Suites géométriques – Fiche de cours

1. Les suites

Une suite numérique (u_n) est une fonction (ou un tableau de valeurs) définie par :

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to u_n$$

u_n est appelé terme de la suite

n est appelé indice ou rang

Exemple :

- Soit la suite (u_n) : 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	4	7	10	13	16

2. Les suites géométriques

a. Définition

Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

b. Sens de variation

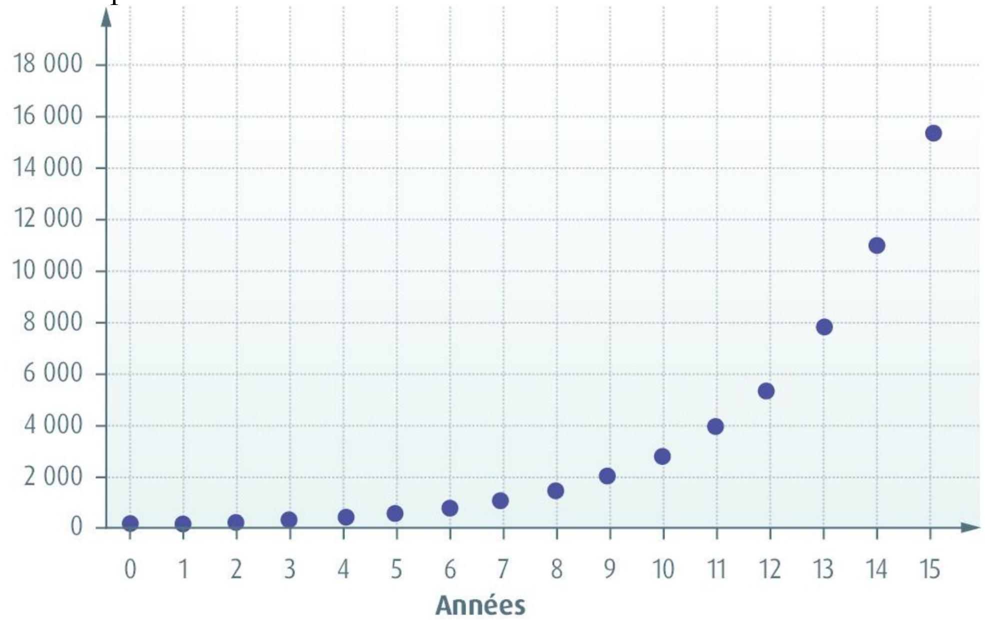
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q

Pour $u_0 > 0$:

- si $q > 1$ alors (u_n) est croissante
- si $0 < q < 1$ alors (u_n) est décroissante

c. Représentation graphique

La représentation des points $M_n(n\,;u_n)$ d'une suite géométrique est exponentielle



Suites géométriques – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils en progression géométrique ? 346834 ; 3434 ; 34

Exercice 2

Parmi ces suites, lesquelles sont géométriques :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{6}{100} u_n \end{cases}$$

Exercice 3

Un responsable de magasin spécialisé en informatique voit ses ventes d'écrans plats LCD augmenter chaque année. Les ventes sont répertoriées dans le tableau suivant :

Année	2003	2004	2005	2006
Nombre de téléviseurs vendus	2 000	2 180	2 387	2626

On constate que l'évolution du nombre d'écrans plats LCD vendus est proche du modèle mathématique suivant :

Année	2003	2004	2005	2006
Rang : n	1	2	3	4
Terme U_n	2 000	2 200	2 420	2 662

1) a) Montrer que U_1, U_2, U_3, U_4 sont les quatre premiers termes d'une suite géométrique (U_n)
b) Donner le premier terme et la raison q de cette suite.

2) a) Donner l'expression de U_n en fonction de n.
b) Calculer le terme de rang 6. Arrondir à l'unité

3) Calculer la somme des 6 premiers termes. Arrondir à l'unité

4) Pour son bilan annuel, le responsable souhaite indiquer le nombre d'écrans plats LCD qu'il prévoit de vendre en 2008, ainsi que le nombre total d'écrans vendus sur la période de 2003-2008.
Compte tenu des résultats précédents, rédiger une phrase précisant chacun de ces deux nombres. Arrondir à la dizaine.

Exercice 4

Pour les questions suivantes, préciser si la suite (u_n) est géométrique ou non.

1) $u_n = 5^{n+3}$

2) $u_n = \dfrac{2n+3}{3}$

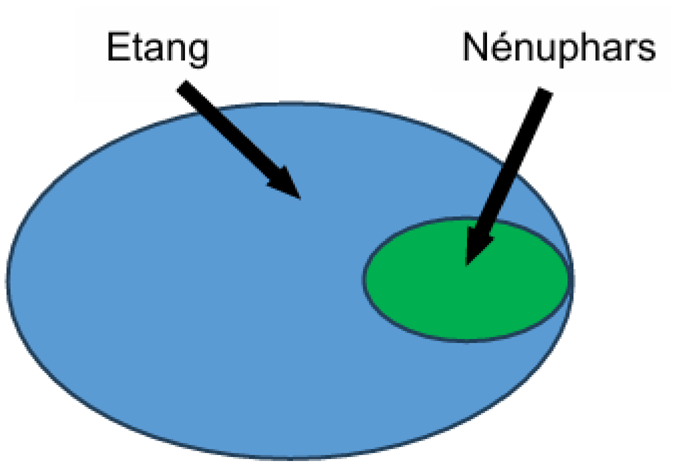
3) $u_n = 3^n + 3n$

4) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 5u_{n+1} - 2u_n = 1 \end{cases}$

Pour le suites géométriques précédentes, étudier le sens de variation

Exercice 5

Albert a acquis un étang d'une surface de 2 000 m². Le jour de son anniversaire, un dimanche, il installe des nénuphars sur une surface de 200 m².



On suppose que la surface occupée par les nénuphars augmente de 20 % chaque semaine, depuis la date de l'anniversaire, tant que cela est possible.

1. Quelle sera la surface occupée par les nénuphars 2 semaines après l'anniversaire ?
2. On considère un entier naturel n. Déterminer, en fonction de n, la surface occupée par les nénuphars n semaines après l'anniversaire ?
3. Au bout de combien de semaines, l'étang sera-t-il entièrement recouvert par les nénuphars ? On pourra s'aider du tableau suivant.

$n =$	0	1	2	5	10	12	13	14	15
$1{,}2^n \approx$	1	1,2	1,44	2,49	6,19	8,92	10,70	12,84	15,40

4. On appelle (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ modélisant l'évolution de la surface occupée par les nénuphars au bout de n semaines
   a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Quelle est la raison et le premier terme ?
   b. Quel est le sens de variation de (u_n) ?
5. Représenter le nuage de points traduisant la progression de la surface occupée par les nénuphars durant les 15 premières semaines

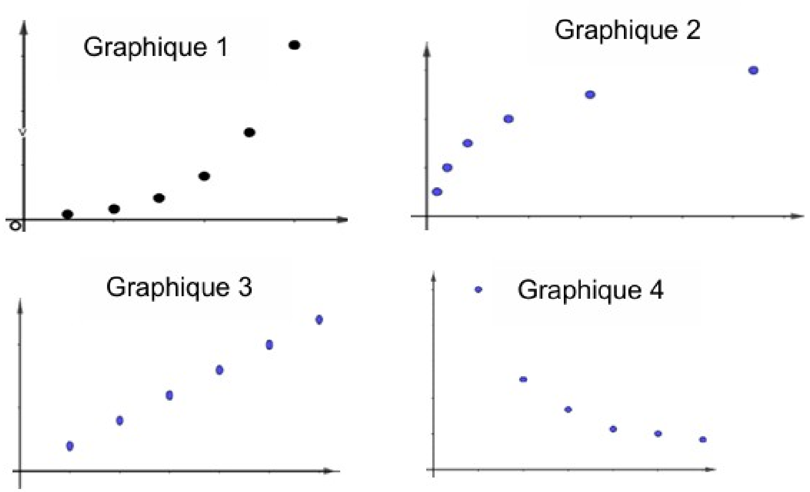
Exercice 6

On étudie la croissance d'une population de champignons.
En réalité, on constate que la population de champignons a quadruplé 80 minutes après le début de l'expérience. De nouvelles mesures donnent les résultats suivants.

Temps écoulé (en minutes)	Nombre de champignons
0	100
40	200
80	400
120	800

Soit n un entier naturel. On note v_n le nombre de champignons, après n périodes de quarante minutes. Ainsi $v_0 = 100$, $v_1 = 200$, $v_2 = 400$…

1. Montrer que les termes v_0, v_1, v_2, v_3 sont en progression géométrique.
2. On suppose que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
Indiquer sans justifier lequel des 4 graphiques ci-dessous est susceptible de représenter la suite (v_n).



3. Quel sera le nombre de champignons quatre heures après le début de l'expérience ?
4. Cinq heures après le début de l'expérience, on dénombre environ 18 000 champignons. Est-ce cohérent avec le modèle choisi ?

Exercice 7

Victor sort un plat du four. La température du plat est alors égale à 180°C. Il place ce plat dans une pièce dont la température est égale à 25°C. Le plat refroidit. Le plat ne pourra être servi que lorsque sa température sera devenue inférieure ou égale à 40°C. On étudie le refroidissement du plat selon un modèle mathématique

On dispose toujours des données suivantes :

- la température de la pièce est égale à 25°C.
- la température du plat à la sortie du four est égale à 180°C.
- la température du plat, 3 minutes après la sortie du four, est égale à 105°C.

Pour tout entier naturel n on note U_n, la différence entre la température du plat et la température de la pièce, n minutes après la sortie du four.
1. Justifier que $U_0 = 155$.
2. On suppose que chaque minute la différence U_n diminue de 20%.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel nn, on a $U_{n+1} = 0{,}8U_n$.
   b. En déduire la nature de la suite (U_n) et donner sa raison.
   c. Exprimer Un en fonction de n, pour tout entier naturel n.
3. On dispose des données suivantes :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
U_n Arrondi à 10^{-1}.	80	64	51,2	41	32,8	26,2	21	16,8	13,4	10,7	8,6	6,9	5,5

   a. Représenter le nuage de points pour les 15 premières minutes de la suite U_n
   b. Au bout de combien de minutes, Victor pourra-t-il servir le plat ?

Exercice 8

Le livret A (livret de Caisse d'épargne) a un taux d'intérêts composés de 1% depuis février 2022. Chaque année, le capital de l'année précédente produit des intérêts égaux à 1% du capital et viennent s'ajouter à ce capital pour former le nouveau capital. On note C(0) le capital initial et C(n) le capital acquis au bout de n années.
1. Montrer que C(1)=1,1×C(0) et plus généralement C(n+1) = 1,1C(0)
2. Quelle est la nature de la suite C ?
3. Jules a ouvert un Livret A et placé 5000 € sur son livret. S'il ne reverse pas d'argent, au bout de combien d'années aura-t-il doublé son capital?

Exercice 9

Anne a acheté une voiture d'une valeur de 28000 euros. Chaque année, sa voiture perd 16% de sa valeur. Pour tout entier naturel n , on note u(n) la valeur, en euro, de la voiture après n années de baisse.
1. Déterminer u(1).
2. Exprimer u(n) en fonction de n. Quelle est la nature de la suite u ?
3. Exprimer u(n) en fonction de n.
4. À partir de combien d'années la valeur de revente de cette voiture deviendra-t-elle inférieure à 5000 € ?
5. À partir de combien d'années la valeur de revente de cette voiture deviendra-t-elle inférieure à 10 euros ?

Exercice 10

Un jardinier dispose d'une citerne pouvant contenir 1500 litres d'eau et remplie au deux tiers. En période de sécheresse, cette citerne perd d'un jour à l'autre 5 % du contenu qu'elle avait au début du jour.
1. Calculer le volume d'eau contenu dans la citerne après un jour de sécheresse. Même question après deux jours de sécheresse.
2. Après dix jours de sécheresse, le jardinier décide d'arroser ses 65 arbustes. Il a besoin, pour cela, de 10 litres d'eau par arbustes. Sa réserve sera-t-elle suffisante ?