

Applications linéaires

Table des matières

1	Généralités sur les applications linéaires	2
1.1	Définitions	2
1.2	Opérations usuelles	3
1.2.1	L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$	3
1.2.2	L'ensemble $\mathcal{L}(E)$	4
1.3	Noyau et image d'une application linéaire	5
1.3.1	Image, applications linéaires surjectives	5
1.3.2	Noyau, applications linéaires injectives	6
1.4	Isomorphismes	7
1.5	Projecteurs	9
2	Applications linéaires en dimension finie	11
2.1	Rang d'une application linéaire	11
2.2	Applications linéaires et familles de vecteurs	12
2.3	Théorème du rang	14
2.4	Formes linéaires	15

1 Généralités sur les applications linéaires

1.1 Définitions

Définition 1.1 : Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels. On considère une application u de E vers F

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

Cette application est dite **linéaire** si

- (i) $\forall x, y \in E, u(x + y) = u(x) + u(y),$
- (ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x),$

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

On peut vérifier les deux conditions simultanément :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad u(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot u(x) + \mu \cdot u(y).$$

Une application linéaire est une application linéaire entre deux espaces vectoriels qui respecte leur structure d'espace vectoriel.

Exemple 1 (Application nulle). *L'application linéaire suivante est appelée **application nulle***

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{L}(E, F)} : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto 0_F \end{aligned}$$

Exemple 2. *Montrer que l'application suivante est linéaire*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solution.

Définition 1.2 : Endomorphisme

Une application linéaire de E vers E lui-même est appelée **endomorphisme**.

L'ensemble des endomorphismes de E est noté plus simplement $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 3 (Application identité). *L'endomorphisme de E suivant est appelé **application identité de E***

$$\begin{aligned} Id_E : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Exemple 4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application suivante est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:*

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto MX \end{aligned}$$

Exemple 5. *L'application suivante est linéaire :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

La dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Propriété 1.3 : Image de l'élément nul

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$u(0_E) = 0_F.$$

Démonstration. Comme u est linéaire, $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$. En particulier, pour $\lambda = 0$,

$$u(0_E) = u(0 \cdot x) = 0 \cdot u(x) = 0_F$$

□

Pour vérifier qu'une application n'est pas linéaire, il peut suffire de vérifier que $u(0_E) \neq 0_F$.

Propriété 1.4 : Image d'une combinaison linéaire

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ des vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. On a

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u(e_i)$$

Démonstration. La démonstration se fait sans difficulté par récurrence sur n .

□

1.2 Opérations usuelles**1.2.1 L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$** **Proposition 1.5 : Opérations usuelles sur les applications linéaires**

Si $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} u + v : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto u(x) + v(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \lambda \cdot u(x) \end{aligned}$$

$u + v$ et $\lambda \cdot u$ sont encore des applications linéaires.

Propriété 1.6 : Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Si E et F sont deux espaces vectoriels, $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est donc également un espace vectoriel.

Démonstration. Montrons que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}(E, F)$, l'ensemble des applications de E dans F .

(i) Par définition, $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{A}(E, F)$.

(ii) Comme l'application nulle de E dans F est linéaire, elle appartient à $\mathcal{L}(E, F)$.

(iii) D'après la proposition précédente, si $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u + v$ et $\lambda \cdot u$ sont dans $\mathcal{L}(E, F)$.

On en conclut que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, F)$ donc un espace vectoriel.

□

Propriété 1.7 : Composition d'applications linéaires

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

On retiendra que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (v \circ u)(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= v(u(\lambda \cdot x + \mu \cdot y)) \\ &= v(\lambda \cdot u(x) + \mu \cdot u(y)) \quad \text{par linéarité de } u \\ &= \lambda \cdot v(u(x)) + \mu \cdot v(u(y)) \quad \text{par linéarité de } v \\ &= \lambda \cdot (v \circ u)(x) + \mu \cdot (v \circ u)(y) \end{aligned}$$

□

En particulier, la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E .

1.2.2 L'ensemble $\mathcal{L}(E)$

Dans l'ensemble $\mathcal{L}(E)$, on peut donc composer les endomorphismes de E entre eux sans restriction.

Définition 1.8 : Puissance d'un endomorphisme

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $u^0 = Id_E$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit u^p par la relation de récurrence

$$u^p = u^{p-1} \circ u.$$

On a $u^p = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{p \text{ fois}}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 6. Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$, reconnaître u^p .

Solution.

Exemple 7. On définit l'endomorphisme d de $\mathbb{R}[X]$ par

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, reconnaître d^n .

Solution.

Théorème 1.9 : Binôme de Newton

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}$. Si u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors

$$(u + v)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \cdot u^k \circ v^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \cdot u^{p-k} \circ v^k$$

Démonstration. La démonstration suit exactement les mêmes étapes que celles du chapitre Dénombrement. $\square$

1.3 Noyau et image d'une application linéaire**1.3.1 Image, applications linéaires surjectives****Définition 1.10 : Image d'une application linéaire**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **image** de u l'ensemble suivant

$$\text{Im}(u) = \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in E, u(x) = y\} = u(E).$$

C'est l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent par u dans E .

Exemple 8. On définit l'application linéaire u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x + y \end{aligned}$$

Déterminer $\text{Im}(u)$.

Solution.

Proposition 1.11 : Structure de l'espace image

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. Montrons que $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F .

- (i) Par définition de l'espace image, $\text{Im}(u) \subset F$.
- (ii) Comme $u(0_E) = 0_F$, $0_F \in \text{Im}(u)$.
- (iii) Soient y_1 et y_2 dans $\text{Im}(u)$: ils existent x_1 et x_2 dans E tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 = \lambda \cdot u(x_1) + \mu \cdot u(x_2) = u(\underbrace{\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2}_{\in E}) \in \text{Im}(u), \text{ par linéarité de } u.$$

On en conclut que $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F . $\square$

Remarque 1.12 : Rappel : surjectivité

u est surjective si chaque vecteur de F a au moins un antécédent par u .

Proposition 1.13 : Surjectivité de u

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(u) = F$$

Démonstration. Dire que u est surjective revient à dire que chaque élément de F s'écrit comme image par u d'un élément de E . $\square$

On peut également noter que $\text{Im}(u) = \{0_F\}$ si et seulement si u est l'application nulle.

1.3.2 Noyau, applications linéaires injectives**Définition 1.14 : Noyau**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau** de u l'ensemble suivant

$$\text{Ker}(u) = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_F\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont un antécédent du vecteur nul.

Proposition 1.15 : Structure du noyau

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Montrons que $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E .

- (i) Par définition du noyau, $\text{Ker}(u) \subset E$.
- (ii) Comme $u(0_E) = 0_F$, $0_E \in \text{Ker}(u)$.
- (iii) Soient x_1 et x_2 dans $\text{Ker}(u)$: $u(x_1) = u(x_2) = 0_F$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$u(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) = \lambda \cdot u(x_1) + \mu \cdot u(x_2) = 0_F, \text{ par linéarité de } u.$$

Ainsi $\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 \in \text{Ker}(u)$. On en conclut que $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E . $\square$

Afin de déterminer une base de $\text{Ker}(u)$, on cherche à résoudre l'équation $u(x) = 0_F$.

Exemple 9. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$ avec u définie par

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

Solution.

Exemple 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$ avec u définie par

$$u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$M \mapsto AM - MA$$

Solution.

Remarque 1.16 : Rappel : injectivité

u est injective si chaque vecteur de F a au plus un antécédent par u . Autrement dit,

$$\forall x, x' \in E, \quad u(x) = u(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

Proposition 1.17 : Injectivité de u

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(u) = \{0_E\}$$

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que u est injective. Soit $x \in \text{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0_F$, soit encore $u(x) = u(0_E)$. L'injectivité de u nous permet de conclure que $x = 0_E$. On en déduit que $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$. Soient $x, x' \in E$ tels que $u(x) = u(x')$:

$$u(x) = u(x') \Leftrightarrow u(x) - u(x') = 0_F \Leftrightarrow u(x - x') = 0_F \text{ par linéarité de } u$$

$$\Leftrightarrow x - x' \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow x - x' = 0_E \Leftrightarrow x = x'$$

u est donc injective. □

On peut également noter que $\text{Ker}(u) = E$ si et seulement si u est l'application nulle.

Exemple 11. Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P) = P(X + 1)$$

Montrer que u est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

1.4 Isomorphismes**Remarque 1.18 : Rappel : bijection**

u est bijective si chaque vecteur de F a exactement un antécédent par u . Une application u est donc bijective si, et seulement si u est à la fois injective et surjective.

Définition 1.19 : Isomorphisme

Un **isomorphisme** de E vers F est une application linéaire bijective de E vers F .

u^{-1} est trivialement bijective comme réciproque d'une application bijective. Ce qui est intéressant dans la proposition suivante est le fait que u^{-1} est une application linéaire.

Proposition 1.20 : Réciproque d'un isomorphisme

Si u est un isomorphisme de E vers F , alors sa réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F vers E .

Démonstration. Si u est une bijection de E vers F , alors u^{-1} est une bijection de F vers E . Montrons que $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Soient $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons $x_1 = u^{-1}(y_1)$ et $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

$$\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 = \lambda \cdot u(x_1) + \mu \cdot u(x_2) = u(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) \quad \text{par linéarité de } u.$$

En composant par u^{-1} des deux côtés on obtient

$$u^{-1}(\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2) = u^{-1}(u(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2)) = \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 = \lambda \cdot u^{-1}(y_1) + \mu \cdot u^{-1}(y_2)$$

ce qui démontre que $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. □

Propriété 1.21 : Composition d'isomorphismes

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, u un isomorphisme de E vers F et v un isomorphisme de F vers G . Alors $v \circ u$ est un isomorphisme de E vers G et

$$(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}.$$

Démonstration. Puisque la composée de deux bijections est une bijection, la démonstration se fait directement avec la propriété 1.7. $\square$

Définition 1.22 : Espaces vectoriels isomorphes

Soient E et F deux espaces vectoriels. On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F .

Exemple 12. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_3[X]$ sont isomorphes puisque l'application linéaire suivante est un isomorphisme

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto aX^3 + bX^2 + cX + d \end{aligned}$$

Théorème 1.23 : Caractérisation de la dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

$$E \text{ est de dimension } n \Leftrightarrow E \text{ est isomorphe à } \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Si E est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et u un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans E . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'après la proposition 2.6, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de E . E est donc de dimension n .

$\Rightarrow$ Si E est un espace vectoriel de dimension n , alors on peut définir un isomorphisme u de E vers $\mathbb{R}^n$. Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application :

$$\begin{aligned} u : E &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k &\mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \end{aligned}$$

On peut ensuite vérifier que u est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$. $\square$

Corollaire 1.24 : Égalité des dimensions de deux espaces vectoriels isomorphes

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$$

Exemple 13. Montrer que $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes. Déterminer un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

1.5 Projecteurs

Dans tout ce paragraphe, on considère E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Tout vecteur de E se décompose donc de manière unique en tant que somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 :

$$\forall x \in E, \quad \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2.$$

Définition 1.25 : Projecteurs

On peut donc définir de manière unique les applications p et q de E dans E telles que, pour tout $x \in E$,

$$x = p(x) + q(x) \text{ avec } p(x) \in F_1 \text{ et } q(x) \in F_2.$$

On appelle :

- (i) p le **projecteur sur F_1 parallèlement à F_2**
- (ii) q le **projecteur sur F_2 parallèlement à F_1**

Les projecteurs p et q sont appelés **projecteurs associés**.

On observe que l'on peut définir q comme $q = Id_E - p$. Pour tout $x \in E$, on a

$$p(x) \in F_1 \quad \text{et} \quad x - p(x) \in F_2.$$

Exemple 14. En notant $F_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $F_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, on sait déjà que

$$\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2.$$

Pour tout élément de $\mathbb{R}^3$, on a donc la décomposition unique suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Soient p et q les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Alors p et q sont deux projecteurs associés. Plus exactement,

- (i) p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2
- (ii) q est le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1

Exemple 15. On note

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 - $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
 2. Déterminer un projecteur sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Solution.

Propriété 1.26 : Projecteurs

Si p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 et q le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1 , alors

- (i) p et q sont des endomorphismes de E
- (ii) $p + q = Id_E$
- (iii) $\text{Ker}(p) = \text{Im}(q) = F_2$ et $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p) = F_1$
- (iv) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- (v) $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont à démontrer en exercice.

(iii) Soit $x \in F_1$. La décomposition de x selon $F_1 \oplus F_2$ est $x = p(x) + 0_E$. Ainsi

$$x - p(x) = q(x) = 0_E.$$

Donc $F_1 \subset \text{Ker}(q)$. Maintenant si $x \in \text{Ker}(q)$, alors $q(x) = x - p(x) = 0_E$, puis $x = p(x)$. D'où $\text{Ker}(q) \subset \text{Im}(p)$. on en conclut que

$$F_1 \subset \text{Ker}(q) \subset \text{Im}(p)$$

Enfin, par définition, $\text{Im}(p) \subset F_1$. Ainsi, par double inclusion, on a bien

$$F_1 = \text{Ker}(q) = \text{Im}(p).$$

Par symétrie, on montre que $\text{Ker}(p) = \text{Im}(q) = F_2$.

(iv) Soit $x \in E$. On a $q(x) \in \text{Im}(q) = \text{Ker}(p)$. D'où $p \circ q(x) = 0_E$. De même, on obtient $q \circ p(x) = 0_E$.

(v) Soit $x \in E$. On a $p(x) - p \circ p(x) = p(x - p(x)) = p(q(x)) = 0_E$. D'où $p \circ p = p$. De même, $q \circ q = q$. □

Théorème 1.27 : Caractérisation des projecteurs

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$u \text{ est un projecteur de } E \iff u \circ u = u.$$

Démonstration. $\Rightarrow$ Si u est un projecteur de E alors $u \circ u = u$ d'après le (v) de la propriété 1.26.

$\Leftarrow$ On suppose que $u \circ u = u$.

- Montrons que $E = \text{Im}(u) + \text{Ker}(u)$. Soit $x \in E$, on a

$$x = \underbrace{u(x)}_{\in \text{Im}(u)} + \underbrace{x - u(x)}_{\in \text{Ker}(u)}.$$

En effet, par linéarité de u , $u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = 0_E$. Ainsi, $E = \text{Im}(u) + \text{Ker}(u)$.

- Montrons que $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$. Si $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$, alors $x = u(z)$ avec $z \in E$ et $u(x) = 0_E$. D'où

$$0_E = u(x) = u^2(z) = u(z) = x.$$

On a $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$.

- Comme $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$, soit $x \in E$, alors ils existent $x_1 \in \text{Im}(u)$ et $x_2 \in \text{Ker}(u)$ tels que

$$x = x_1 + x_2$$

Comme $x_1 \in \text{Im}(u)$, il existe $y \in E$ tel que $x_1 = u(y)$, ainsi

$$u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u(u(y)) = u(y) = x_1.$$

u est bien le projecteur sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\text{Ker}(u)$. □

2 Applications linéaires en dimension finie

Dans toute cette section, on suppose que E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

2.1 Rang d'une application linéaire

Proposition 2.1 : *Image d'une base par une application linéaire*

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , alors une application linéaire u de E dans F est définie de manière unique par la donnée de la famille

$$(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)).$$

Démonstration. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille d'éléments de F . On va montrer qu'il existe une unique application linéaire u telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$u(e_i) = f_i.$$

- Analyse : on suppose qu'il existe une telle application u . Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i \in E$. Par linéarité de u ,

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i.$$

Ce qui définit entièrement u .

- Synthèse : soit u l'application de E dans F qui associe à tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i$ le vecteur

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i.$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme

$$e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n,$$

on a $u(e_i) = f_i$. Il ne reste plus qu'à montrer que u est linéaire (à faire en exercice). Dès lors, u satisfait bien les conditions demandées.

D'où l'existence d'une unique application linéaire u qui convient. □

Proposition 2.2 : *Famille génératrice de $\text{Im}(u)$*

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)).$$

C'est en particulier vrai lorsque $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

Démonstration. Montrons par double inclusion que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

- Montrons que $\text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \subset \text{Im}(u)$. On note que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille de vecteurs du sous-espace vectoriel $\text{Im}(u)$ de F . Comme $\text{Im}(u)$ est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ appartient encore à $\text{Im}(u)$, donc on obtient que

$$\text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \subset \text{Im}(u).$$

- Montrons que $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$. Soit $y \in \text{Im}(u)$, alors $\exists x \in E$ tel que $u(x) = y$. Comme $x \in E$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i.$$

Ainsi en composant par u de part et d'autre de l'égalité,

$$y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u(e_i) \quad \text{par linéarité de } u.$$

Ainsi $y \in \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ d'où

$$\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)).$$

La double inclusion nous permet de conclure que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$. $\square$

Afin de déterminer une famille génératrice (voire une base) de $\text{Im}(u)$, on cherche à déterminer l'image d'une famille génératrice de l'espace de départ.

Exemple 16. Déterminer une base de l'image de u définie par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 3x + 7y \\ 2y \\ x - y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution.

Exemple 17. Déterminer une base de l'image de u définie par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P + P' \end{aligned}$$

Solution.

Définition 2.3 : Rang d'une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de u la dimension de l'image de u que l'on note

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$$

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E . D'après la proposition 2.2,

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)))$$

2.2 Applications linéaires et familles de vecteurs

Proposition 2.4 : Surjectivité de u en dimension finie

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est surjective} \Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \text{ est une famille génératrice de } F$$

Démonstration. Démonstration évidente avec les propositions 1.13 et 2.2. $\square$

Exemple 18. Montrer que l'application linéaire u suivante est surjective

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution.

Proposition 2.5 : Injectivité de u en dimension finie

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

u est injective $\Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille libre de F .

Démonstration. Il suffit à l'aide de la proposition 1.17 de montrer l'équivalence suivante :

$\text{Ker}(u) = \{0_E\} \Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille libre de F .

$\Rightarrow$ Supposons que $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u(e_i) = 0_F$, alors

$$0_F = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u(e_i) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i\right) \quad \text{par linéarité de } u.$$

Comme $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, alors on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i = 0_E$. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ étant libre, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont donc tous nuls. La famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille libre de F .

$\Leftarrow$ Supposons que la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ soit une famille libre de F . Soit $x \in \text{Ker}(u) \subset E$, comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i.$$

On a alors

$$0_F = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u(e_i) \quad \text{par linéarité de } u.$$

Or la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est libre, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont donc tous nuls. On a $x = 0_E$ et donc $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$. $\square$

Avec la démonstration de la première implication de la proposition 2.5, on remarque que l'image de toute famille libre par une application injective est une famille libre.

Proposition 2.6 : Isomorphisme et bases

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

u est un isomorphisme $\Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base de F

u est donc un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F .

Démonstration. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . D'après les propositions 2.4 et 2.5,

u est injective $\Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ est une famille libre de F .

u est surjective $\Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ est génératrice de F .

$\square$

Exemple 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

Montrer que u est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution.

2.3 Théorème du rang

Théorème 2.7 : Théorème du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u) = \dim(E).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\text{Ker}(u)$. $\mathcal{F}$ est une famille libre de E que l'on peut compléter en une base de E (par le théorème de la base incomplète). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une telle base. Montrons que $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\text{Im}(u)$. D'après la proposition 2.2,

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)).$$

Or, $u(e_1) = u(e_2) = \dots = u(e_p) = 0_F$ donc

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n)).$$

$(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$. De plus, soient $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$0_F = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \cdot u(e_i) = u\left(\sum_{i=p+1}^n \lambda_i \cdot e_i\right).$$

On remarque que $\sum_{i=p+1}^n \lambda_i \cdot e_i \in \text{Ker}(u)$ dont une base est $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Il existe donc des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que

$$\sum_{i=p+1}^n \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot e_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p -\alpha_i \cdot e_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \cdot e_i = 0_E.$$

Comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et donc une famille libre, on en déduit que tous les λ_i et α_i sont nuls. On a donc démontré que $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\text{Im}(u)$. Comme $\dim(\text{Ker}(u)) = p$ et $\dim(\text{Im}(u)) = n - p$, alors

$$\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = p + (n - p) = n = \dim(E).$$

□

Dans la pratique, il suffit donc de déterminer la dimension du noyau ou celle de l'image d'une application linéaire pour avoir les deux dimensions.

Exemple 20. Soit u une application linéaire définie par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 3x + 7y \\ 2y \\ x - y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a déjà déterminé $\text{Im}(u) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Déterminer le noyau de u .

Solution.

Exemple 21. On considère l'endomorphisme d de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

Déterminer le rang de d .

Corollaire 2.8 : *Caractérisation de l'injectivité en dimension finie*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est injective} \Leftrightarrow \operatorname{rg}(u) = \dim(E)$$

Démonstration.

$$u \text{ est injective} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\} \Leftrightarrow 0 = \dim(\operatorname{Ker}(u)) = \dim(E) - \operatorname{rg}(u) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(u) = \dim(E)$$

□

Corollaire 2.9 : *Caractérisation de la surjectivité en dimension finie*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est surjective} \Leftrightarrow \operatorname{rg}(u) = \dim(F)$$

Démonstration. Comme $\operatorname{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F , alors

$$u \text{ est surjective} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(u) = F \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(F) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(u) = \dim(F)$$

□

Proposition 2.10 : *Caractérisation de la bijectivité en dimension finie*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Supposons que $\dim(E) = \dim(F)$, alors

$$u \text{ est injective} \Leftrightarrow u \text{ est surjective} \Leftrightarrow u \text{ est un isomorphisme}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux corollaires précédents.

□

Un endomorphisme injectif (ou surjectif) est nécessairement un isomorphisme.

2.4 Formes linéaires

Définition 2.11 : *Forme linéaire*

Une application linéaire de E vers $\mathbb{R}$ est appelée **forme linéaire**.

Exemple 22. *L'application suivante est une forme linéaire*

$$\begin{aligned} C^0(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(t) dt \end{aligned}$$

Définition 2.12 : *Rappel : hyperplan*

Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$ est appelé **hyperplan** de E .

Proposition 2.13 : Hyperplan et forme linéaire

Soit H un sous-espace vectoriel de E .

$$H \text{ est un hyperplan de } E \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), H = \text{Ker}(u) \text{ avec } u \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}.$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Si u une forme linéaire non nulle sur E , alors $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à 0. On a donc forcément $\text{Im}(u) = \mathbb{R}$ et $\text{rg}(u) = 1$. D'où, par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E) - \text{rg}(u) = \dim(E) - 1.$$

Ceci montre que $\text{Ker}(u)$ est un hyperplan de E .

$\Rightarrow$ Soit H un hyperplan de E (E de dimension n). On considère $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base de H et d'après le théorème de la base incomplète, on la complète en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . On définit alors l'application linéaire u par

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, u(e_i) = 0 \text{ et } u(e_n) = 1.$$

u définit bien une forme linéaire de E de noyau H . □

Exemple 23. Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + 2y - z = 0 \right\}$. On définit la forme linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y - z.$$

$H = \text{Ker}(u)$ donc d'après la proposition précédente H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. En particulier, $\dim(H) = 2$.