisme.

On sait que φ est injective. De plus, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$.

Par théorème, φ est bijective.

Ainsi, φ est un isomorphisme.

2. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Comme φ est bijective, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\varphi(L_j) = e_j$.

On en déduit que $L_j(a_j) = 1$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $k \neq j$, $L_j(a_k) = 0$.

Donc, comme les a_k sont deux à deux distincts,

$$L_j = Q \times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (X - a_k). \quad (\star)$$

Or, $\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (X - a_k)$ est de degré n et L_j est de degré au plus n . Donc, Q est un polynôme constant. Notons le $Q = \lambda \in \mathbb{K}$.

De plus, $L_j(a_j) = 1$, donc, en évaluant $(\star)$ en a_j , on a : $1 = \lambda \times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (a_j - a_k)$.

Donc,

$$\lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (a_j - a_k)} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (a_j - a_k)} \times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (X - a_k) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}.$$

On retrouve les polynômes de Lagrange associés aux points $a_0, \dots, a_n$.

3. On a $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Comme φ est une bijection, il existe un unique polynôme P tel que $\varphi(P) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$. Autrement dit, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_j) = b_j$.

IV.3. Déterminant de Vandermonde

Dans ce paragraphe, on résout le problème d'interpolation autrement.

Soit $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \in \mathbb{K}_n[X]$. On a :

$$\forall j \in [0, n], P(a_j) = b_j \iff \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 a_0 + \dots + \lambda_n a_0^n = b_0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_1^n = b_1 \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_2 + \dots + \lambda_n a_2^n = b_2 \\ \vdots \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_n + \dots + \lambda_n a_n^n = b_n \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n-1} & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{pmatrix}}_{=M_{n+1}(a_0, a_1, \dots, a_n)} \times \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le système précédent possède lorsque la matrice $M_{n+1}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est inversible. On s'intéresse donc à son déterminant.



Définition 1.35 – Déterminant de Vandermonde

Soient $n \geq 2$ un entier et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On note :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \det(M_n(a_1, \dots, a_n)) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{(n)}.$$

Ce déterminant s'appelle le *déterminant de Vandermonde* associé aux scalaires $a_1, \dots, a_n$.



Théorème 1.42

Avec les notations de la définition 1.35, on a :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Démonstration

Par récurrence sur n .

Pour tout $n \geq 2$, on note $(\mathcal{H}_n)$: « pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ ».

Initialisation. $n = 2$. Soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$V_2(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}_{(2)} = a_2 - a_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_j - a_i).$$

Donc $(\mathcal{H}_2)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 2$. On suppose $(\mathcal{H}_n)$ et on montre $(\mathcal{H}_{n+1})$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On a :

$$V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}_{(n+1)}.$$

On applique successivement les opérations sur les colonnes $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - a_1.C_n$, $C_n \leftarrow C_n - a_1.C_{n-1}$, ..., $C_3 \leftarrow C_3 - a_1.C_2$ et $C_2 \leftarrow C_2 - a_1.C_1$. Ces opérations ne changent pas la valeur du déterminant :

$$V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & (a_2 - a_1) & (a_2 - a_1) \times a_2 & \dots & (a_2 - a_1) \times a_2^{n-2} & (a_2 - a_1) \times a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & (a_n - a_1) & (a_n - a_1) \times a_n & \dots & (a_n - a_1) \times a_2^{n-2} & (a_n - a_1) \times a_2^{n-1} \\ 1 & (a_{n+1} - a_1) & (a_{n+1} - a_1) \times a_{n+1} & \dots & (a_{n+1} - a_1) \times a_{n+1}^{n-2} & (a_{n+1} - a_1) \times a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}_{(n+1)}.$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & (a_2 - a_1) \times a_2 & \dots & (a_2 - a_1) \times a_2^{n-2} & (a_2 - a_1) \times a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_n - a_1) & (a_n - a_1) \times a_n & \dots & (a_n - a_1) \times a_2^{n-2} & (a_n - a_1) \times a_2^{n-1} \\ (a_{n+1} - a_1) & (a_{n+1} - a_1) \times a_{n+1} & \dots & (a_{n+1} - a_1) \times a_{n+1}^{n-2} & (a_{n+1} - a_1) \times a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}_{(n)}.$$

Par linéarité par rapport à chaque ligne du déterminant, on a :

$$V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = V_n(a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \times \prod_{j=2}^{n+1} (a_j - a_1).$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$V_n(a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) = \prod_{i=2}^n \left(\prod_{j=i+1}^{n+1} (a_j - a_i) \right).$$

Donc,

$$V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{j=2}^{n+1} (a_j - a_1) \times \prod_{i=2}^n \left(\prod_{j=i+1}^{n+1} (a_j - a_i) \right) = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=i+1}^{n+1} (a_j - a_i) \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i).$$

Donc, (H_{n+1}) . Ce qui achève la récurrence. $\square$

Théorème 1.43

En utilisant les notations de la définition 1.34 page 52, la matrice de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est $M_{n+1}(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Démonstration

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par le théorème 1.41 page 53,

$$X^j = \sum_{i=0}^n \alpha_i^j L_i.$$

$\square$

V. Annexe

V.1. Testons l'IA sur ce chapitre

Énoncé.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que :

$$u^3 = u^2 + 2u.$$

Montrer que :

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E).$$

Solution proposée par l'IA.

Étape 1. Mise sous forme factorisée de l'équation.

On commence par transformer l'hypothèse donnée :

$$u^3 - u^2 - 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad u(u^2 - u - 2 \cdot \text{Id}_E) = 0.$$

On factorise le polynôme quadratique :

$$u^2 - u - 2\text{Id}_E = (u + \text{Id}_E)(u - 2\text{Id}_E),$$

ce qui donne finalement :

$$u(u + \text{Id}_E)(u - 2\text{Id}_E) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, on a :

$$u(u + \text{Id}_E)(u - 2\text{Id}_E)(x) = 0.$$

Étape 2. Définition des sous-espaces.

On considère les sous-espaces suivants :

$$E_0 := \text{Ker}(u), \quad E_{-1} := \text{Ker}(u + \text{Id}_E), \quad E_2 := \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E).$$

Étape 3. Les sous-espaces sont en somme directe.

Montrons que l'intersection de deux noyaux quelconques est réduite à $\{0\}$.

- Soit $x \in E_0 \cap E_{-1}$: alors $u(x) = 0$ et $(u + \text{Id}_E)(x) = 0$, donc $x = -u(x) = 0$.
- Soit $x \in E_0 \cap E_2$: alors $u(x) = 0$ et $u(x) = 2x$, donc $0 = 2x \Rightarrow x = 0$.
- Soit $x \in E_{-1} \cap E_2$: alors $u(x) = -x$ et $u(x) = 2x$, donc $-x = 2x \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Les trois intersections deux à deux sont nulles, donc la somme est directe :

$$E_0 \oplus E_{-1} \oplus E_2.$$

Étape 4. Tout vecteur de E se décompose dans cette somme.

On veut montrer que pour tout $x \in E$, il existe une unique décomposition :

$$x = x_0 + x_{-1} + x_2 \quad \text{avec } x_\lambda \in E_\lambda.$$

Pour cela, on construit explicitement des projecteurs à l'aide de polynômes.

Considérons le polynôme $P(X) = X(X+1)(X-2)$, qui s'annule en 0, -1 et 2. On définit trois polynômes de Lagrange associés :

$$\begin{aligned}
 q_0(X) &= \frac{(X+1)(X-2)}{(0+1)(0-2)} = \frac{(X+1)(X-2)}{-2}, \\
 q_{-1}(X) &= \frac{X(X-2)}{(-1)(-1-2)} = \frac{X(X-2)}{3}, \\
 q_2(X) &= \frac{X(X+1)}{(2)(2+1)} = \frac{X(X+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

On vérifie que :

$$q_0(0) = 1, \quad q_0(-1) = 0, \quad q_0(2) = 0, \quad \text{et de même pour les autres.}$$

On applique ces polynômes à l'endomorphisme u :

$$x = q_0(u)(x) + q_{-1}(u)(x) + q_2(u)(x).$$

On vérifie que :

$$q_0(u)(x) \in \text{Ker}(u), \quad q_{-1}(u)(x) \in \text{Ker}(u + \text{Id}_E), \quad q_2(u)(x) \in \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E).$$

Ainsi, tout vecteur $x \in E$ s'écrit comme somme d'un élément dans chacun des noyaux.

Conclusion.

On a montré que :

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E).$$

□



Exercice 1.26

1. Il y a une erreur grave de raisonnement. Retrouvez-la.
2. Les polynômes $q_0(X)$, $q_{-1}(X)$ et $q_2(X)$ portent un nom. Nommez-le.
3. L'égalité

$$x = q_0(u)(x) + q_{-1}(u)(x) + q_2(u)(x)$$

dans l'étape 4 est vraie mais n'est pas justifiée. Justifiez-là.

V.2. À la fin de ce chapitre,...

1. ... je connais le vocabulaire de l'algèbre linéaire. En particulier, je sais faire la différence entre les notions suivantes :
 - Somme de sous-espaces vectoriels.
 - Somme directe de sous-espaces vectoriels.
 - Espaces vectoriels supplémentaires.
 - L'écriture $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.
2. ... je sais montrer qu'une somme est directe.
3. ... je sais montrer que des espaces sont supplémentaires, et plus généralement, une égalité de la forme $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.
4. ... je sais reconnaître un déterminant de Vandermonde.
5. ... je sais définir les polynômes interpolateurs de Lagrange et je sais retrouver rapidement leurs propriétés.