

Signaux périodiques

Le cours d'électronique de MP s'appuie sur la partie signaux et sur les notions d'électrocinétique introduites en MPSI. Il a notamment pour objectif de comprendre la complémentarité et la corrélation existant entre les approches temporelles et fréquentielles : ces deux aspects sont deux facettes d'un même sujet d'étude.

Notons que ces notions, ici appliquées à l'électrocinétique, sont réutilisables dans de nombreux domaines de la physique « linéaire », notamment la mécanique.

A. Spectre d'un signal périodique

A.1 Coefficients du FOURIER et représentation spectrale

Le français Joseph FOURIER a montré que tout signal $s(t)$ périodique de fréquence f et de forme quelconque peut se décomposer en une somme de signaux harmoniques de fréquences multiples de f : $0, f_1 = f, f_2 = 2f, \dots, f_n = nf, \dots$

Il peut donc s'écrire sous la forme :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n),$$

où les A_n sont des constantes positives et les φ_n des constantes.

La somme infinie est le développement en série de FOURIER du signal $s(t)$. Les formules permettant de trouver les amplitudes A_n et les phases initiales φ_n des composantes sinusoïdales du signal ne sont pas au programme. En revanche, il faut savoir utiliser un développement en série de FOURIER indiqué dans un énoncé.

Les différents termes qui apparaissent dans la série de FOURIER portent des noms particuliers à connaître :

- A_0 est appelée **composante continue**, c'est la valeur moyenne du signal ;
- la composante sinusoïdale $A_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1)$ qui a la même fréquence f que le signal $s(t)$ est appelée **fondamental** ;
- la composante sinusoïdale $A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$, qui a une fréquence n fois plus élevée que la fréquence du signal, avec $n \geq 2$, est appelée **harmonique de rang n** .

La représentation graphique des A_i en fonction des f_i constitue le spectre d'amplitude. Elle permet de visualiser le contenu fréquentiel du signal. En toute rigueur, la représentation spectrale complète d'un signal doit comporter aussi la représentation des phases initiales φ_i en fonction des f_i . Ce graphique, pas toujours facile à interpréter, est souvent éludé.

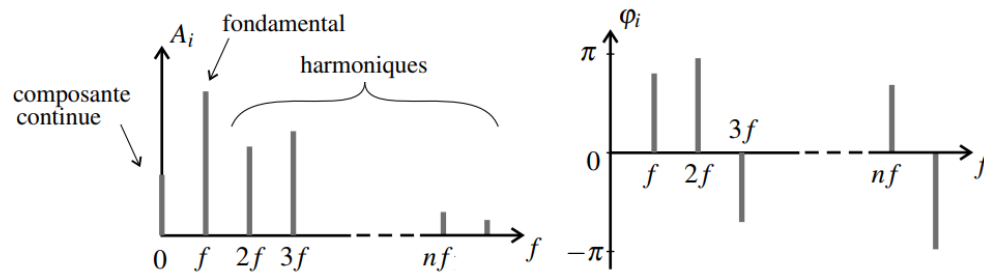


FIGURE 1 – Spectres d'un signal périodique $s(t)$ -à gauche le spectre en amplitude-

La figure 1 représente la représentation spectrale complète d'un signal ; la plupart du temps, seul le spectre en amplitude sera utilisé.

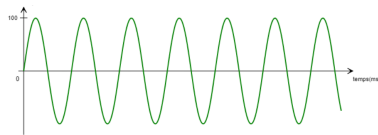
Il est donc fondamental de comprendre que deux représentations d'un même signal sont possibles :

- la représentation temporelle, qui donne l'allure du signal s en fonction du temps t ;
- et la représentation fréquentielle (ou spectre), qui permet de distinguer les fréquences qui constituent le signal $s(t)$.

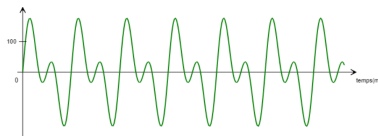
Ces deux représentations ne sont pas contradictoires et contiennent toutes les deux des informations riches ; il faut donc savoir jongler entre ces deux représentations.

A.2 Exemples

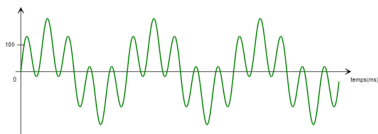
Signal harmonique



Somme de deux signaux harmoniques de fréquences f_1 et $f_2 = 2f_1$



Produit de deux signaux harmoniques de fréquences f_1 et $f_2 = 1,5f_1$



B. Quadripôle linéaire

Un quadripôle est un bloc d'un réseau électrique, possédant une tension d'entrée u_e et une tension de sortie u_s . Ce quadripôle peut être étudié en se concentrant sur l'aspect temporel (par le biais de son équation différentielle) ou sur l'aspect fréquentielle (par le biais de sa fonction de transfert).

B.1 Exemple

L'objectif est de montrer sur un exemple les liens existants entre la *description temporelle* des systèmes, faisant apparaître l'équation différentielle, et la *description fréquentielle* (ou harmonique) utilisant la *fonction de transfert*.

Intéressons-nous au circuit ci-dessous

B.2 Système linéaire et fonction de transfert $\underline{H}$

Un système qui vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un système linéaire.

Si le signal d'entrée d'un système linéaire est un signal harmonique de pulsation ω , alors en régime permanent, le signal de sortie est également harmonique de même pulsation ω , mais les deux signaux n'ont pas forcément la même amplitude et peuvent être déphasés.

La fonction de transfert harmonique d'un système linéaire est le rapport des amplitudes complexes des signaux d'entrée et de sortie en fonction de la pulsation, $\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$. Comme tout nombre complexe, elle est caractérisée par un module et un argument qui possèdent un sens physique.

Le module de la fonction de transfert $\underline{H}$ est appelé **gain**. On le note H (parfois G).

$$H = |\underline{H}| = \left| \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \right| = \frac{|\underline{U}_s|}{|\underline{U}_e|}$$

$$H = \frac{U_s}{U_e}$$

Le gain H est donc le rapport des amplitudes de la tension de sortie sur la tension d'entrée.

L'argument de la fonction de transfert $\underline{H}$ est noté φ et on l'appelle déphasage entrée-sortie.

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}\right)$$

$$\varphi = \arg(\underline{U}_s) - \arg(\underline{U}_e)$$

$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e$$

φ représente donc le déphasage entre le signal de sortie et le signal d'entrée.

L'expérimentateur préfère définir le gain H comme le rapport des valeurs efficaces des tensions d'entrée et de sortie : le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ étant appliqué au numérateur et au dénominateur, la valeur de H reste la même.

Dans de nombreuses situations, le gain est exprimé en décibel (dB) : le rapport des amplitudes des signaux de sortie et d'entrée, exprimé de façon logarithmique. Il est nommé gain en décibel G_{dB} du système à la pulsation ω :

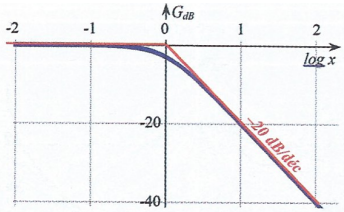
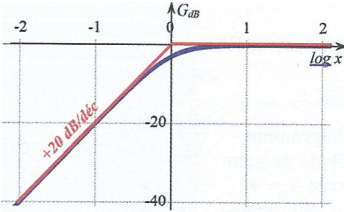
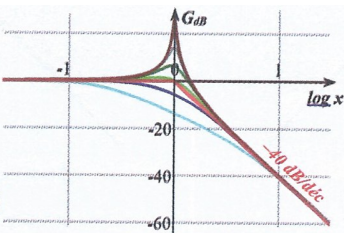
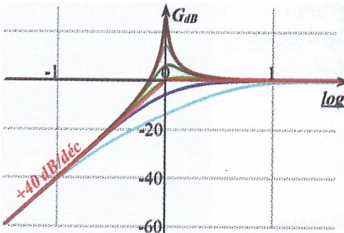
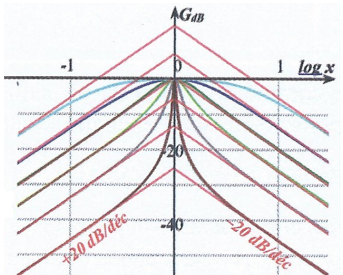
$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \left(\frac{U_s}{U_e} \right)$$

B.3 Cas du filtrage

Un quadripôle peut opérer des fonctions multiples : amplification, inversion, isolement, intégration, dérivation,... Une des fonctions d'un quadripôle peut être une fonction de **filtrage**.

B.3.1 Principaux filtres

Le tableau ci-dessous répertorie les principaux filtres du premier et du second ordre. Il est important de bien mémoriser la forme des diagrammes de BODE, ainsi que les expressions canoniques des fonctions de transfert.

	Passe-Bas	Passe-Haut	Passe-Bande
	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$	$\underline{H} = \frac{jxH_0}{1 + jx} = \frac{H_0}{1 - \frac{j}{x}}$	
Ordre 1			
	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	$\underline{H} = \frac{-x^2H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - jQ(x - \frac{1}{x})}$
Ordre 2			

B.3.2 Quelques définitions

Fréquence de coupure f_c : la fréquence de coupure f_c est la fréquence f pour laquelle le gain vaut sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$: $H(f_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$ ou $G_{dB}(f_c) = G_{dB,\max} - 3 \text{ dB}$

Bande passante : c'est l'ensemble des fréquences pour lesquelles le gain est supérieur à $H > \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$ ou $G_{dB} > G_{dB,\max} - 3 \text{ dB}$

Filtrage actif/passif Un filtre actif contient un élément de puissance type amplificateur linéaire intégré (ALI). Le gain H est alors potentiellement supérieur à 1 (ou $G_{dB} > 0$) ; le signal est alors amplifié.

B.3.3 Action d'un filtre sur un signal périodique

Le principe du filtrage d'un signal périodique est expliqué sur la figure 2 : les fréquences du spectre contenues dans la bande passante sont conservées, et les autres sont détruites : on obtient en sortie un nouveau signal, dont la forme peut être très différente de celle du signal d'entrée.

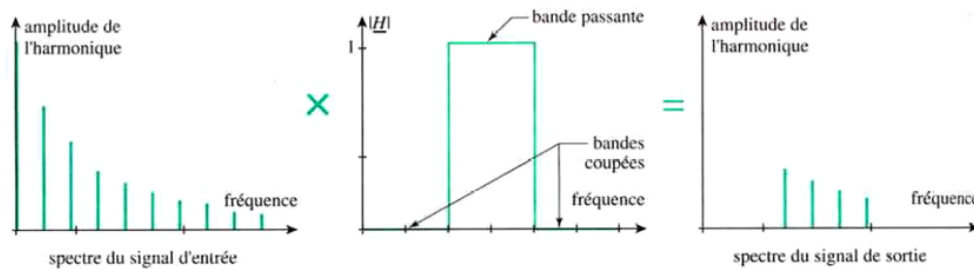


FIGURE 2 – Action d'un filtre idéal sur un signal

Le principe général du filtrage réel est similaire au filtrage idéal ; la différence réside dans le fait que les fréquences hors bandes passantes, mais proches de la fréquence de coupure ne sont plus coupées, mais atténuées. Elles le sont d'autant plus que la fréquence est loin de la fréquence de coupure.

Les signaux de sortie sont donc de faiblement à fortement modifiés par rapport au signal d'entrée. A titre d'exemple, pour un filtre du premier ordre :

- Si $f = f_c$, la fréquence est atténuée à -3 dB, ce qui correspond à une diminution de 30%
- Si $f = 10f_c$, la fréquence est atténuée à -20 dB, ce qui correspond à une diminution de 90%.
- Si $f = 100f_c$, la fréquence est atténuée à -40 dB, ce qui correspond à une diminution de 99%.

Dans de nombreux capteurs, la grandeur primordiale, qui contient l'information importante, est la **valeur moyenne**. Pour récupérer cette information, il faut extraire la valeur moyenne du signal : pour cela, on utilise un filtre **passé-bas** de faible (voire très faible) fréquence de coupure f_c .

A contrario, on peut vouloir éliminer la valeur moyenne du signal : on utilise alors un filtre **passé-haut**. C'est ce que l'on effectue en passant du mode DC au mode AC sur l'oscilloscope.

Le choix de la fréquence de coupure f_c est donc primordial dans le traitement d'un signal. Dans le tableau 3, on considère une tension d'entrée $e(t)$, rectangulaire, d'amplitude 1 V, de fréquence 1 Hz et de valeur moyenne 1 V, qu'on applique à l'entrée d'un filtre passe bas de fréquence f_c et d'un filtre passe haut de même fréquence de coupure f_c .

B.3.4 Comportement intégrateur ou dérivateur

Dans certaines plages de fréquences, la fonction de transfert d'un quadripôle linéaire peut être approximée.

Considérons un fil passe-haut dans le domaine où $\omega \ll \omega_0$ (ou $x \ll 1$).

De la même façon, intéressons-nous à un filtre passe-bas dans le domaine où $\omega \gg \omega_0$ (ou $x \gg 1$).

B.4 Quadripôle non-linéaire (HP)

Un quadripôle linéaire ne fait qu'agir sur l'amplitude (et la phase à l'origine) des différentes fréquences contenues dans le signal d'entrée ; ces différentes fréquences peuvent être amplifiées, atténuées, déphasées...

Un quadripôle non-linéaire fait apparaître dans le spectre du signal de sortie des nouvelles fréquences, qui n'apparaissent pas dans le spectre du signal d'entrée.

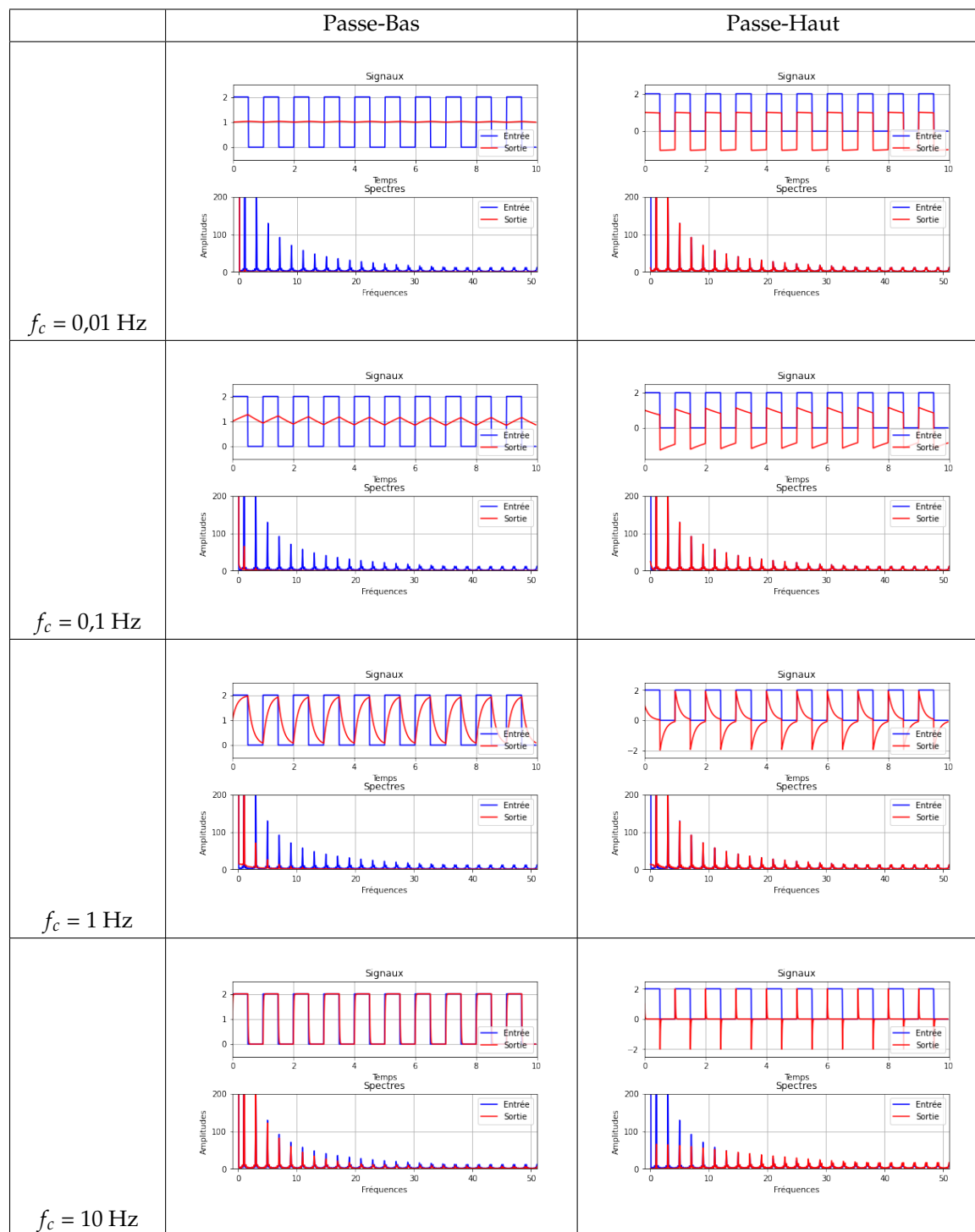


FIGURE 3 – Actions de filtres sur un signal rectangulaire