

Corrigé du TD S3 : Circuits linéaires du premier ordre

Table des matières

1	Questions de cours	1
2	Constante de temps d'un système du premier ordre	1
3	Rendement énergétique de la charge d'un condensateur	1
4	Étude d'un circuit RL à deux mailles	4
5	Étude d'un circuit RC à deux mailles	6

1 Questions de cours

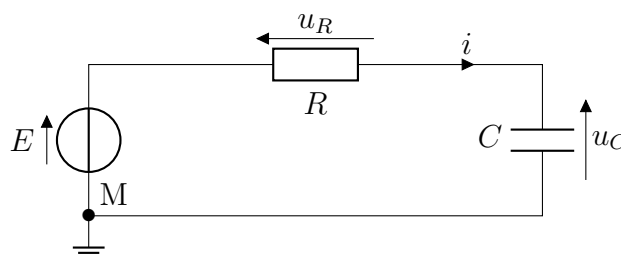
Fait en classe avant la visioconférence, à compléter en 2021.

2 Constante de temps d'un système du premier ordre

Fait en classe avant la visioconférence, à compléter en 2021.

3 Rendement énergétique de la charge d'un condensateur

3.1 Schéma équivalent du circuit pour $t > 0$:



Application de la loi des mailles sachant que $u_R(t) = Ri(t) = RC \frac{du_C}{dt}$:

$$E = u_C(t) + u_R(t) \Rightarrow \boxed{RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E}$$

On remarque que $RC = \tau = 1 \text{ ms}$ a la dimension d'un temps, c'est la **constante de temps** du circuit RC série.

3.2 La solution de l'ED avec second membre est de la forme :

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp} = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$$

La solution que l'on recherche doit vérifier la condition initiale donnée, $u_C(0) = 0$, ce qui donne :

$$A \exp(0) + E = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -E$$

Finalement l'expression de $u_C(t)$ recherchée est, pour tout $t > 0$:

$$u_C(t) = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (1)$$

3.3 on a :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{CE}{\tau} \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) = \frac{E}{R} \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \quad (2)$$

3.4 En utilisant les équations (1) et (2) et en notant $RC = \tau$, on obtient :

$$\mathcal{P}_C(t) = u_C(t) \cdot i(t) = \frac{E^2}{R} \left(\exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) - \exp \left(-\frac{2t}{\tau} \right) \right) \quad (3)$$

$$\mathcal{P}_R(t) = u_R(t) \cdot i(t) = Ri^2(t) = \frac{E^2}{R} \exp \left(-\frac{2t}{\tau} \right) \quad (4)$$

$$\mathcal{P}_G(t) = E \cdot i(t) = \frac{E^2}{R} \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \quad (5)$$

3.5 En remarquant que :

$$u_C(t) \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{u_C^2(t)}{2} \right)$$

On obtient :

$$\mathcal{P}_C(t) = u_C(t) \cdot i(t) = Cu_C(t) \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_C^2(t) \right) \quad (6)$$

$\mathcal{E}_{\text{elec}}(t)$ représente l'énergie emmagasinée par le condensateur à l'instant t .

3.6 En intégrant l'équation (6) entre l'instant initial ($t = 0$) et un instant t quelconque, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{P}_C(t') dt' &= \int_0^t \frac{d}{dt'} (\mathcal{E}_{\text{elec}}(t')) dt' \\ &= [\mathcal{E}_{\text{elec}}(t')]_0^t = \mathcal{E}_{\text{elec}}(t) - \mathcal{E}_{\text{elec}}(0) \end{aligned}$$

Plutôt que de calculer l'intégrale, il est plus simple d'utiliser l'expression de $\mathcal{E}_{\text{elec}}$ quand $t \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{E}_{\text{elec}\infty} = \frac{1}{2} Cu_{C\infty} = \frac{1}{2} CE^2 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

En remarquant que $\mathcal{P}_R(t) = \frac{dW_J}{dt}$ et en intégrant cette relation entre l'instant initial ($t = 0$) et un instant t quelconque, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{P}_R(t') dt' &= \int_0^t \frac{d}{dt'} (W_J(t')) dt' \\ &= [W_J(t')]_0^t = W_J(t) - W_J(0) \end{aligned}$$

En écrivant cette équation quand $t \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} W_{J\infty} &= \int_0^\infty \mathcal{P}_R(t') dt' = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} \exp\left(-\frac{2t'}{\tau}\right) dt' \\ &= \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{2t'}{\tau}\right) \right]_0^\infty \\ &= \frac{E^2}{R} \left(0 + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{1}{2} C E^2 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ W} \end{aligned}$$

En remarquant que $\mathcal{P}_G(t) = \frac{dW_G}{dt}$ et en intégrant cette relation entre l'instant initial ($t = 0$) et un instant t quelconque, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{P}_G(t') dt' &= \int_0^t \frac{d}{dt'} (W_G(t')) dt' \\ &= [W_G(t')]_0^t = W_G(t) - W_G(0) \end{aligned}$$

En écrivant cette équation quand $t \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} W_{G\infty} &= \int_0^\infty \mathcal{P}_G(t') dt' = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) dt' \\ &= \frac{E^2}{R} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \right]_0^\infty \\ &= \frac{E^2}{R} (0 + \tau) = C E^2 = 10^{-7} \text{ W} \end{aligned}$$

3.7 On a :

$$\begin{aligned} W_{G12} &= W_G(t_2) - W_G(t_1) = \int_0^{t_2} \mathcal{P}_G(t') dt' - \int_0^{t_1} \mathcal{P}_G(t') dt' \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_G(t') dt' \end{aligned}$$

3.8 On remarque que :

$$\boxed{W_{G\infty} = W_{J\infty} + \mathcal{E}_{\text{elec}\infty}} \quad (7)$$

L'énergie fournie par le générateur est égale à l'énergie reçue par le condensateur et la résistance. La loi des mailles indique que :

$$\begin{aligned} E &= u_C(t) + u_R(t) \\ \Rightarrow E \cdot i(t) &= u_C(t) \cdot i(t) + u_R(t) \cdot i(t) \\ \Rightarrow \mathcal{P}_G(t) &= \mathcal{P}_C(t) + \mathcal{P}_R(t) \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière équation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$, on retrouve bien l'équation (7).

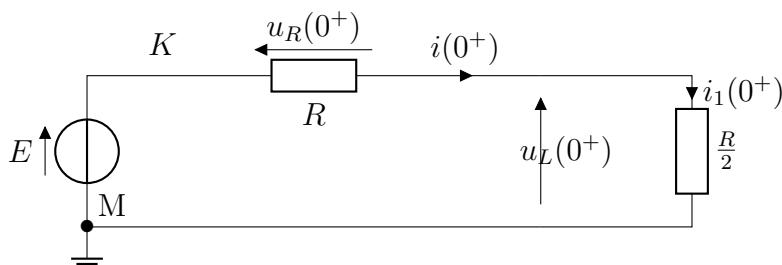
3.9 Le rendement de la charge du condensateur vaut :

$$\boxed{\rho = \frac{\mathcal{E}_{\text{elec}\infty}}{W_{G\infty}} = \frac{1}{2}}$$

4 Étude d'un circuit RL à deux mailles

4.1 Comme l'interrupteur K était ouvert depuis très longtemps, le courant i_2 dans la bobine est nul à $t = 0^-$, en effet s'il restait un courant dans la bobine, il aurait eu le temps de s'évacuer à travers la résistance $\frac{R}{2}$ avant la fermeture de K . Par continuité du courant dans la bobine, on en déduit $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$.

Le schéma équivalent du montage à $t = 0^+$ est donc :



On en déduit :

$$i(0^+) = i_1(0^+) = \frac{E}{R + \frac{R}{2}} = \frac{2E}{3R} = 2 \text{ mA}$$

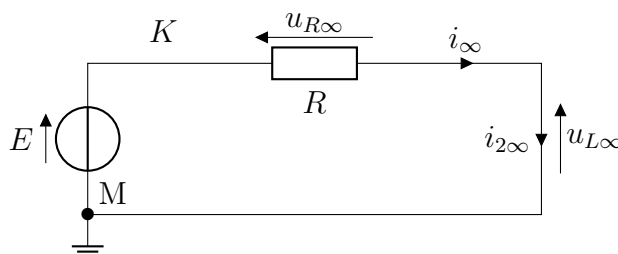
et :

$$u_L(0^+) = \frac{R}{2} i_1(0^+) = \frac{E}{3} = 1 \text{ V}$$

4.2 En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil, on en déduit $u_{L\infty} = 0$.

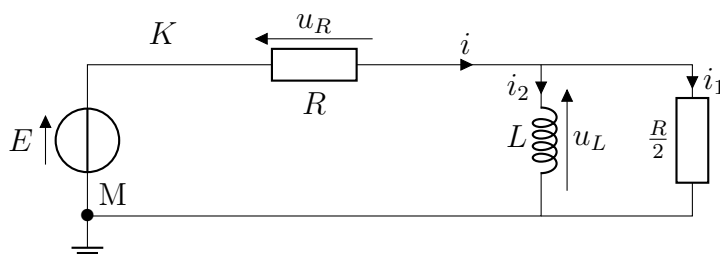
Le courant dans la résistance $\frac{R}{2}$ est donc nul également car la tension à ses bornes est nulle : $i_{1\infty} = 0$.

Le schéma équivalent du montage à $t \rightarrow \infty$ est donc :



On en déduit : $i_\infty = i_{2\infty} = \frac{E}{R} = 3 \text{ mA}$

4.3



La loi des nœuds indique que :

$$i = i_1 + i_2 \Leftrightarrow \frac{u_R}{R} = \frac{u_L}{R/2} + i_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-u_L + E}{R} - \frac{2u_L}{R} = i_2 \Leftrightarrow \frac{E}{R} - 3\frac{u_L}{R} = i_2$$

Il faut ensuite penser à dériver cette dernière équation par rapport à t pour avoir une ED qui contient $\frac{du_L}{dt}$ et u_L :

$$\begin{aligned} -\frac{3}{R} \frac{du_L}{dt} &= \frac{di_2}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{u_L}{L} \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{R} \frac{du_L}{dt} - \frac{u_L}{L} &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3L}{R}}_{\tau} \frac{du_L}{dt} + u_L &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

4.4 La solution générale de (8) pour $t > 0$ est de la forme :

$$u_L(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}$$

En utilisant la condition initiale $u_L(0^+) = \frac{E}{3}$, on obtient :

$$\frac{E}{3} = A \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) \Leftrightarrow A = \frac{E}{3}$$

En conclusion :

$$u_L(t) = \frac{E}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (9)$$

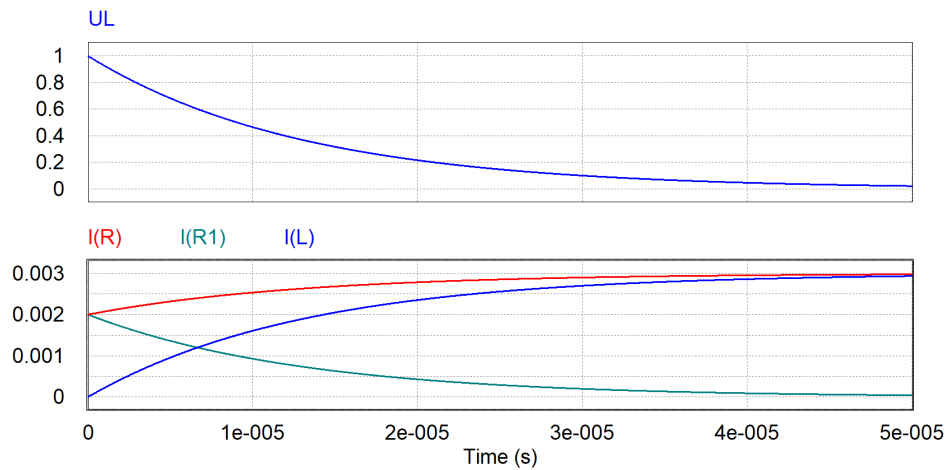
4.5 t_0 est l'instant pour lequel $u_L(t_0)$ vaut $\frac{1}{10} \cdot u_L(0^+) = \frac{1}{10} \cdot \frac{E}{3}$, en utilisant (9), on obtient :

$$\begin{aligned} u_L(t_0) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{E}{3} \Leftrightarrow \frac{E}{3} \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{E}{3} \\ \ln\left[\exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right)\right] &= \ln\left(\frac{1}{10}\right) \\ -\frac{t_0}{\tau} &= -\ln(10) \\ \Leftrightarrow t_0 &= \tau \cdot \ln(10) = \frac{3L}{R} \cdot \ln(10) \end{aligned} \quad (10)$$

4.6 La connaissance de la valeur numérique de t_0 nous permet de calculer celle de L à partir de l'équation (10) :

$$L = \frac{R \times t_0}{3 \ln(10)} = \frac{10^3 \times 3 \cdot 10^{-5}}{3 \ln(10)} = 4,34 \text{ mH}$$

4.7



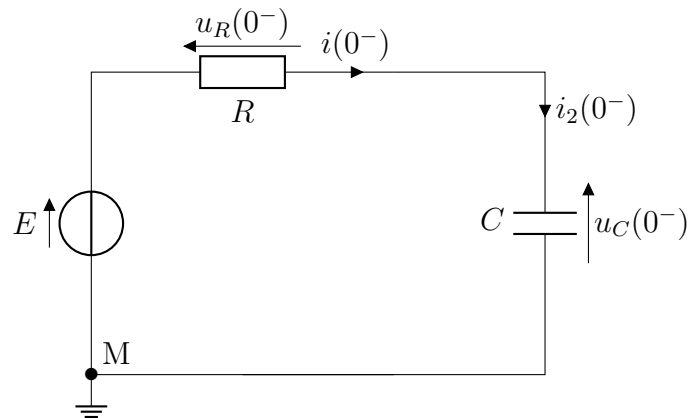
On peut remarquer que comme prévu :

- * u_L vaut 1 V à $t = 0^+$ puis tend vers 0 V.
- * $i = I(R)$ vaut 2 mA à $t = 0^+$ puis tend vers 3 mA.
- * $i_1 = I(R1)$ vaut 2 mA à $t = 0^+$ puis tend vers 0.
- * $i_2 = I(L)$ vaut 0 mA à $t = 0^+$ puis tend vers 3 mA.

5 Étude d'un circuit RC à deux mailles

5.1 A $t = 0^-$, l'interrupteur K est ouvert donc $i_1(0^-) = 0$.

Comme l'interrupteur K était ouvert depuis très longtemps, à $t = 0^-$ on peut considérer que le condensateur est chargé et le schéma équivalent du montage est :

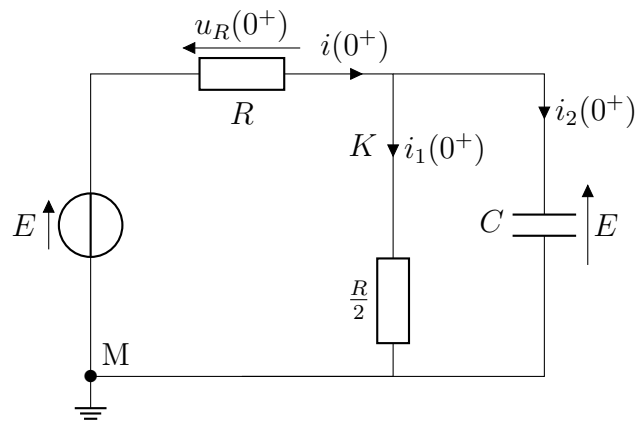


Le circuit est équivalent à un circuit RC série en régime permanent, on en déduit :

$$u_C(0^-) = E \quad \text{et} \quad i(0^-) = i_2(0^-) = 0$$

5.2 La tension $u_C(t)$ étant une fonction continue du temps, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = E = 6 \text{ V}$.

On va dessiner le schéma équivalent du montage à $t = 0^+$, en remarquant que $u_R(0^+) = -u_C(0^+) + E = 0$:

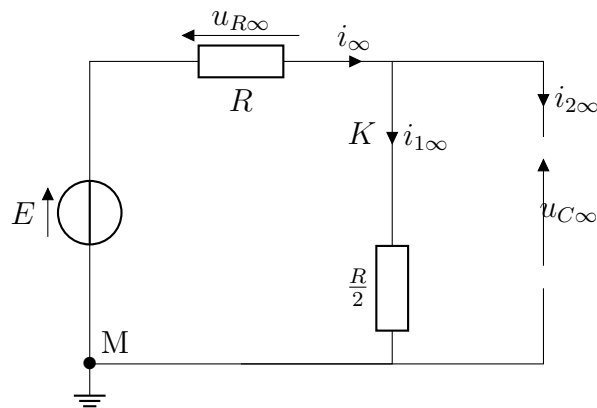


On en déduit : $i_1(0^+) = \frac{E}{R/2} = \frac{2E}{R} = 12 \text{ mA}$

puis $i(0^+) = \frac{u_R(0^+)}{R} = 0 \text{ mA}$

et $i_2(0^+) = i(0^+) - i_1(0^+) = -i_1(0^+) = -\frac{2E}{R} = -12 \text{ mA}$

5.3 On régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc $i_{2\infty} = 0$ et le schéma équivalent du circuit est :



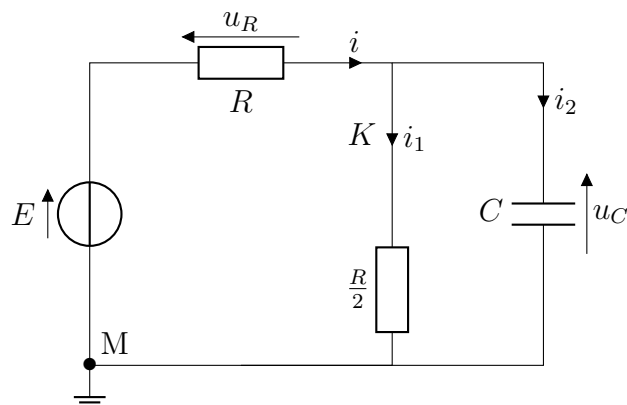
On reconnaît un montage diviseur de tension, ce qui permet de déterminer rapidement $u_{C\infty}$ et les intensités des courants :

$$u_{C\infty} = \frac{R/2}{R + R/2} E = \frac{E}{3} = 2 \text{ V}$$

et :

$$i_\infty = i_{1\infty} = \frac{E}{R + R/2} = \frac{2E}{3R} = 4 \text{ mA}$$

5.4



La loi des nœuds indique que :

$$\begin{aligned}
 i &= i_1 + i_2 \Leftrightarrow \frac{u_R}{R} = \frac{u_C}{R/2} + C \frac{du_C}{dt} \\
 \Leftrightarrow \frac{-u_C + E}{R} &= \frac{2u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt} \Leftrightarrow \frac{E}{R} = 3 \frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt}
 \end{aligned}$$

En multipliant l'équation précédente par $\frac{R}{3}$, on obtient :

$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{RC}{3}}_{\tau} \frac{du_C}{dt} + u_C = \frac{E}{3}} \quad (11)$$

5.5 La solution générale de (11) pour $t > 0$ est de la forme :

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp} = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{3} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

En utilisant la condition initiale $u_C(0^+) = E$, on obtient :

$$E = A \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) + \frac{E}{3} \Leftrightarrow A = \frac{2E}{3}$$

En conclusion :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3} + \frac{2E}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad (12)$$

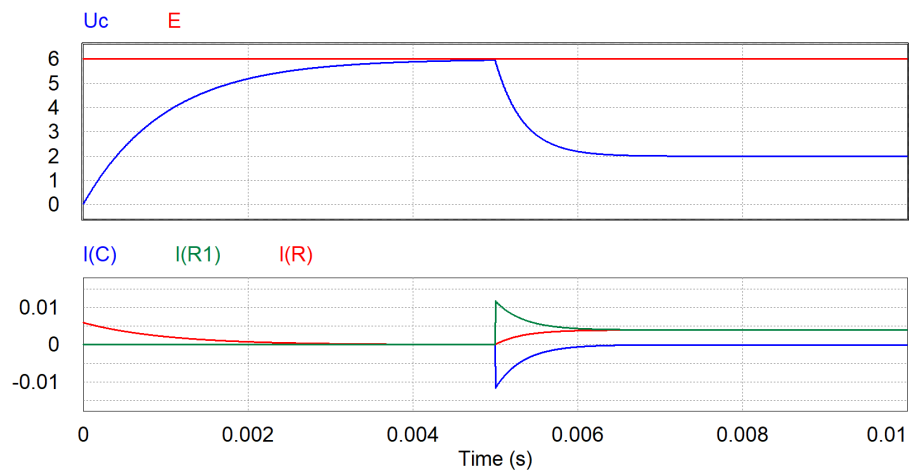
5.6 La solution de (11) pour $t > 0$ peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \frac{E}{3} + \frac{2E}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
 u_C(t) &= E - \frac{2E}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \\
 u_C(t) &= u_C(0^+) + (u_{C\infty} - u_C(0^+)) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Le régime permanent est atteint lorsque $u_C(t)$ a varié de 99% de $u_{C\infty} - u_C(0^+) = \frac{E}{3} - E = -\frac{2E}{3}$, le temps de réponse t_r est donc tel que :

$$\boxed{1 - \exp\left(-\frac{t_r}{\tau}\right) = 0,99 \Rightarrow \exp\left(-\frac{t_r}{\tau}\right) = 0,01 \Rightarrow t_r = \ln(100) \times \tau \approx 4,6 \tau}$$

5.7



On peut remarquer que comme prévu, à la fermeture de K :

- * u_C vaut E puis tend vers $E/3$.
- * $i = I(R)$ vaut 0 mA puis tend vers 4 mA.
- * $i_1 = I(R1)$ vaut 12 mA puis tend vers 4 mA.
- * $i_2 = I(C)$ vaut -12 mA puis tend vers 0 mA.