

Séries numériques

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Définitions	2
1.2	Convergence	2
1.3	Propriétés	3
2	Séries de référence	4
2.1	Séries géométriques	4
2.2	Série exponentielle	6
2.3	Séries de Riemann	8
3	Théorèmes de convergence	10
3.1	Somme partielle d'une série à termes positifs	10
3.2	Critères de comparaison	11
3.2.1	Critère de comparaison par inégalité	11
3.2.2	Critère de comparaison par négligeabilité	11
3.2.3	Critère de comparaison par équivalence	12
3.3	Convergence absolue	13

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 : Série numérique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum_{n \geq 0} u_n$, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est appelé la **somme partielle** de rang N associée à la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

On rajoute bien évidemment à cette définition les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ dont le terme général n'est défini qu'à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}$ et on pose alors pour tout $N \geq n_0$,

$$S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n.$$

Exemple 1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ de terme général $\frac{1}{n}$ a pour sommes partielles :

$$S_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \quad \dots \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}.$$

1.2 Convergence

Définition 1.2 : Nature d'une série

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge** si la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge, sinon on dit que la série **diverge**.

Définition 1.3 : Somme et reste d'une série convergente

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, la limite S de la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** et on la note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit le **reste** d'ordre N de la série le réel

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

On a facilement $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0$.

Exemple 2. Préciser la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donner une expression de son reste d'ordre N .

Solution.

Il ne faudra pas confondre :

- la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ qui est une suite de réels,
- la somme partielle $\sum_{n=0}^N u_n$ qui est un réel,
- la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui est la limite de la suite des sommes partielles.

1.3 Propriétés

Proposition 1.4 : Nature invariante par changement d'un nombre fini de termes

La nature d'une série n'est pas modifiée si on ne change qu'un nombre fini de termes. Autrement dit, $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Attention ! En cas de convergence, ces deux séries n'auront bien sûr pas la même somme !

Exemple 3. Montrer que les séries $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergent et calculer leurs sommes.

Solution.

Propriété 1.5 : Cas particulier des séries télescopiques

La suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ sont de même nature.

Exemple 4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ converge et calculer sa somme.

Solution.

Proposition 1.6 : Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Si l'on considère S_N la somme partielle de la série de rang $N \in \mathbb{N}^*$ alors $u_N = S_N - S_{N-1}$. Par linéarité du passage à la limite, $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = S - S = 0$. $\square$

Par contraposée, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Définition 1.7 : Série grossièrement divergente

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemple 5. Déterminer si la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ converge.

Solution.

Remarque 1.8 : Attention aux erreurs !

La convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 ne suffit pas à montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exemple 6. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**. Montrer qu'elle diverge.

Solution.

Propriété 1.9 : Linéarité de la somme

Si les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes, les séries de terme général $u_n + v_n$ et λu_n ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont convergentes et l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.\end{aligned}$$

Démonstration. Ce résultat provient directement de la linéarité des sommes finies appliquées aux sommes partielles et de la linéarité du passage à la limite. $\square$

En remarquant que l'ensemble des séries numériques est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, la propriété qui précède permet de déduire que l'ensemble des séries numériques convergentes en est un sous-espace vectoriel.

2 Séries de référence

2.1 Séries géométriques

Théorème 2.1 : Série géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$\sum_{n \geq 0} x^n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1.$$

En cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Démonstration. On utilise la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique. Si $x \neq 1$, on obtient alors la somme partielle de rang N

$$S_N = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Ainsi si $|x| < 1$, alors

$$S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x}.$$

On peut prouver que dans le cas $|x| \geq 1$, $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ diverge. $\square$

Plus généralement, si $|x| < 1$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}.$$

Corollaire 2.2 : Séries géométriques dérivées

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$\sum_{n \geq 1} n x^{n-1} \text{ et } \sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2} \text{ convergent} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1.$$

En cas de convergence on a :

- (i) la **série géométrique dérivée d'ordre 1** : $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$
- (ii) la **série géométrique dérivée d'ordre 2** : $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n.$$

f_N est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour $x \neq 1$,

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

(i) En dérivant de part et d'autre de l'égalité précédente, on a pour $x \neq 1$,

$$f'_N(x) = \sum_{n=1}^N n x^{n-1} = \frac{-(N+1)x^N(1-x) + (1-x^{N+1})}{(1-x)^2} = \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, si $|x| < 1$, alors

$$\sum_{n=1}^N n x^{n-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Le cas $|x| \geq 1$ donne une série divergente.

(ii) On dérive à nouveau pour $x \neq 1$

$$f''_N(x) = \sum_{n=2}^N n(n-1) x^{n-2} = \frac{-N(N-1)x^{N+2} + (N^2-1)x^{N+1} - N(N+1)x^N + 2}{(1-x)^3}.$$

Ainsi si $|x| < 1$, alors

$$\sum_{n=2}^N n(n-1) x^{n-2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Le cas $|x| \geq 1$ donne une série divergente.

□

Exemple 7.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 9 \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 16.$$

2.2 Série exponentielle

Théorème 2.3 : *Série exponentielle*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Démonstration. On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre N appliquée à f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$: pour $x \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) dt.$$

Avec $f(x) = e^x$ et $x_0 = 0$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$ alors

$$e^x = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} e^t dt.$$

En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre N en $x_0 = 0$, on obtient

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right| \leq e^x \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Par croissance comparée,

$$e^x \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc d'après le théorème d'encadrement, lorsque N tend vers $+\infty$, on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

□

Exemple 8. En particulier, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

De la même façon, on peut utiliser la formule de Taylor pour écrire de nombreuses autres fonctions sous la forme d'une somme de série convergente.

Exemple 9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x).$$

Exemple 10. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Informatique 2.4 : Python : calcul d'une somme partielle

On peut utiliser une boucle for pour afficher le résultat de la somme partielle $\sum_{k=0}^n u_k$.

```
S=0
for k in range (0,n+1)
    S=S+u[k]
print(S)
```

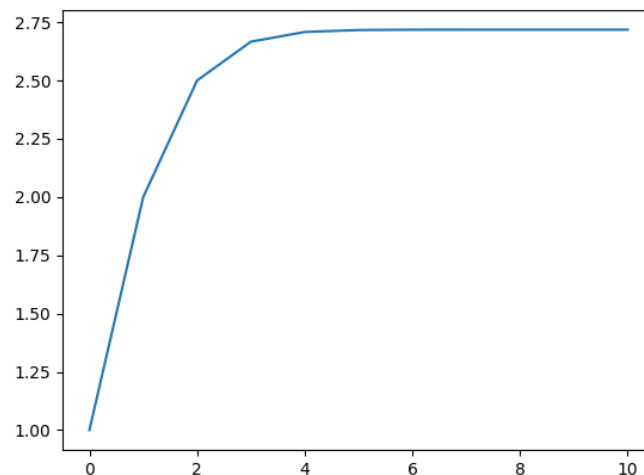
Exemple 11. On peut proposer le programme suivant pour calculer une valeur approchée de e^x pour $x \in \mathbb{R}$.

```
import numpy as np
def f(x,n):
    S=1 # on ajoute déjà le premier terme de la somme
    C=np.zeros(n+1) # liste pour stocker les factorielles
    C[0]=1
    for k in range (1,n+1):
        C[k]=k*C[k-1]
        S=S+(x**k)/C[k]
    return S
print(f(1,10000)) # on renvoie une valeur approchée de e avec n=10000
```

Python renvoie 2.7182818284590455.

Exemple 12. On rajoute les commandes suivantes pour voir l'évolution de la somme partielle précédente suivant n .

```
import matplotlib.pyplot as plt
L=np.zeros(11)
for n in range(0,11) :
    L[n]=f(1,n)
plt.plot(range(0,11),L)
plt.show()
```



2.3 Séries de Riemann

Théorème 2.5 : *Critère de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **série de Riemann** toute série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. On a l'équivalence suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Démonstration. (i) Si $\alpha \leq 0$, alors la série est grossièrement divergente.

(ii) Si $\alpha = 1$, on a vu que la série harmonique diverge.

(iii) Si $0 < \alpha < 1$, alors pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Comme la série harmonique diverge, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

(iv) Si $\alpha > 1$, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, on a

$$\forall n \geq 2, \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \frac{1}{n^\alpha}$$

Ainsi pour $N \geq 2$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Or, d'après la relation de Chasles,

$$\sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^N = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est positive et majorée par $1 + \frac{1}{\alpha-1}$, elle converge donc.

□

Exemple 13. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

Exemple 14. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergent.

Lorsqu'il y a convergence, on note

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

On définit ainsi la fonction zêta de Riemann. Cette fonction s'est révélée utile dans la compréhension de la répartition des nombres premiers.

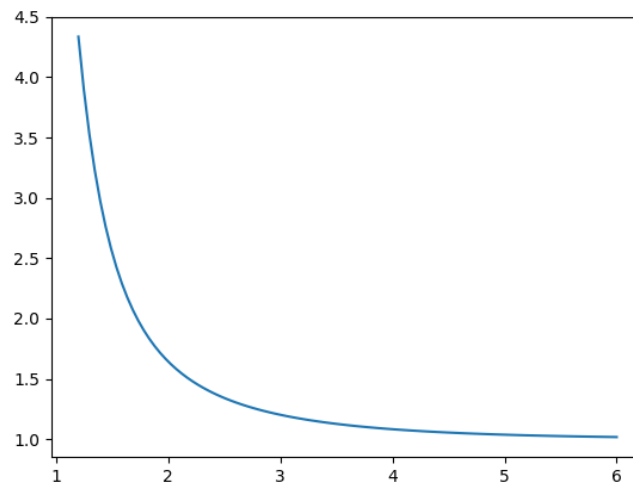
Exemple 15. En particulier, on connaît la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$.

Exemple 16. On propose une fonction Python pour tracer une valeur approchée de $\zeta(x)$ pour $x > 1$.

```
import numpy as np
def zeta(x):
    S=0
    for n in range (1,1001):
        S=S+1/(n**x)
    return S
```

On peut alors tracer la fonction ζ en rajoutant

```
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.linspace(1.2,6,100)
Y=np.zeros(100)
for n in range(0,100) :
    Y[n]=zeta(X[n])
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```



Remarque 2.6 : Astuce de calcul

Il est souvent utile pour faire apparaître des séries usuelles d'utiliser les transformations

$$n^2 = n(n-1) + n \quad \text{ou} \quad n = (n-1) + 1.$$

Exemple 17. Comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on peut donc utiliser la propriété 1.9 sur la linéarité des séries convergentes

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) + n) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{3} \frac{2}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^3} + \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \\ &= 45. \end{aligned}$$

3 Théorèmes de convergence

Définition 3.1 : Série à termes positifs

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est à **termes positifs** si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En multipliant une série à termes négatifs par -1 , on obtient une série à termes positifs. Tous les résultats qui suivent pourront donc se généraliser facilement aux séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang, car les premiers termes ne changent pas la nature d'une série. Les résultats concernant les séries à termes négatifs pourront être utilisés directement.

3.1 Somme partielle d'une série à termes positifs

Proposition 3.2 : Nature d'une série à termes positifs

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. On note S_N sa somme partielle de rang N . Alors la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante. De plus,

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad (S_N)_{N \in \mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty.$$

Démonstration. Comme $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si elle est majorée. Sinon elle diverge vers $+\infty$. $\square$

Si la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge donc et est majorée par sa limite, donc pour tout entier N ,

$$S_N \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple 18. Sans utiliser le "critère de Riemann", on peut montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$. On a, pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

On en déduit que

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \leq 1 + 1 - \frac{1}{N} \leq 2.$$

Les sommes partielles étant majorées, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

3.2 Critères de comparaison

3.2.1 Critère de comparaison par inégalité

Théorème 3.3 : *Critère de comparaison par inégalité*

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. Supposons qu'à partir d'un certain rang $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Démonstration. Supposons que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, montrons que $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Si à partir d'un certain rang $0 \leq u_n \leq v_n$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors pour $N \geq n_0$,

$$0 \leq \sum_{n=n_0}^N u_n \leq \sum_{n=n_0}^N v_n.$$

Comme $\sum_{n=n_0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$, alors par comparaison

$$\sum_{n=n_0}^N v_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

On en déduit que $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

La première implication est la contraposée de l'implication démontrée. □

Exemple 19. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^3 + 3n + 1}$.

Solution.

Exemple 20. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$.

Solution.

3.2.2 Critère de comparaison par négligeabilité

Théorème 3.4 : *Critère de comparaison par négligeabilité*

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives à partir d'un certain rang. Supposons que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.

- Si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Démonstration. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites positives à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

On se retrouve donc dans les conditions d'application du critère de comparaison par inégalité (théorème 3.3). $\square$

Exemple 21. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

Solution.

3.2.3 Critère de comparaison par équivalence

Théorème 3.5 : Critère de comparaison par équivalence

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives à partir d'un certain rang. Supposons que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

On se retrouve donc dans les conditions d'application du critère de comparaison par inégalité (théorème 3.3). $\square$

Exemple 22. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Solution.

Exemple 23. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$.

Solution.

Ces théorèmes sont très utiles pour étudier la nature des séries en les comparant aux séries de références. On peut remarquer cependant qu'ils ne donnent aucune information sur la valeur de la somme de la série en cas de convergence.

Si le terme général u_n est trop compliqué pour en déterminer un équivalent facilement, l'usage d'un développement limité en $\frac{1}{n}$ s'impose.

Exemple 24. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

Solution.

3.3 Convergence absolue

Définition 3.6 : Série absolument convergente

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Exemple 25. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Propriété 3.7 : Série absolument convergente

Toute série absolument convergente peut s'écrire comme la différence de deux séries à termes positifs convergentes.

Démonstration. On a $|u_n| = \max(u_n, 0) + \max(-u_n, 0)$. De plus d'après le critère de comparaison par inégalité comme $0 \leq \max(u_n, 0) \leq |u_n|$ et $0 \leq \max(-u_n, 0) \leq |u_n|$, alors

$$\sum_{n \geq 0} \max(u_n, 0) \text{ et } \sum_{n \geq 0} \max(-u_n, 0) \text{ convergent.}$$

Ainsi, par linéarité des séries convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \max(u_n, 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \max(-u_n, 0).$$

Comme $u_n = \max(u_n, 0) - \max(-u_n, 0)$, par linéarité des séries convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \max(u_n, 0) - \sum_{n=0}^{+\infty} \max(-u_n, 0)$$

□

Exemple 26. On a : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Théorème 3.8 : Convergence d'une série absolument convergente

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle converge.

Démonstration. On conclut directement à l'aide de la propriété 3.7 précédente.

□

Exemple 27. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$.

Solution.

Toute série convergente n'est pas forcément absolument convergente.

Définition 3.9 : *Série semi-convergente*

Une série qui est convergente sans être absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Exemple 28. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente.

Solution.