Variables aléatoires

I Epreuve de Bernoulli

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues possibles : l'une est appelée « **succès** » notée S et l'autre appelée **« échec »** notée $\bar{S}$.

Pour simplifier l'écriture, dans une épreuve de Bernoulli, on note p la probabilité de succès, donc :

- $p(S) = p$

- $p(\bar{S}) = 1 - p$

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ».

L'évènement $\bar{S}$ est alors « Ne pas obtenir un 6 ».

C'est une épreuve de Bernoulli où $p = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Application : Exercice 1

II Schéma de Bernoulli

Définition :

On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple : Si on effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne, alors les deux tirages sont indépendants.

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.

Le nombre entier n et le nombre réel p sont les **paramètres** du schéma de Bernoulli.

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ». Puisque les lancés sont identiques et indépendants, c'est un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 3$ et $p = p(S) = \frac{1}{6}$

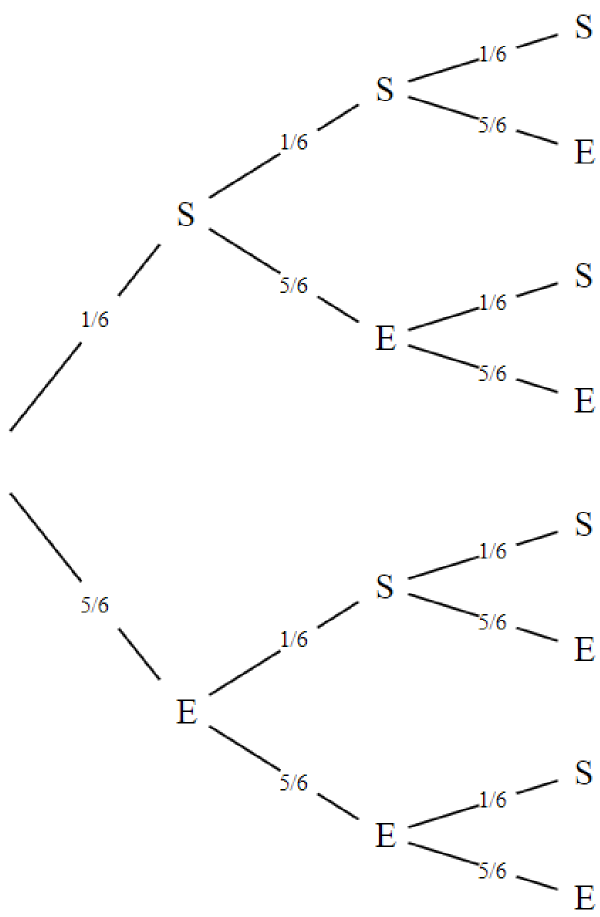
Méthode :

On peut modéliser un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré de probabilité en appliquant les règles suivantes :

1/ La probabilité d'un évènement représenté par un chemin de l'arbre est égale au produit des probabilités rencontrées au cours du chemin.

2/ Si un évènement est constitué de plusieurs chemins distincts de l'arbre, alors sa probabilité est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

Dans l'exemple précédent, on peut réaliser l'arbre pondéré ci-contre :



1/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement « Obtenir 3 succès », on a $p(S/S/S) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

2/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement

« Obtenir un succès et deux échecs », on doit d'abord calculer la probabilité d'un des chemins qui représentent cet évènement, soit $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

On constate ensuite que 3 chemins représentent cet évènement.

Il faut donc multiplier par 3 la probabilité obtenue, pour connaître la probabilité de l'évènement « Obtenir un succès et deux échecs », soit $\frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$

Application : Exercice 2

III Variables aléatoires

1- Définition

Définition :

Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers E.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat ». L'ensemble de toutes les issues possibles $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur E qui peut prendre les valeurs $2, 3$ ou -4 :

- Pour les issues 2, 4 ou 6, on a $X = 2$.
- Pour l'issue 1, on a $X = 3$.
- Pour les issues 3 et 5, on a $X = -4$.

Application : Exercice 3

2- Loi de probabilité

Définition :

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent. Chaque issue du lancer de dé est équiprobable (même probabilité) et est égale à $\frac{1}{6}$.

On note donc :

- $P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 3) = \frac{1}{6}$
- $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : $P(X = x_i)$ peut se noter p_i

3- Espérance

Définition :

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est :

$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$

Exemple : En reprenant la loi de probabilité de l'exemple précédent,

$$E(X) = \frac{1}{3} \times (-4) + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{6}$$

Remarque : L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Application : Exercice 4

Variables aléatoires (Exercices)

Exercice 1

Dans une usine produisant $50\ 000$ pièces par jour, on considère que $2\ \%$ des pièces sont défectueuses. On prélève une pièce au hasard et on note D l'évènement « la pièce est défectueuse ».

1/ Quelle est la probabilité de succès de l'évènement D ?

2/ Quelle est la probabilité d'échec de l'évènement D ?

Exercice 2

Dans une société internationale, 4% des $20\ 000$ salariés sont végétariens. On désigne au hasard deux salariés et on note V l'évènement « le salarié est végétarien ».

Le nombre d'employés étant très élevé, on peut considérer que la désignation est équivalent à un tirage avec remise.

1/ Représenter la situation par un arbre pondéré.

2/ Quelle est la probabilité de désigner deux salariés végétariens.

3/ Quelle est la probabilité de désigner un salarié végétarien et un salarié non végétarien.

Exercice 3

Des étudiants jouent avec un jeu de 32 cartes et mettent en place des règles bien précises :

- Si la carte obtenue est un nombre, ils obtiennent 5 points.
- Si la carte obtenue est un roi, une dame ou un valet, ils obtiennent 8 points.
- Si la carte obtenue est un as, ils perdent 10 points.

On désigne par X la variable aléatoire donnant les points de chaque étudiant.

1/ Combien y a-t-il d'issues possibles dans cette expérience aléatoire ?

2/ Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

Exercice 4

Un magasin commercialise des canapés et des tables de salon. Quand un client se présente, il achète au plus un canapé et au plus une table de salon. Une étude a montré que :

- la probabilité pour qu'un client achète un canapé est 0,24
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il a acheté un canapé est 0,25
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il n'achète pas de canapé est 0,1.

On choisit un client au hasard parmi ceux ayant participé à l'étude. On note :

- C l'événement « le client achète un canapé » et $\bar{C}$ son événement contraire
- T l'événement « le client achète une table de salon » et $\bar{T}$ son événement contraire.

1/ Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2/ Calculer la probabilité que le client achète un canapé et une table de salon.

3/ Montrer que la probabilité $p(T)$ est égale à 0,136.

4/ Dans ce magasin, le prix moyen d'un canapé est de 1 000 € et le prix moyen d'une table de salon est de 300 €. On note X la variable aléatoire correspondante à la somme payée par le client.

Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	0	300	1 000	1 300
$P(X = x_i)$				

5/ Calculer l'espérance de X

Exercice 5

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer $P(X \geq 5)$ et interpréter le résultat.

3/ Calculer l'espérance de X

Exercice 6

À un jeu de grattage, 4 500 000 tickets sont émis et vendus chacun au prix de 2 €. Chaque ticket permet de remporter ou non un gain. Les différents gains sont répartis ainsi :

Montant du gain en €	25 000 €	1 000 €	100 €	20 €	10 €	4 €	2 €
Nombre de tickets	3	8	600	75 000	130 000	505 504	599 992

Un joueur achète un ticket au hasard chez un buraliste. On note G la variable aléatoire égale au gain réel du joueur ($gain\ brut\ -\ mise$).

1/ Préciser les valeurs prises par G.

2/ Déterminer la loi de probabilité de G (les probabilités seront données sous forme de fractions).

3/ Montrer que, la probabilité que le joueur gagne réellement de l'argent en jouant à ce jeu est de 0,158.

4/ Un autre joueur décide d'acheter deux tickets de ce jeu au hasard. On rappelle que la probabilité de gagner réellement de l'argent en jouant à ce jeu est de 0,158. On note S l'évènement « le ticket acheté permet de gagner de l'argent ».

a/ Traduire la situation par un arbre de probabilité.

b/ Déterminer la probabilité que ce joueur ait acheté deux tickets lui permettant de gagner réellement de l'argent. Arrondir au millième.

5/ Calculer l'espérance de la variable aléatoire X

Exercice 7

Antonella prend tous les jours sa voiture pour se rendre au travail. Elle rencontre sur son trajet 3 feux tricolores qui fonctionnent tous les trois de la même manière et de façon indépendante.

Des relevés statistiques ont permis d'établir que pour chaque feu :

- la probabilité qu'il soit vert lorsqu'Antonella s'y présente est égale à $0{,}6$
- La probabilité qu'il soit orange lorsqu'Antonella s'y présente est égale à $0{,}1$
- La probabilité qu'il soit rouge lorsqu'Antonelle s'y présente est égale à $0{,}3$

V désigne l'événement : "le feu est vert" et $\bar{V}$ l'événement contraire.

1/ Illustrer par un arbre de probabilités l'expérience aléatoire consistant à rencontrer successivement les trois feux.

2/ Quelle est la probabilité qu'Antonella rencontre 3 feux verts ?

3/ Quelle est la probabilité qu'Antonella rencontre au moins un feu vert ?

La collègue d'Antonella qui fait du covoiturage avec elle lui propose un jeu :

- Si le feu est vert, Antonella gagne 5 euros
- Si le feu est rouge, Antonella perd 7 euros

Soit la variable aléatoire X qui associe la couleur du feu à l'argent gagné ou perdu.

4/ Déterminer la loi de probabilité de X.

5/ Calculer $P(X \geq 3)$ et interpréter le résultat.

6/ Calculer l'espérance de X

<u>En plus</u>

<u>Les touristes</u>

Pour fidéliser ses touristes, l'office de tourisme d'une ville propose gratuitement un jeu en deux e tapes. La première étape consiste à gratter une carte pour gagner un porte-clefs de la ville et la deuxième étape consiste à gratter une autre carte pour gagner une entrée à la piscine municipale. Ces deux étapes du jeu sont indépendantes.

Le touriste a sept chances sur dix de gagner un porte-clefs de la ville et quatre chances sur dix de gagner une entre e gratuite a la piscine municipale. On définit les évènements :

- P : « le touriste gagne un porte-clefs de la ville »
- M : « le touriste gagne une entrée gratuite à la piscine municipale ».

1/ Représenter la situation par un arbre de probabilités.

2/Calculer la probabilité que le touriste ne gagne aucun lot.

3/ Calculer la probabilité que le touriste remporte au moins un lot.

4/ Un porte-clefs coûte $0{,}80$ € à la municipalité et une entrée à la piscine $5{,}50$ €.

On note X la variable aléatoire qui a chaque touriste participant associe le coût, en euro, de ses éventuels lots pour la municipalité.

Déterminer la loi de probabilité de X.

5/ Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat

<u>Bien meublé</u>

Un magasin, spécialiste de l'ameublement des chambres, commercialise des lits, des têtes de lit et des dressings. Quand un client se présente, il achète au maximum un lit, au maximum une tête de lit et au maximum un dressing. Une étude a montré que :

- la probabilité qu'un client achète un lit est de $0{,}22$.
- la probabilité qu'un client achète une tête de lit quand il a acheté un lit est de $0{,}37$.
- la probabilité qu'un client achète une tête de lit quand il n'achète pas de lit est de $0{,}1$.
- la probabilité qu'un client achète un dressing quand il a acheté une tête de lit est de $0{,}28$.
- la probabilité qu'un client achète un dressing quand il n'achète pas une tête de lit est de $0{,}43$.

On choisit un client au hasard parmi ceux ayant participé à l'étude. On note :

- L l'événement « le client achète un lit » et $\bar{L}$ son événement contraire
- T l'événement « le client achète une tête de lit » et $\bar{T}$ son événement contraire.
- D l'événement « le client achète un dressing » et $\bar{D}$ son événement contraire.

Toutes les probabilités seront données en écriture décimale, arrondies au millième près.

1/ Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2/ Calculer la probabilité que le client achète un lit et une tête de lit.

3/ Calculer la probabilité que le client achète une tête de lit et un dressing.

4/ Dans ce magasin, le prix moyen d'un lit est de $1\ 000$ €, le prix moyen d'une tête de lit est de 300 € et le prix moyen d'un dressing est de 600 €. On note X la variable aléatoire correspondante à la somme payée par le client.

Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	0	300	600	900	1000	1300	1600	1900
$P(X = x_i)$								

5/ Calculer l'espérance de X