

Exercice 1. Parité : cas théoriques

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Si f et g sont paires, étudier la parité des fonctions $f + g$, $f \times g$, $f \circ g$.
2. Si f et g sont impaires, étudier la parité des fonctions $f + g$, $f \times g$, $f \circ g$ et f^{-1} (si f est bijective).
3. Si f est paire et g est impaire, étudier la parité des fonctions $f + g$, $f \times g$, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2. Parité : cas pratiques

1. Montrer que la fonction $g(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ est paire.
2. Montrer que la fonction $f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
En déduire que la fonction $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Partie entière

1. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq d(x) < 1$. Résoudre alors l'équation $d(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que d est 1-périodique et la représenter graphiquement.
2. Soit la fonction $h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$. Montrer que h est majorée sur $]0, +\infty[$. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}^*$?
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Exercice 4. Croissante et périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante et périodique de période $T > 0$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Monotonie : cas théoriques

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Si f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, étudier le sens de variation des fonctions $f + g$ et $f \circ g$.
2. Si f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}$, étudier le sens de variation des fonctions $f + g$ et $f \circ g$.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$, étudier le sens de variation des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6. Monotonie : sans dérivation

Sans dériver, déterminer la monotonie des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \text{ sur }]1, +\infty[\quad g(x) = \sqrt{x} \times \ln(x^2 + 1).$$

Exercice 7. Composée de fonctions monotones

Donner sans aucun calcul le sens de variation des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{2x-4} - 10 \quad g(x) = (-3x+6)^3 + 1 \quad h(x) = 4 - \frac{1}{3x-6} \quad i(x) = \sqrt{\frac{1}{-3x+6}}$$

Exercice 8. Equations

Résoudre les équations suivantes

1. $\sqrt{x-4} = 2$.
2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$.
3. $|x+3| = 5$.
4. $|2x-3| - |2-x| = 1$.

Exercice 9. Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes

1. $\sqrt{x^2 + 1} - 3 \geq 0$.
2. $|x + 1| \leq 3$.
3. $|2x - 1| \leq |x - 1|$.

Exercice 10. Équation et inéquation avec un paramètre

1. Résoudre l'équation de paramètre réel $m : (m^2 - 1)x = m + 1$.
2. Résoudre l'inéquation de paramètre réel $m : (m^2 - 1)x < m + 1$.

Exercice 11. Inégalités fonctionnelles

1. Montrer que pour tout $x \geq 1$,

$$\ln(x) \leq \sqrt{x}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,

$$1 - x + \frac{x^2}{2} \leq e^{-x}.$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x).$$

Exercice 12. Étude de fonction

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi x}{1 + x^2}\right).$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. On restreint l'étude de f à $\mathbb{R}_+$. On pose u la fonction $u : x \mapsto \frac{2\pi x}{1 + x^2}$.
 - (a) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.
 - (b) Calculer la limite de u en $+\infty$.
 - (c) En déduire que u prend ses valeurs dans $[0, \pi]$.
 - (d) Déterminer alors le signe de f sur $\mathbb{R}_+$.
4.
 - (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
 - (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+$.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Courbes

Etudier les fonctions suivantes sur leur domaine de définition afin de pouvoir tracer l'allure de leur courbe représentative.

$$x \mapsto e^{-x}, \quad x \mapsto e^{-x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \mapsto x \ln(x), \quad x \mapsto x^x.$$

Exercice 14. Valeurs exactes

Le but de cet exercice est de calculer les valeurs des 2 nombres

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ et } S = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

1. Exprimer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ en fonction de C et S .
2. En déduire que C est solution de l'équation

$$4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

3. Déterminer les valeurs de C et de S .

Exercice 15. Trigonométrie

En utilisant les valeurs que vous connaissez, calculer les nombres suivants :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{8}\right).$$