

TD M2

Mécanique en référentiel non-galiléen

A. Influence de la force de CORIOLIS (RP) • • •

Que pensez-vous de la thèse défendue dans l'extrait vidéo ci-dessous ? Vous justifierez votre réponse par des valeurs numériques.

https://www.youtube.com/watch?time_continue=6&v=4IIVfoDuVIw

B. Le TGV Niort-Bordeaux • • •

Un train à grande vitesse, de masse $m = 700 \text{ t}$, circule de Niort vers Bordeaux, parallèlement à un méridien. À l'instant considéré, il se trouve à la vitesse constante $v = 300 \text{ km.h}^{-1}$, à la latitude $\lambda = 44^\circ \text{N}$. Au point M où se situe le train, on définit une base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_x$ vers l'est, $\vec{u}_y$ vers le nord et $\vec{u}_z$ vers le zénith. On donne $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Faire un schéma où apparaissent la Terre (en coupe), la base ci-dessus, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}$.
2. Déterminer la force de CORIOLIS qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre et comparer sa norme à celle du poids du train.
3. Qu'est-ce qui change quand le train va de Bordeaux vers Niort ?

C. Champ de pesanteur à SFDA • • •

On s'intéresse au champ de pesanteur $\vec{g}(P)$ en un point P de la surface de la Terre. Par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$, la Terre (assimilée à une sphère de rayon R et de masse M) effectue un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles (Oz), à vitesse angulaire constante. On néglige l'influence de tout autre astre, ce qui revient à ne considérer que les deux termes principaux constituant le champ $\vec{g}(P)$.

On donne : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (constante de gravitation universelle); $R = 6378 \text{ km}$; $M = 5,99 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min} = 86164 \text{ s}$.

1. Indiquer en quelques mots l'origine physique de ces deux termes, et donner leur expression vectorielle. Il sera nécessaire d'introduire des notations supplémentaires que l'on indiquera sur un schéma (vue en coupe de la Terre). Faire apparaître sur ce schéma le champ $\vec{g}(P)$ résultant.
2. La salle R206G du lycée Saint François d'Assise est située aux coordonnées géographiques : $1^\circ 26' 18,0'' \text{ O}$ et $46^\circ 41' 34,1'' \text{ N}$. Calculer la norme des deux composantes du champ de pesanteur, et la norme du champ de pesanteur.
3. Calculer la norme g du champ de pesanteur pour un point situé sur l'équateur.
4. Imaginons maintenant qu'on pose le pied sur l'astéroïde Sisyphe, lui aussi sphérique mais beaucoup plus petit que la Terre et en rotation plus rapide : $R' = 1,2 \text{ km}$; $M' = 1,8 \cdot 10^{12} \text{ kg}$; $T' = 2 \text{ h } 24 \text{ min}$. Que peut-on dire du poids à l'équateur ?

D. Anneau sur une tige Inspiré de CCP TSI 2007 • • •

L'étude est menée totalement dans le référentiel lié à la tige.

1. La tige OA est dans le plan horizontal

La tige OA se trouve dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe vertical (Δ) à la vitesse angulaire constante ω . L'axe (Δ) est ainsi confondu avec l'axe (Oz) . Dans ce cas on a donc : $\vec{e}_r = \vec{e}_T$.

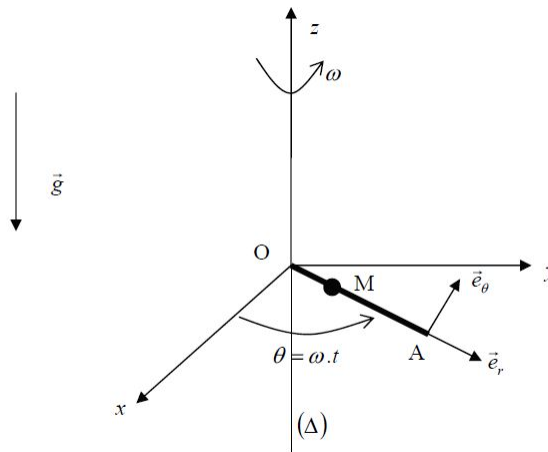


FIGURE 1 – OA dans le plan horizontal

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < \ell$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).

1. L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige. Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces. Écrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m, g, ω, r et des vecteurs unitaires définis précédemment. Quels sont les vecteurs unitaires qui portent les composantes de la réaction de la tige ?
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.
3. Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t .
4. En déduire l'expression du temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, ω et ℓ .
5. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}_f$, calculée dans le référentiel lié à la tige, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de r_0, ω et ℓ et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.
6. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}'_f$, calculée dans le référentiel lié au laboratoire, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de r_0, ω et ℓ et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

2. La tige fait un angle α quelconque avec l'axe (Δ)

La tige OA fait maintenant un angle α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) avec l'axe (Δ) . La tige tourne autour de (Δ) avec la vitesse angulaire constante ω . On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < \ell$).

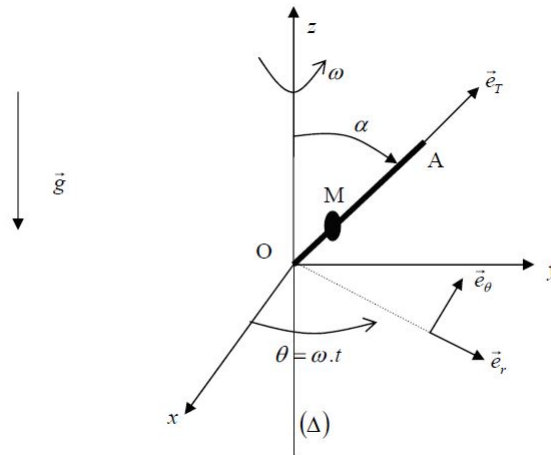
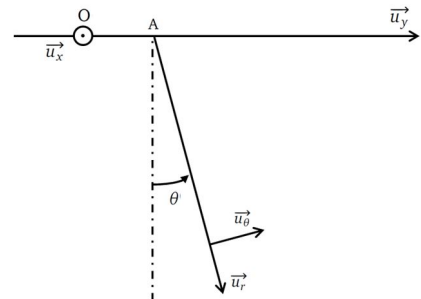


FIGURE 2 – OA incliné

1. L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige. Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces. Écrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m, g, ω, r, α et des vecteurs unitaires définis précédemment.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.
3. Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω, g, α et t .
4. Déterminer la position d'équilibre r_{eq} de l'anneau sur la tige. Exprimer r_{eq} en fonction de g, ω et α . Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur la tige OA que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur seuil ω_0 que l'on déterminera. Exprimer ω_0 en fonction de α, g et ℓ .
5. On se place dans le cas où $\omega > \omega_0$, l'anneau étant dans sa position d'équilibre. On écarte légèrement l'anneau de cette position d'équilibre. Déterminer, en la justifiant, l'orientation de la résultante des forces appliquées à l'anneau ? En déduire si l'équilibre est stable ou instable.

E. Agitation horizontale d'un pendule pesant

Une tige métallique homogène de masse m et de longueur ℓ est en pivot parfait autour de l'axe (Ax) . On repère l'orientation de la tige par l'angle θ avec la verticale. Le point A est mu horizontalement par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. On donne $J_{Ax} = \frac{1}{3}m\ell^2$.



1. Déterminer l'équation du mouvement. On notera y_A l'abscisse horizontale du point A.
2. Linéariser l'équation en précisant les approximations réalisées.
3. Le déplacement $y_A(t)$ est désormais sinusoïdal d'amplitude Y_0 et de pulsation ω . Déterminer l'évolution de l'amplitude des oscillations avec la pulsation ω .
4. Discuter de la valeur de l'amplitude pour les cas limites.

F. Palet sur un disque en rotation

Un disque (de rayon R , masse M , moment d'inertie $J = \frac{1}{2}MR^2$) contenu dans un plan horizontal, peut tourner sans frottement autour de son axe vertical passant par son centre O . Un palet (assimilable à un

point matériel de masse m) est posé en un point A du disque, à une distance $OA = \ell$, son glissement éventuel étant régi par les lois de Coulomb (coefficient f).

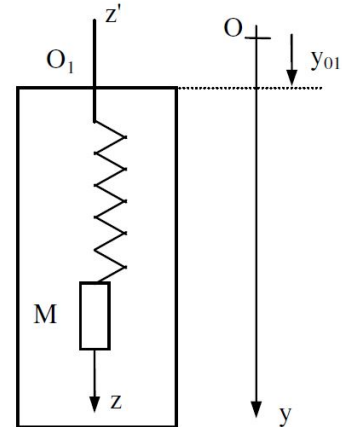
1. Quand le disque tourne à vitesse angulaire constante ω , quelle est la valeur maximale de ω pour que le palet ne glisse pas.
2. (HP) Quand le disque est accéléré (à partir d'une vitesse nulle), quelle est l'accélération angulaire à ne pas dépasser au départ pour que le palet ne glisse pas ?
3. (HP) Ce disque est entraîné par un moteur qui exerce une couple de moment constant $\vec{M}_0$. Quel est le moment maximal pour que le palet ne glisse pas au départ ?

G. Sismographe

On se propose d'étudier le principe simplifié d'un sismographe.

Un oscillateur mécanique élémentaire est constitué d'une masse cylindrique M suspendue à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k . Cet oscillateur est muni d'un dispositif amortisseur introduisant une force proportionnelle à la vitesse et opposée à celle-ci. Le module de cette force vaut $h|\dot{z}|$, h étant un coefficient constant, (zz') la verticale descendante et z l'écart du centre de masse de M par rapport à sa position d'équilibre.

On définit le paramètre σ , positif, en posant : $\frac{h}{M} = 2\sigma\omega_0$, où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur.



L'ensemble est placé dans une enceinte fermée, animée d'un mouvement vibratoire ; le point O_1 est ainsi animé d'un mouvement vertical imposé et repéré par rapport à un observateur extérieur à l'enceinte à partir de la position O de référence :

$$y_{01} = y_m \cdot \cos(\Omega t)$$

1. Quelle est l'équation différentielle du mouvement de la masse M en faisant référence à la côte z sur l'axe ($z'O_1z$) lié au boîtier ?

On considère le régime permanent forcé ; On cherche des solutions de l'équation différentielle établie ci-dessus sous la forme :

$$z = Z_m \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

2. Quelle relation existe-t-il entre Z_m et y_m ?
3. Donner l'expression de Ω en fonction de ω_0 et de σ , dans le cas où l'on a $Z_m = y_m$. Quelle condition doit respecter σ ?

H. Gravité et station spatiale

Un des problèmes posés par les futurs longs voyages en vaisseaux spatiaux est l'absence de gravité dans le vaisseau, ce qui rend le voyage inconfortable pour les spationautes (demandez à Thomas Pesquet!).

Dans certains récits de science-fiction, ce défaut est pallié par la mise en rotation uniforme d'un vaisseau circulaire. C'est notamment le cas dans le film « 2001 : l'odyssée de l'espace ». Les voyageurs évoluent sur les parois extérieures (schéma (1)).



1. Expliquer qualitativement comment on peut créer une gravité équivalente g_{eq} .
2. Le rayon du vaisseau est R . En considérant que la taille d'un homme est faible devant R , exprimer et calculer la vitesse angulaire du vaisseau qui permet de se croire sur Terre. On prendra $R = 40$ m.

On admet que le champ de gravité ainsi créé est globalement uniforme au voisinage d'un individu. Un expérimentateur laisse tomber une pomme de masse m sans vitesse initiale (schéma (2)).

3. Que penser de la trajectoire de la pomme dans le référentiel du vaisseau ?

On considère un repère ayant pour origine la position initiale de la pomme et définissant des axes localement « horizontal » et « vertical », notés $O'X$ et $O'Z$ (schéma (3)).

4. Établir les équations différentielles (de $X(t)$ et $Z(t)$) du mouvement de la pomme lors de sa chute.
5. Proposer une approximation de ces équations avant de les résoudre.
6. Effectuer les applications numériques.

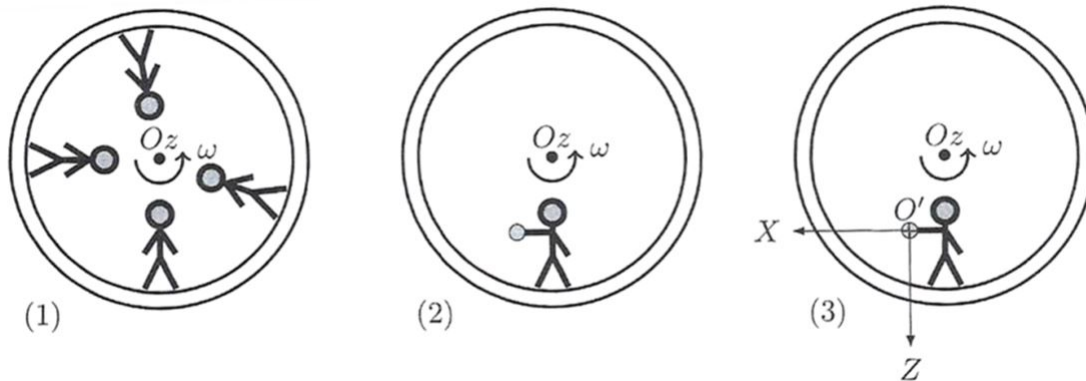


FIGURE 3 – Situation dans la station spatiale

I. Le pendule de FOUCAULT

On s'intéresse ici au pendule de FOUCAULT qui a permis de mettre en évidence la rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique. On considère un pendule simple constitué d'une masse A de $m = 30$ kg suspendue à l'extrémité d'un câble de longueur $L = 67$ m. L'autre extrémité est fixée en B à une hauteur L sur la verticale d'un lieu. On note λ la latitude.

On utilisera un repère cartésien dont l'axe (Ox) est parallèle à l'équateur et dirigé vers l'Est, l'axe (Oy) est dirigé vers le pôle Nord et l'axe (Oz) est la verticale ascendante du lieu. O est au niveau du sol. Le pendule est lâché depuis le point de coordonnées $(0, y_0, z_0)$.

Quand on tiendra compte de la rotation de la Terre, on considèrera qu'elle se produit suivant l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$. On posera $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ et $\omega_V = \omega \sin \lambda$.

1. Rappeler rapidement les caractéristiques du mouvement si on néglige le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même.
2. En ne négligeant plus la rotation de la Terre, mettre le mouvement en équation. On pourra exprimer la tension du fil $\vec{T}$ sous la forme $\vec{T} = \frac{T}{L} \vec{AB}$
3. En négligeant les mouvements verticaux et l'influence de la composante verticale de la force de CORIOLIS, trouver les équations différentielles qui régissent le mouvement dans le plan horizontal.
4. Comparer ω_0 et ω_V .
5. En posant $u = x + iy$, montrer que les équations du mouvement horizontal de A peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} x = -y_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_V t) \\ y = y_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_V t) \end{cases}$$

6. En déduire la durée d'une révolution complète du pendule au Panthéon (Paris $\lambda = 48,8448^\circ$), à Quito ($\lambda = -0,229^\circ$), sur l'équateur et au pôle Nord.

J. Ascenseur (RP)

Dans un ascenseur, on considère un parpaing posé sur une balance électronique. L'ascenseur se trouvant initialement au 2ème étage se met en mouvement à partir $t = 4$ s comme le montre le graphique ci-dessous.

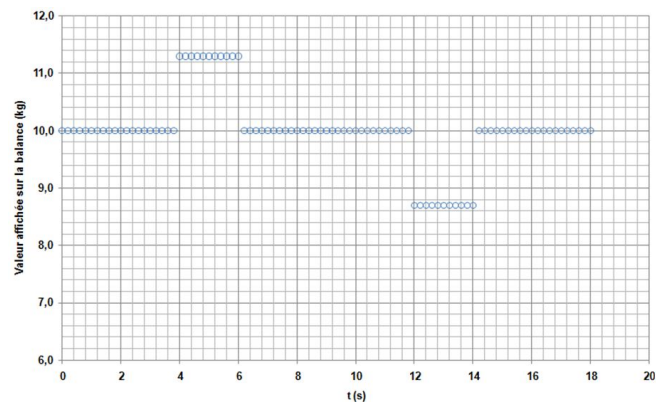


FIGURE 4 – Parpaing dans un ascenseur

Déterminer l'étage d'arrivée. On prendra soin de détailler le raisonnement permettant d'arriver au résultat.

K. Skyscreamer (RP)

Voici une photo du manège Texas Skyscreamer. Estimer le temps pour qu'une nacelle fasse un tour.



FIGURE 5 – Texas Skyscreamer