

Feuille d'exercices 14

Analyse asymptotique : relation de comparaison et DL

— **Exercice 1** ●○○ — Trouver des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(1 + \sin x)$ en 0. 2. $x \mapsto \operatorname{Arctan}(1 + x) - \frac{\pi}{4}$ en 0.

Correction :

Méthode :

- On peut composer des équivalents à droite, ou bien faire un DL.
- On sait que $f(x) - f(a)$ est équivalent à $(x - a)f'(a)$ si $f'(a) \neq 0$ (pensez à l'équation de la tangente).

Détails :

1. On sait que $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, et puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$, on peut composer l'équivalent à droite :

$$\ln(1 + \sin x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x),$$

et donc en utilisant l'équivalent classique du sinus :

$$\ln(1 + \sin x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x,$$

Remarque : On a le droit de composer des équivalents à droite (c'est-à-dire de « poser $u = \dots$ », mais pas à gauche, en tout cas sans justification. En cas de doute sur la méthode, mieux vaut faire un DL : on a en 0

$$\ln(1 + \sin x) = \ln(1 + x + o(x)) = x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x,$$

où on a utilisé que l'équivalent est le premier terme non nul du DL.

2. Posons $f(x) = \operatorname{Arctan}(1 + x)$, alors f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec $f(0) = \frac{\pi}{4}$. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + x)^2},$$

et donc $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$. On sait alors que

$$f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)x$$

ce qui donne

$$\operatorname{Arctan}(1 + x) - \frac{\pi}{4} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

— **Exercice 2** ●●○ —

- Déterminer un équivalent simple de $x \mapsto x^{1/x} - 1$ en $+\infty$.
- En déduire un équivalent simple de $x \mapsto x^{x^{1/x}} - x$ en $+\infty$.
- Etudier la limite de $x \mapsto \frac{(x+1)^{1/x} - x^{1/x}(x \ln x)^2}{x^{x^{1/x}} - x}$ en $+\infty$.

— **Exercice 3** ●○○ —

- Montrer que $\ln(\ln x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$.
- En déduire la limite de $x \mapsto \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$ en $+\infty$.

Correction :

Méthode :

- Par définition, on doit montrer que le quotient $\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}$ tend vers 0 en $+\infty$. Utiliser la croissance comparée.
- Utiliser la forme exponentielle.

Détails :

1. On forme donc le quotient $\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}$, bien défini pour $x > 1$, et donc pour x assez grand. Pour trouver sa limite, on peut noter que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \quad \text{par croissance comparée.}$$

Or on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc en posant $X = \ln x$ (ou plus précisément, par composition de limite) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} = 0.$$

Cela prouve le résultat demandé.

- 2.

— **Exercice 4** ●●○ — **Des DL** Donner les DL en a des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x+2x^2}$, en $a = 0$, à l'ordre $n = 5$.
2. $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, en $a = 1$, à l'ordre $n = 4$.
3. $x \mapsto e^{\sin x}$, en $a = 0$, à l'ordre $n = 4$.

— **Exercice 5** ●●○ — **Calcul de limites** Calculer les limites suivantes en 0 :

1. $x \mapsto \ln(1+x) \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} \right)$.
2. $x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x - \sin x}{\ln(1+x^3)}$.
3. $x \mapsto \frac{e^{-x^2} - 1}{\sin^2 x}$.

Correction :

Méthode :

1. Mettre au même dénominateur et faire un DL pour voir les termes qui ne se compensent pas. Pour le facteur $\ln(1+x)$, le premier terme devrait suffire, comme souvent lors d'un produit, de même pour le dénominateur :
2. Même méthode.
3. Même méthode.

Détails :

1. On a

$$\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} = \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^3 \times \sin^3 x} = \frac{x^3 - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3}{x^3 \times (x + o(x))^3}$$

Or on a

$$(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3 = x^3(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))^3 = x^3(1 - \frac{3x^2}{6} + o(x^2)) = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5),$$

et de manière directe :

$$(x + o(x))^3 = x^3 + o(x^3).$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} = \frac{\frac{x^5}{2} + o(x^5)}{x^6 + o(x^6)} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{x + o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Or $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc par produit :

$$\ln(1+x) \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2},$$

Ce qui montre que la limite en 0 vaut $\frac{1}{2}$.

Remarque La difficulté est de savoir quel DL faire, à quel ordre, et quand passer sur des équivalents, plus simples pour les calculs. Pour un calcul de limite, on fait un DL pour des sommes qui se simplifient, DL « jusqu'à ce que le terme principal apparaisse ». Notez que si on vous avez demandé un prolongement dérivable, il vous aurait fallu un DL au final à l'ordre 1, et donc on ne pourrait pas se contenter d'un équivalent.

2. Trouvons un équivalent du numérateur en faisant des DL :

$$\operatorname{Arctan} x - \sin x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.$$

De plus,

$$\ln(1+x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3,$$

on déduit par quotient déquivalent :

$$\frac{\operatorname{Arctan} x - \sin x}{\ln(1+x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Cela prouve que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} x - \sin x}{\ln(1+x^3)} = -\frac{1}{6}.$$

3. On a $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, donc, en utilisant l'équivalent du sinus, et par quotient :

$$\frac{e^{-x^2} - 1}{\sin^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

Donc la limite cherchée vaut -1.

— **Exercice 6** ●●○ — **Primitiver un DL** Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+1)$.

1. Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de f' .
2. En déduire celui à l'ordre 4 en 0 de f .

Correction :

Méthode :

1. On calcule f' , attention, il faut transformer un peu l'expression et ne pas se jeter sur $\frac{1}{1+u} \dots$
2. On a le droit de primitiver un DL, mais il ne faut pas oublier la constante.

Détails :

1. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{2+2x+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{x^2}{2} = 0$, on peut faire un DL en utilisant celui de $\frac{1}{1+u}$ en 0 :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - (x + \frac{x^2}{2}) + (x + \frac{x^2}{2})^2 - (x + \frac{x^2}{2})^3 + o(x^3) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(x + \frac{x^2}{2} \right) + (x^2 + x^3 + o(x^3)) - (x^3 + o(x^3)) + o(x^3) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)
\end{aligned}$$

2. On primitive le DL précédent, en pensant à la constante, qui s'obtient en évaluant en 0 :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^4).$$

— **Exercice 7** ●○○ — **Position relative à la tangente** Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

- Déterminer le DL de f à l'ordre 3 en 0.
- Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
- Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

— **Exercice 8** ●●○ — **Un prolongement par continuité et une tangente.** Soit $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x-1}}$.

- Justifier que f est bien définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Quelle est la régularité de f sur cet ensemble ?
- Déterminer le DL au voisinage de 1 de f à l'ordre 3.
- En déduire que f peut être prolongée par continuité en 1, et que ce prolongement est dérivable.
- Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 1.

— **Exercice 9** ●●○ — **Une asymptote oblique.** Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

- Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
- Montrer que f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, et préciser sa position relative par rapport à la courbe de f .

— **Exercice 10** ●●○ — **Approcher des dérivées : les différences finies.** Soit $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$.
- Pour h petit, la quantité $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ vous paraît-elle être une meilleure approximation du nombre dérivée que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$? Donner une application en cinématique.
- Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$. Quelle application en cinématique ?
- En quoi la formule précédente permet d'approcher numériquement des équations différentielles d'ordre 2 ? (faites un lien avec la méthode d'Euler).

— **Exercice 11** ●●○ — **Aller plus loin pour la tangente**

- Retrouver le DL à l'ordre 3 de la fonction $\tan$ en 0.
- En utilisant un lien entre $\tan'$ et $\tan^2$, en déduire le DL de $\tan$ à l'ordre 5.

Correction :

1. Vue en cours. En faisant le DL d'un quotient :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. On a $\tan' x = 1 + \tan^2 x$. On peut donc faire le DL de $\tan^2$ à l'ordre 4, et intégrer. On a

$$\tan^2 x = x^2(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2))^2 = x^2(1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)) = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

et donc

$$\tan' x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

Or on peut intégrer un DL (sans oublier la constante, qui vaut $\tan 0 = 0$:

$$\tan' x = \tan 0 + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

— **Exercice 12** ●●● — **Profiter d'une équadiff** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^x \cos x$

- Calculer f' et f'' .
- Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, à savoir

$$y'' + by' + cy = 0$$

où b et c sont à préciser.

- Fixer des conditions initiales en 0 de sorte à avoir un problème de Cauchy dont f est la solution. Y a-t-il d'autres solutions ?
- En déduire les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$, puis le DL à l'ordre 6 de f en 0.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k = f^{(k)}(0)$. Montrer que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire sa valeur explicite.
- En déduire le DL à tout ordre de f en 0. Avec quelle autre méthode aurait-on pu calculer $f^{(k)}(0)$?

Correction :

1. Après calculs on a

$$f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) \quad \text{et} \quad f''(x) = -2e^x \sin(x).$$

2. On peut injecter et identifier, mais on voit de tête (commencez par raisonner sur f'') :

$$f'' = 2f' - 2f \iff f'' - 2f' + 2f = 0$$

3. En évaluant directement f et f' en 0, on a donc f solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Il n'y a pas d'autres solution puisque le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'unicité.

4. En déduire les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$, puis le DL à l'ordre 6 de f en 0.

5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k = f^{(k)}(0)$. Montrer que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire sa valeur explicite.

6. En déduire le DL à tout ordre de f en 0. Avec quelle autre méthode aurait-on pu calculer $f^{(k)}(0)$?

— **Exercice 13** •○○ — **Equivalents de suites** Déterminer un équivalent des suites suivantes en $+\infty$ (les 3 et 5 sont plus durs).

1. $u_n = n \sin \frac{1}{n^3}$. 2. $u_n = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$. 3. $\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\right)^n$
 4. $u_n = \frac{n - \ln n + \frac{4}{n}}{e^n - n^2}$. 5. $u_n = \left(\frac{2n^5}{5n^4 + 3n^5}\right)^n$. 6. $u_n = \binom{n}{p}$, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé.

Correction :

Méthode :

Détails :

1.
2.
3.
4. On met en facteur les termes dominants :

$$u_n = \frac{n}{e^n} \times \frac{1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{n^2}{e^n}}.$$

Or par croissance comparée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0.$$

On déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{n^2}{e^n}} = 1.$$

Ainsi par produit :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e^n}.$$

5. La forme exponentielle est indispensable :

$$u_n = e^{n \ln\left(\frac{2n^5}{5n^4 + 3n^5}\right)}.$$

Il est assez facile de voir que l'exposant vérifie

$$n \ln\left(\frac{2n^5}{5n^4 + 3n^5}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln\left(\frac{2}{3}\right),$$

mais cela ne suffit pas, car on ne peut pas toujours prendre l'exponentielle d'un équivalent ! A la place, on va faire des DL (ce qui correspond à aller plus loin) :

$$n \ln\left(\frac{2n^5}{5n^4 + 3n^5}\right) = n \ln\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{\frac{5}{3n} + 1}\right) = n \ln\left(\frac{2}{3}\right) + n \ln\left(\frac{1}{\frac{5}{3n} + 1}\right).$$

Faisons le DL de ce dernier terme, par rapport à $\frac{1}{n}$, qui tend bien vers 0, en s'arrêtant à $o(1)$ (car $e^{o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$) :

$$n \ln\left(\frac{1}{\frac{5}{3n} + 1}\right) = n \ln\left(1 - \frac{5}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{5}{3} + o(1).$$

Ainsi, on a, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$n \ln\left(\frac{2n^5}{5n^4 + 3n^5}\right) = n \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{3} + o(1),$$

et donc par passage à l'exponentielle :

$$u_n = e^{n \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{3} + o(1)} = e^{n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} \times e^{-\frac{5}{3}} \times e^{o(1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{-\frac{5}{3}} \times e^{o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{-\frac{5}{3}}.$$

Remarque Le piège aurait été d'écrire : $n \ln\left(\frac{2n^5}{5n^4 + 3n^5}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ce qui est faux, car on aurait manqué le facteur $e^{-\frac{5}{3}}$. Encore un exemple où doit prendre des précautions pour un exponentiel d'équivalents. Ayez en tête le contre-exemple standard : $n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ mais on n'a pas $e^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$ puisque $e^{n+1} = e \times e^n$: le $+1$ qui ne comptait pas devant n se met à compter car il devient un facteur lorsque l'on prend l'exponentielle.

6. Pas très clair avec la définition, mieux vaut utiliser la formule qui permet des calculs effectifs :

$$u_n = \frac{n \times \dots \times (n - p + 1)}{p!}.$$

Or pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket : n - k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n,$$

et donc par produit d'équivalents (le numérateur ayant p facteurs) :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!}.$$

Remarque : Vérifiez (ou échauffez-vous) avec le cas $p = 2$ qui est facile. Par contre, la question est beaucoup plus dure si p dépend de n .

— Exercice 14 ••• — Développement d'une suite implicite

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation

$$x^3 + nx - 1 = 0,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède une unique solution. On la note u_n .

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

3. Montrer que

$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^3}{n}.$$

En déduire que, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n - \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

4. (Pour aller plus loin). On pose $y_n = u_n - \frac{1}{n}$.

- (i) Substituer u_n par $y_n + \frac{1}{n}$ dans l'équation définissant u_n .
- (ii) Montrer que $y_n = -\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.
- (iii) En déduire un développement asymptotique à deux termes de (u_n) en $+\infty$.

— Exercice 15 ••• — DL et dérivabilité

On a vu que

- f est continue en a si et seulement si elle y admet un DL à l'ordre 0 (sa limite).
- f est dérivable en a si et seulement si elle y admet un DL à l'ordre 1.

On va observer que ceci n'est plus vrai aux ordres supérieurs.

1. Quel résultat du cours affirme qu'une fonction n fois dérivable dans un voisinage de a y admet un DL à l'ordre n ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- a. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?
- b. Admet-elle un DL d'ordre 2 en 0 ?

Correction :

1. C'est la formule de Taylor-Young.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- a. Il est direct par encadrement que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0),$$

ce qui prouve que f est continue en 0.

Étudions la dérivabilité. La fonction $x \mapsto -2x$ étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on est ramené à étudier le deuxième terme $g : x \mapsto 5x^3 \sin \frac{1}{x}$. On a :

$$\forall x \neq 0 : g'(x) = 5(3x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x \cos(\frac{1}{x})).$$

Toujours par encadrement, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0,$$

cela prouve par le théorème de la limite de la dérivée que g est C^1 dans un voisinage de 0, avec $g'(0) = 0$.

La fonction g est-elle deux fois dérivable ? A ce stade il faut anticiper de tête que g'' n'a pas de limite en 0, on ne peut plus utiliser le théorème de la limite de la dérivée, à la place, on forme le taux d'accroissement de g' :

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = 5(3x \sin(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x})).$$

Le premier terme a une limite en 0, mais pas la deuxième, ce qui prouve que g n'est pas deux fois dérivable en 0.

b. Montrons, lorsque $x \rightarrow 0$:

$$x^3 \sin \frac{1}{x} = o(x^2).$$

Pour cela on revient à la définition, on forme

$$\frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

ainsi, par encadrement du sinus :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = 0,$$

ce qui prouve que

$$x^3 \sin \frac{1}{x} = o(x^2).$$

On déduit donc :

$$f(x) = 2x + o(x^2),$$

ce qui prouve que f admet un DL d'ordre 2 en 0.