

CHAPITRE 23

EXO 1

- 1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 0\}$ est un plan de l'espace passant par l'origine, donc un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

JUSTIFICATION DÉTAILLÉE :

- 1) $\vec{0} \in E$ car $0 - 2 \times 0 = 0$
- 2) soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z') \in E$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$
 Alors $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$
 Or: $\lambda x + \mu x' - 2(\lambda y + \mu y') = \underbrace{\lambda(x - 2y)}_{=0 \text{ car } \vec{u} \in E} + \underbrace{\mu(x' - 2y')}_{=0 \text{ car } \vec{v} \in E} = 0$
 donc $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in E$

Ceci montre que E est un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

- 2) $F = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}\}$ est une droite de l'espace passant par l'origine, donc un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

JUSTIFICATION

- 1) $\vec{0} = (0, 0, 0) \in F$
- 2) Soient $\vec{u}(x, x, x)$ et $\vec{v}(y, y, y) \in F$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$
 Alors $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) \in F$

Ceci montre que F est un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

- 3) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |z| = 1\}$ ne contient pas $\vec{0}(0, 0, 0)$ puisque $|0| \neq 1$
 ainsi, G n'est pas un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

- 4) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$
 Cette union de plans n'est pas stable par addition car $\vec{u}(1, 0, 0)$ et $\vec{v}(0, 1, 0) \in H$
 mais $\vec{u} + \vec{v}(1, 1, 0) \notin H$ puisque $1 \times 1 \neq 0$. Ainsi, H n'est pas un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

5) $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = z\}$ est un plan passant par l'origine. On montre, comme pour l'ensemble, que c'est un s.v. de $\mathbb{R}^3$.

6) $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ne contient pas $\vec{0}(0, 0, 0)$ puisque $0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$ donc J n'est pas un s.v. de $\mathbb{R}^3$.

EX02

• F : plan de vecteurs directeurs $\vec{u}(-1; 2; -3)$ et $\vec{v}(0; 1; -1)$
 Son vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ vérifie $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
 soit $\begin{cases} -a + 2b - 3c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 3c = -c \\ b = c \end{cases}$

Pour $c = 1$, on obtient $\vec{n}(-1; 1; 1)$: F a donc pour équation $\boxed{-x + y + z = 0}$

• F' : plan de vecteurs directeurs $\vec{w}(2; -3; 1)$ et $\vec{z}(7; -9; 8)$
 Son vecteur normal $\vec{n}'(a, b, c)$ vérifie alors $\vec{n}' \cdot \vec{w} = \vec{n}' \cdot \vec{z} = 0$

$$\text{soit } \begin{cases} 2a - 3b + c = 0 \\ 7a - 9b + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b + c = 0 \\ a + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5c \\ b = \frac{2a+c}{3} = -3c \end{cases}$$

Pour $c = -1$, on obtient $\vec{n}'(5; 3; -1)$: F' a pour équation $\boxed{5x + 3y - z = 0}$

REMARQUE: les plans vectoriels ont pour équation $ax + by + cz = 0$
 avec (a, b, c) les coordonnées d'un vecteur normal

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap F' \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - x + y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - y = -2y \\ x = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

L'intersection de deux plans
 donne une droite... tout va bien!

et ainsi:

$$F \cap F' = \{(-y, y, -2y) / y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1; 1; -2)\}$$

EX03

On procède de la même façon... je conserve les notations pour détailler le début

$$\bullet \boxed{F} \quad \vec{n} \text{ vérifie } \begin{cases} 2a+3b-c=0 \\ -a+2b+5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b+5c=0 \\ 7b+9c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=35c/7-18c/7=17c/7 \\ b=-9c/7 \end{cases}$$

Pour $c=7$, on obtient $\vec{n}(17; -9; 7)$: F a pour équation $\boxed{17x-9y+7z=0}$

$$\bullet \boxed{F'} \quad \vec{n}' \text{ vérifie } \begin{cases} 3x+y-6z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-6z=0 \\ 35y+45z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z-y/3 \\ y=-45z/35=-9z/7 \end{cases}$$

Pour $z=7$, on obtient $y=-9$ puis $x=17$

Ainsi, F' a pour vecteur normal $\vec{n}'(17; -9; 7)$ et pour équation $\boxed{17x-9y+7z=0}$

On a donc $F=F'$ donc $F \cap F' = F$, plan d'équation $17x-9y+7z=0$

EX04

$$1+i=1+i (!) \text{ donc } 1 \times (1+i) - 1 \times 1 - 1 \times i = 0$$

Cette combinaison linéaire nulle à coefficients non nuls montre que

la famille $\{1; i; 1+i\}$ est liée

EX05

$$1) \quad x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x+y=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0 : \text{famille LIBRE}$$

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ 2x+y=b \\ 3x+2y+z=c \end{cases}$$

Système toujours compatible $\Rightarrow$ famille GÉNÉRATRICE

Ainsi, la famille proposée est une base de $\mathbb{R}^3$

$$2) \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y + 4z = 0 \\ 4x + 6y + 2z = 0 \\ 2x + 6y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 & (L2) \\ 3y = 0 & (L3) - (L2) \\ -3y = 0 & (L1) - 2(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Infinité de solution: la famille est liée

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y + 4z = a \\ 4x + 6y + 2z = b \\ 2x + 6y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = a/2 \\ 2x + 3y + z = b/2 \\ 2x + 6y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = b/2 \\ 3y = c - b/2 \\ -3y = a/2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = b/2 \\ 3y = c - b/2 \\ 0 = \frac{a}{2} - \frac{3b}{2} + c = \frac{1}{2}(a - 3b + 2c) \end{cases}$$

donc le système n'est compatible que si $a - 3b + 2c = 0$: la famille n'est pas génératrice

$$3) \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 : \text{ famille LIBRE}$$

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y = b \\ x = c \end{cases}$$

Le système est toujours compatible, donc la famille est ~~génératrice~~

et ainsi, la famille propre est une base de $\mathbb{R}^3$

REM: les familles 1) et 3) sont des familles étagées de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, de ce fait ce sont des bases de $\mathbb{R}^3$

$$4) \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 & (L3) \\ y + 2z = 0 & (L2) \\ 4y + 5z = 0 & (L1) + 2(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -3z = 0 & (L3) - 4(L2) \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 : \text{famille LIBRE}$$

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = a \\ y + 2z = b \\ -x + 2y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = c \\ y + 2z = b \\ 4y + 5z = a + 2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = c \\ y + 2z = b \\ -3z = a - 4b + 2c \end{cases} : \text{le système est toujours compatible donc la famille est GÉNÉRATRICE}$$

REM dans les questions 2) et 4), on effectue exactement les mêmes opérations sur les systèmes homogènes et les systèmes non-homogènes car les membres de gauche sont les mêmes.

EX06

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ tels que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$

$$\text{Alors } \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \dots + \lambda_n (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n) = \vec{0}$$

$$\text{d'où } (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \vec{u}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n) \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

Comme la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est libre, ceci implique que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ est donc libre.

EX07

Soient λ, μ et $\nu \in K$ tels que $\lambda(x+y) + \mu(y+z) + \nu(z+x) = 0$

Alors

$$(\lambda + \nu)x + (\lambda + \mu)y + (\mu + \nu)z = 0$$

Comme la famille $\{x, y, z\}$ est libre, ceci implique que

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 & (L2) \\ \mu + \nu = 0 & (L3) \\ -\mu + \nu = 0 & (L1) - (L2) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ 2\nu = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases}$$

et donc $\lambda = \mu = \nu = 0$: il en découle que $\{x+y, y+z, z+x\}$ est libre

EX08

On a forcément $\vec{w} \in \text{Vect}(\vec{u}', \vec{v}') = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ donc $\vec{w}' \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$
Ainsi, il existe $(x, y) \in K^2$ tel que $\vec{w}' = x\vec{u} + y\vec{v}$ d'où

$$1 \times \vec{w}' - x \times \vec{u} - y \times \vec{v} = \vec{0}'$$

Comme $1 \neq 0$, cette relation montre que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'\}$ est liée

EX09

En anticipant sur la fin du chapitre, calculons le rang de la famille

$$\text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} = \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \right\} = \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

$C_2 \quad C_3 \quad C_1 - C_2 \quad C_4 - C_2$

De ce fait, la famille n'est ni libre, ni génératrice.

Exo 10

1) On donne (dans une base de cristal) que $2\vec{v} - \vec{w} = (3, 7, 9) = \vec{u}$ donc $\vec{u} \in \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$

2) La famille est libre si son rang vaut 3

$$\text{Or, } \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y+2 \\ z+2x \end{pmatrix} \right\}$$

$C_1 \quad C_2 - 2C_1 \quad C_3 - 2C_1$

$$= \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z+2x - \frac{3}{5}(y+2) \end{pmatrix} \right\}$$

$C_3 - \frac{z+2x}{5}C_2$

$$\text{rg} = 3 \Leftrightarrow z+2x - \frac{3}{5}(y+2) \neq 0 \Leftrightarrow 5z+7x-3y \neq 0$$

Ainsi, la famille est libre si $7x-3y+5z \neq 0$

3) Dans ce cas, on a une famille de 3 vecteurs de rang 3 en dimension 3 :
c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$

Exo 11

Les familles sont constituées de deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$
 $\Rightarrow$ elles sont libres

Ce sont des familles libres de 2 vecteurs en dimension 2
 $\Rightarrow$ ce sont des bases de $\mathbb{R}^2$

Exo 12

$$(a) \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{G} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$(b) \begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 2x+4y+z-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 3z-4t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+z-t=-2y+t/3 \\ z=4t/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+t/3 \\ y \\ 4t/3 \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

non colinéaires : famille libre

Ainsi $\mathcal{G} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$(c) \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 & (L3) \\ 2y-3z=0 & (L1)-(L3) \\ y-3z=0 & (L2)-2(L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ -3z+y=0 & (L3) \\ y=0 & (L2)-(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{G} = \{\vec{0}\}}$ a pour base $\emptyset$

EXO 13

On note dans chaque cas $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

$$1) \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \quad C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$$

De ce fait, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ et pour dimension 2

$$2) \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{matrix}$$

De ce fait, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ et pour dimension 2

$$3) \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -18 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_2 - 6C_1 \\ C_2 \leftarrow C_3 \end{matrix}$$

De ce fait, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ et pour dimension 2

EXO 14

$$1) \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftarrow C_4 \\ C_3 \leftarrow C_2 - C_4 \\ C_4 \leftarrow C_3 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_1 \end{cases}$$

$$= \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2 \end{cases}$$

$$= 3$$

$$2) \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{cases}$$

colinéaires

$$= 2$$

EXO 15

RAPPEL: Une base de $\mathbb{R}^3$ est une famille de 3 vecteurs de rang 3 de $\mathbb{R}^3$

1) $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 2$ donc $\mathcal{F}$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ (elle n'est pas génératrice)

$$2) \operatorname{Rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{cases}$$

$$\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 3$$

$$= \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{si } \alpha = 2 \\ 3 & \text{si } \alpha \neq 2 \end{cases}$$

De ce fait, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, $\alpha \neq 2$

3) $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 4$ donc $\mathcal{F}$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ (elle n'est pas libre)

$$4) \operatorname{Rg}(F) = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{cases} C_1 \leftarrow C_2 \\ C_2 \leftarrow C_1 + 2C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3/2 \end{cases}$$

$$\operatorname{card}(F) = 3 = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad [C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2]$$

Puisque $\operatorname{Rg}(F) = \operatorname{card}(F) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, la famille F est bien une base de $\mathbb{R}^3$

EXO 16

MÉTHODE : on étage la famille pour voir si elle est liée et trouve une base étagée de $\operatorname{Vect}(F)$.
Si oui, on complète la famille en une base de $\mathbb{R}^4$ en visant bien !

$$1) \operatorname{Vect}(F) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad [C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1]$$

$\Rightarrow F$ est liée, on ne peut pas la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ car toute famille contenant une famille liée est liée. colinéaires

$$2) \operatorname{Vect}(F) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad [C_3 \leftarrow C_3 - C_1]$$

$$= \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{cases} C_2 \leftarrow C_3/2 \\ C_3 \leftarrow C_2 - C_3/2 \end{cases}$$

Si on ajoute le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient une famille de 4 vecteurs de rang 4 de $\mathbb{R}^4$, donc une base de $\mathbb{R}^4$.

$$3) \operatorname{Vect}(F) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad [C_2 \leftarrow C_2 - C_1]$$

Il suffit d'ajouter $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$

EXO 17

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+x=0 \\ x-t=0 \end{cases} \quad (L2)-(L1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-z = -z-t \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -z-t \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } F = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / (t, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ est de dimension 2.}$$

$$\bullet G = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{cases} G_2 \leftarrow G_2 - G_1 \\ G_3 \leftarrow G_3 - 5G_1 \end{cases}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ est de dimension 2}$$

colonnaires

$$2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \text{ et } \begin{cases} 1-2+1=0 \\ 2-2+1-1=0 \end{cases} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$$

Puisque ces deux vecteurs sont dans le s-es F, le s-es engendré l'est aussi.
 Il s'agit bien que $G \subset F$

$$\text{Or } \dim G = \dim F = 2 \quad \text{donc } \boxed{F=G}$$

CHAPITRE 24

Exercices 1 à 11

EXO 1

1) $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$: de ce fait, f n'est pas linéaire

2) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ mais $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ donc $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, f n'est pas linéaire

3) Pour tous $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= f\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} = (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z') \\ &= \lambda(x + y + 2z) + \mu(x' + y' + 2z') \\ &= \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est linéaire

NOYAU : pour $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x + y + 2z = 0$
 $\Leftrightarrow x = -y - 2z$

donc $\vec{u} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

IMAGE $a \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{u}) = a$ c'est-à-dire $x + y + 2z = a$
 Ce système étant compatible pour tout $a \in \mathbb{R}$, il en résulte que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

4) $f(\vec{0}) = 1$ donc $f(\vec{0}') \neq \vec{0}'$: f n'est pas linéaire

POINT MÉTHODE

Une application linéaire doit vérifier la relation

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

ce qui implique en particulier que $f(\vec{0}') = \vec{0}'$ et $\begin{cases} f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) \end{cases}$

* Pour montrer qu'une application est linéaire, on prouve que la relation est vérifiée pour $\vec{u}, \vec{v}, \lambda$ et μ quelconques

* Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire

$\Rightarrow$ on vérifie que $f(\vec{0}') \neq \vec{0}'$

$\Rightarrow$ on trouve $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u} + \vec{v}) \neq f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

$\Rightarrow$ on trouve λ et $\vec{u}$ tels que $f(\lambda \vec{u}) \neq \lambda f(\vec{u})$

EX02

1) • Si $b \neq 0$, alors $f(0) \neq 0$ donc f n'est pas linéaire

• Si $b = 0$, alors $f: z \mapsto az$

Pour z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda z_1 + \mu z_2) = a(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda a z_1 + \mu a z_2 = \lambda f(z_1) + \mu f(z_2)$$

donc f est linéaire

2) De même, $f(\lambda z_1 + \mu z_2) = a \operatorname{Re}(\lambda z_1 + \mu z_2) + b \operatorname{Im}(\lambda z_1 + \mu z_2)$

$$= a(\lambda \operatorname{Re}(z_1) + \mu \operatorname{Re}(z_2)) + b(\lambda \operatorname{Im}(z_1) + \mu \operatorname{Im}(z_2))$$

$$= \lambda (a \operatorname{Re}(z_1) + b \operatorname{Im}(z_1)) + \mu (a \operatorname{Re}(z_2) + b \operatorname{Im}(z_2))$$

$$= \lambda f(z_1) + \mu f(z_2)$$

donc f est linéaire

3) Pour u et $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u + \mu v)'' - 3(\lambda u + \mu v)' + 2(\lambda u + \mu v) \\ &= \lambda u'' + \mu v'' - 3(\lambda u' + \mu v') + 2(\lambda u + \mu v) \\ &= \lambda (u'' - 3u' + 2u) + \mu (v'' - 3v' + 2v) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire

REMARQUE c'est pour cela que l'équation $u'' - 3u' + 2u = 0$ est qualifiée d'équation différentielle linéaire

EXO 3

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 & (L3) \\ -y + 3z = 0 & (L1) - 2(L3) \\ y + 4z = 0 & (L2) - (L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

si bien que $\boxed{\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}}$ de base $\emptyset$

$$\bullet \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } f(\vec{u}) = \vec{v}$$

$$\text{Or } f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + y + 3z = b \\ x - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -y + 3z = a - 2c \\ y + 4z = b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -y + 3z = a - 2c \\ 7z = a + b - 3c \end{cases}$$

Le système est compatible pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, cela signifie que tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\text{Im}(f)$. Ainsi

f est surjective

$\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$ de base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$2). \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow g(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+t=0 \\ y-z+2t=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 & (L3) \\ y-z+t=0 & (L1)-(L3) \\ y-z+2t=0 & (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y-z+t=0 \\ t=0 & (L3)-(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(g) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}} \text{ de dimension } 1$$

$$\bullet \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow \exists \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, g(\vec{u}) = \vec{v} \dots \text{ce qui signifie que le système a des solutions et est compatible}$$

$$\text{Or } g(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+t=a \\ y-z+2t=b \\ x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=c \\ y-z+t=a-c \\ y-z+2t=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=c \\ y-z+t=a-c \\ t=b+c-a \end{cases}$$

Le système est compatible pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, ce qui signifie que $\boxed{\text{Im}(g) = \mathbb{R}^3}$

$$3). \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(h) \Leftrightarrow h(\vec{u}) = \vec{0}$$

g est surjective

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4z=0 & (L1)-(L2) \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4z=0 \\ y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4z \\ y=-5z \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z \\ -5z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{\text{Ker}(h) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$ est un N-er de dimension 1

PREDICTION : $\text{Im}(h)$ est de dimension 2!

$$\bullet \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Im}(h) \Leftrightarrow \exists \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, h(\vec{u}') = \vec{v}$$

$$\text{Or } h(\vec{u}') = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ x + y + z = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = b & (L2) \\ -y - 5z = a - 2b & (L1) - 2(L2) \end{cases}$$

Le système est compatible pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, donc $\vec{v} \in \text{Im}(h) \Leftrightarrow \vec{v} \in \mathbb{R}^2$
 e qui prouve que

de base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\boxed{\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2}$$

h est surjective

POINT MÉTHODE

* Pour déterminer $\text{Ker}(f)$, on résout l'équation $f(\vec{u}') = \vec{0}$
 L'ensemble de ses solutions est $\text{Ker}(f)$

* Pour déterminer $\text{Im}(f)$, on étudie la compatibilité du système $f(\vec{u}') = \vec{v}$
 $\text{Im}(f)$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ pour lesquels il est compatible

EXO 4

$$1) \cdot \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}') = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\bullet \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(\vec{u}') = \vec{v}$$

$$\text{Or } f(\vec{u}') = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = a \\ x - 2y + z = b \\ x - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -2y + 2z = b - c \\ -y + z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -y + z = a \\ 0 = b - c - 2a \end{cases}$$

Le système n'est compatible que lorsque $0 = b - c - 2a$

Ainsi $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow b - c - 2a = 0$

$\Leftrightarrow b = 2a + c$

$\Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec a et $c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{v} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

On en déduit que $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

ENFIN ! ON VOIT COMMENT DÉTERMINER $\text{Im}(f)$ DANS UN CAS OÙ L'APPLICATION f N'EST PAS SURJECTIVE

2). $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow g(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ 0=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ce qui montre que

$\boxed{\text{Ker}(g) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

• $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow \exists \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid g(\vec{u}) = \vec{v}$

OR $g(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ y-z=b \\ x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ y-z=b \\ -y+z=c-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ y-z=b \\ 0=b+c-a \end{cases}$

Ainsi $\vec{v} \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow b+c-a=0 \Leftrightarrow a=b+c \Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où

$\boxed{\text{Im}(g) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

$$3) \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(h) \Leftrightarrow h(\vec{u}) = \vec{0}' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -y = 2x \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(h) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \vec{v}' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Im}(h) \Leftrightarrow \exists \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } h(\vec{u}') = \vec{v}'$$

$$\text{On } h(\vec{u}') = \vec{v}' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ y + z = b \end{cases} : \text{le système étant compatible pour}$$

tout $\vec{v}' \in \mathbb{R}^2$, on en déduit que $\vec{v}' \in \text{Im } h \Leftrightarrow \vec{v}' \in \mathbb{R}^2$ soit

$$\boxed{\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

EX05

1) • La famille $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ cf. famille libre (car étendue) de deux vecteurs en dimension deux.

De ce fait, il existe d'après le cours une unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \vec{v}_1$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \vec{v}_2$ (étant donnés $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$)

• Expression de f

$$\text{Pour } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ on a } f(\vec{u}) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ par linéarité}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, x+y, y)}$$

- Im f
On voit que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(B))$, avec B base de $\mathbb{R}^2$
Or, $f(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre

donc $\text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de dimension 2

Les auteurs notent que ce plan admet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal
donc $\text{Im}(f)$ a pour équation $x - y + z = 0$

- Ker f
Théorème de rang : $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\text{Im } f) + \text{rg}(f)$
donc $2 = \dim(\text{Ker } f) + 2$
d'où $\dim(\text{Ker } f) = 0$ soit $\text{Ker}(f) = \{ \vec{0} \}$

NB: f est injective mais pas surjective

- 2) On procède exactement de la même manière.
Petite subtilité: la décomposition d'un vecteur dans la base de $\mathbb{R}^2$ proposée requiert quelques calculs

- La famille $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre (2 vecteurs non colinéaires) de deux vecteurs en dimension deux, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
De ce fait, il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$ telle que $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Expression de f

Notons $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Pour calculer $f(\vec{u})$, il faut écrire $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ afin d'utiliser $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$

OR

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x_1 + x_2 \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y \\ -3x_2 = x - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y + y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \\ x_2 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Ainsi $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right) \vec{e}_1 + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \vec{e}_2$

d'où $f(\vec{u}) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right) f(\vec{e}_1) + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) f(\vec{e}_2)$ par linéarité

$$= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

soit

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
donc tout va bien!

• B étant une base de $\mathbb{R}^2$, on a alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(B))$

soit

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{q. } f(B) \text{ est une famille libre car étagée}$$

• $f(B)$ est libre donc f est injective d'où $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$

EX06

- Par convention, $f^2 = f \circ f$ donc $f^2 - 4f + \text{Id}_E = 0 \Leftrightarrow 4f - f \circ f = \text{Id}_E$
- $(4\text{Id}_E - f) \circ f = 4\text{Id}_E \circ f - f \circ f = 4f - f^2 = \text{Id}_E$ puisque $\text{Id}_E \circ f = f$
 - Comme f est linéaire, $f \circ 4\text{Id}_E = 4f \circ \text{Id}_E = 4f$
d'où $f \circ (4\text{Id}_E - f) = f \circ (4\text{Id}_E) - f \circ f = 4f - f \circ f = \text{Id}_E$
- De ce fait,
- $$(4\text{Id}_E - f) \circ f = f \circ (4\text{Id}_E - f) = \text{Id}_E$$

ce qui prouve que $f \in \text{GL}(E)$ et $f^{-1} = 4\text{Id}_E - f$

EX07

1) $\Rightarrow$ Supposons que $g \circ f = 0$ BUT: Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$

- Soit $\vec{v}' \in \text{Im}(f)$: alors il existe $\vec{u}' \in E$ tel que $\vec{v}' = f(\vec{u}')$
- De ce fait, $g(\vec{v}') = g(f(\vec{u}')) = g \circ f(\vec{u}') = \vec{0}$ car $g \circ f = 0$
d'où $\vec{v}' \in \text{Ker}(g)$

Ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{v}' \in \text{Im}(f)$, on a bien montré que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$

$\Leftarrow$ Supposons que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ BUT: Montrer que $g \circ f = 0$

- Soit $\vec{u}' \in E$: alors $f(\vec{u}') \in \text{Im}(f)$ par définition de Im
- Or $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ donc $f(\vec{u}') \in \text{Ker}(g)$ soit $g(f(\vec{u}')) = \vec{0}$

AINSI, $g \circ f(\vec{u}') = \vec{0}$: ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{u}' \in E$
on en déduit que $g \circ f = 0$

- 2) • Soit $\vec{w}' \in \text{Im}(g \circ f)$: il existe alors $\vec{u}' \in E$ tel que $\vec{w}' = g \circ f(\vec{u}')$
 • Ainsi, $\vec{w}' = g(f(\vec{u}')) = g(\vec{v})$ en posant $\vec{v} = f(\vec{u}') \in F$
 ce qui montre que $\vec{w}' \in \text{Im}(g)$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{w}' \in \text{Im}(g \circ f)$, on en déduit que $\boxed{\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)}$

- 3) • Soit $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$: on a de ce fait $f(\vec{u}') = \vec{0}'$
 • Par linéarité, $g(f(\vec{u}')) = g(\vec{0}') = \vec{0}$ donc $g \circ f(\vec{u}') = \vec{0}$
 Ainsi, $\vec{u}' \in \text{Ker}(g \circ f)$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$, on en déduit que $\boxed{\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)}$

- 4) COMPTEMENT si A est un ensemble et f une application,
 $f^{-1}(A)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de A par f

Autrement dit

$$\boxed{x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A}$$

Pour $\vec{u}' \in E$, on a $\vec{u}' \in f^{-1}(\text{Ker}(g)) \Leftrightarrow f(\vec{u}') \in \text{Ker}(g)$

$$\Leftrightarrow g(f(\vec{u}')) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow g \circ f(\vec{u}') = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}' \in \text{Ker}(g \circ f)$$

ce qui montre que $\boxed{\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))}$

Les questions 1), 2) et 3) de cet exercice sont à maîtriser impérativement, ce sont des grands classiques !

EX08

$\Rightarrow$ On suppose que $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ BUT prouver que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$

Soit $\vec{u}' \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$

- $\vec{u}' \in \text{Im}(f)$ donc il existe $\vec{v}' \in E$ tel que $\vec{u}' = f(\vec{v}')$
- $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$ donc $f(\vec{u}') = \vec{0}'$

De ce fait, $f(\vec{u}') = f(f(\vec{v}')) = f^2(\vec{v}') = \vec{0}'$ si bien que $\vec{v}' \in \text{Ker}(f^2)$

Or $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ donc $\vec{v}' \in \text{Ker}(f)$ d'où $f(\vec{v}') = \vec{0}'$ soit $\vec{u}' = \vec{0}'$

Ainsi, $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}'\}$

$\Leftarrow$ On suppose que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}'\}$ BUT montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

- Soit $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$: alors $f(\vec{u}') = \vec{0}'$ d'où $f^2(\vec{u}') = f(\vec{0}') = \vec{0}'$ car $f \in \mathcal{L}(E)$
Ceci prouve que l'on a $\vec{u}' \in \text{Ker}(f^2)$

Ainsi, $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$

- Soit $\vec{u}' \in \text{Ker}(f^2)$: alors $f^2(\vec{u}') = \vec{0}' = f(f(\vec{u}'))$ donc $f(\vec{u}') \in \text{Ker}(f)$
Par ailleurs, $f(\vec{u}') \in \text{Im}(f)$ évidemment
donc $f(\vec{u}') \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}'\}$ d'où $f(\vec{u}') = \vec{0}'$
Ceci montre que $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$

Ainsi $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$

On a bien prouvé que $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)}$

Encore un exercice essentiel, qui permet de réviser les techniques de démonstration.

EXO 9

1) $\Rightarrow$ On suppose que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ BUT $\text{mg } f^2 = 0$ et $n = 2 \text{rg}(f)$

- Soit $\vec{u} \in E$: alors $f(\vec{u}) \in \text{Im}(f)$.
Comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, alors $f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$
d'où $f(f(\vec{u})) = f^2(\vec{u}) = \vec{0}$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{u} \in E$, on a bien $\underline{f^2 = 0}$

- Théorème du rang : $\dim(E) = n = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$
 $= 2 \dim(\text{Im}(f))$ car $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$
d'où $\underline{n = 2 \text{rg}(f)}$

$\Leftarrow$ On suppose que $f^2 = 0$ et $n = 2 \text{rg}(f)$ BUT $\text{mg } \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$

Pour cela, on va prouver que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$
et que $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f))$

- Soit $\vec{u}' \in \text{Im}(f)$: il existe $\vec{v}' \in E$ tel que $\vec{u}' = f(\vec{v}')$
De fait, $f(\vec{u}') = f(f(\vec{v}')) = f^2(\vec{v}') = \vec{0}$ car $f^2 = 0$
donc $\underline{\vec{u}' \in \text{Ker}(f)}$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{u}' \in \text{Im}(f)$, on en déduit que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$

- De plus, on déduit du théorème du rang que $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$
soit $n = 2 \text{rg}(f) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f)$
d'où $\dim(\text{Ker } f) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$

- Comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, il en découle que $\underline{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)}$

2) On a $f^3 = f \circ f^2 = 0$

- On montre comme à l'exercice 7,1) que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$
Soit en effet $\bar{v}' \in \text{Im}(f^2)$: il existe $\bar{u}' \in E$ tq $\bar{v}' = f^2(\bar{u}')$

De ce fait, $f(\bar{v}') = f(f^2(\bar{u}')) = f^3(\bar{u}') = \bar{0}$ car $f^3 = 0$

donc $\bar{v}' \in \text{Ker}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $\bar{v}' \in \text{Im}(f^2)$,
il en découle que

$$\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$$

- On en déduit que $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Im } f^2)$
 $\leq \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f)$

puisque $\dim(\text{Im } f^2) \leq \dim(\text{Ker } f)$

- Or, $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim E = n$ d'après le théorème du rang
Ainsi,

$$\boxed{\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq n}$$

EXO 10

Considérons un vecteur $\bar{x}_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(\bar{x}_0) \neq \bar{0}$... il en existe au moins un puisque $f^{n-1} \neq 0$. Montrons alors que la famille

$$F = \{ \bar{x}_0, f(\bar{x}_0), \dots, f^{n-1}(\bar{x}_0) \}$$

est libre. Pour cela, soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$ tels que

$$\lambda_0 \bar{x}_0 + \lambda_1 f(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\bar{x}_0) = \bar{0} \quad (1)$$

* Appliquons f^{n-1} à la relation (1) : par linéarité de f^{n-1} , on obtient

$$\underbrace{\lambda_0 f^{n-1}(\bar{x}_0)}_{\neq \bar{0}} + \underbrace{\lambda_1 f^n(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n+n-1}(\bar{x}_0)}_{= \bar{0} \text{ car } f^n = 0} = \bar{0}$$

d'où $\lambda_0 = 0$. Ainsi (1) devient

$$\lambda_1 f(\bar{x}_0) + \lambda_2 f^2(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\bar{x}_0) = \bar{0}' \quad (2)$$

* Appliquons f^{n-2} à la relation (2) : par linéarité de $f^{(n-2)}$ on obtient

$$\lambda_1 \underbrace{f^{n-1}(\bar{x}_0)}_{\neq \bar{0}'} + \lambda_2 \underbrace{f^n(\bar{x}_0)}_{= \bar{0}' \text{ car } f^n = 0} + \dots + \lambda_{n-1} f^{2n-3}(\bar{x}_0) = \bar{0}'$$

d'où $\lambda_1 = 0$. En répétant le procédé, on prouve ainsi que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

* Enfin, $\mathcal{F}$ est une famille libre de E et card $\mathcal{F} = n = \dim E$.
On prouve que

$\mathcal{F}$ est une base de E

PETITES PRÉCISIONS SUPPLÉMENTAIRES

- (1) $f \in \mathcal{L}(E)$ donc, par composition, $f^k \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
- (2) $f^m = 0$ donc pour tout $p \geq m$, on a $p-m \geq 0$ d'où $f^{p-m} \in \mathcal{L}(E)$
et $f^p = f^m \circ f^{p-m} = 0$

EXO 11

On suppose que $\mathcal{B} = \{f(\bar{x}_0), \dots, f^n(\bar{x}_0)\}$ est une base de E .
Soit alors $\bar{u}' \in E$: il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\bar{u}' = \lambda_1 f(\bar{x}_0) + \lambda_2 f^2(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_n f^n(\bar{x}_0)$$

$$= f(\lambda_1 \bar{x}_0 + \lambda_2 f(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_n f^{n-1}(\bar{x}_0)) \text{ par linéarité de } f$$

d'où $\bar{u}' \in \text{Im}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $\bar{u}' \in E$, alors $\text{Im}(f) = E$

AINSI f est surjective, et comme $f \in \mathcal{L}(E)$, c'est un AUTOMORPHISME

CHAPITRE 24

Exos 12 à 27

EXO 12

1) Notons $M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\text{Alors } AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c = c \\ d = c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=a \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ avec } a \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

Ainsi, l'ensemble recherché est $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a \text{ et } b \in \mathbb{R} \right\}$

2) Soient λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, M_1 et $M_2 \in \mathcal{E}$: alors $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$

$$\bullet \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ 0 & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

$$\bullet M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix}$$

INUTILE DE CALCULER CE TERME !
CE SONT LES 3 AUTRES QUI MONTRERONT QUE $M_1 M_2 \in \mathcal{E}$

Ainsi, $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire et par produit

REM des personnes cultivées vous diraient que c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

NB: $A \in \mathcal{E} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

EXO 13

Notons cette fois $M \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \text{Ob}_3(\mathbb{R})$

On obtient:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a+d & 3b+e & 3c+f \\ +2g & +2h & +2i \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+c & 2c \\ d+3f & e+f & 2f \\ g+3i & h+i & 2i \end{pmatrix}$$

d'où $AM = MA \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = a+3c \\ b = b+c \\ c = 2c \\ d = d+3f \\ e = e+f \\ f = 2f \\ 3a+d+2g = g+3i \\ 3b+e+2h = h+i \\ 3c+f+2i = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ f=0 \\ d = -3a-g+3i \\ e = -3b-h+i \\ 0=0 \end{cases}$$

L'ensemble recherché est $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -3a-g+3i & -3b-h+i & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} / (a, b, g, h, i) \in \mathbb{R}^5 \right\}$

On a aussi $\mathcal{S} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

- Il contient bien A , obtenue pour $a=1, b=0, g=3, h=1, i=2$
- La stabilité par combinaison linéaire est simple à vérifier (cf. exo 12)
- Pour la stabilité par produit... il faut se retrouver les manches !

EXO 14

1) $E = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ aI + bJ \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

en notant $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $E = \text{Vect}(I, J)$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc il est stable par combinaison linéaire. On peut aussi retrouver ceci directement :

soient $M_1 = a_1 I + b_1 J$ et $M_2 = a_2 I + b_2 J \in E$, λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

Alors $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \lambda_1 (a_1 I + b_1 J) + \lambda_2 (a_2 I + b_2 J)$
 $= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) I + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) J$
 $\in E$

- On reprend les mêmes notations pour montrer la stabilité par produit :

$$M_1 \times M_2 = (a_1 I + b_1 J) \times (a_2 I + b_2 J)$$
$$= a_1 a_2 I + a_1 b_2 IJ + b_1 a_2 JI + b_1 b_2 J^2$$

OR $IJ = JI = J$ et $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $J^2 = 0$

d'où $M_1 \times M_2 = (a_1 a_2) I + (a_1 b_2 + a_2 b_1) J \in E$

2) RAPPEL: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

Soit $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in E$; alors $\det(M) = (a+b)(a-b) - (-b^2) = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$
donc $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

Ainsi, les éléments inversibles de E sont toutes les matrices $M = aI + bJ$ avec $a \neq 0$

|| RETT on pourrait aussi calculer $\text{rg}(M)$ et noter que M inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(M) = 2$

EXO 15

Même démarche pour cet exo... cette fois, il faudra utiliser le rang pour déterminer les éléments inversibles.

• Notons $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $E = \{aI + bJ \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

On en déduit comme précédemment la stabilité par combinaison linéaire... soit par calcul direct, soit en notant que $E = \text{Vect}\{I, J\}$ est un s.e.v. de $\text{M}_3(\mathbb{R})$

• Pour la stabilité par produit, comme $(aI + bJ)(a'I + b'J) = aa'I + (ab' + a'b)J + bb'J^2$ il suffit de vérifier que $J^2 \in E$. Or,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } J^2 = J + 2I \in E$$

Ceci montre que E est stable par produit

• Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in E$. Alors $\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

* Si $a = b$, $\text{rg}(M) \leq 1$ donc M n'est pas inversible

* Si $a \neq b$, on divise les lignes 2 et 3 par $b - a$:

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & b & a+b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1 - aL_3 \end{array}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + bL_2$$

donc $\text{rg}(M) = 3 \Leftrightarrow a + 2b \neq 0$

Conclusion Π est inversible ssi $a \neq b$ et $a+2b \neq 0$

EXO 16

$$1) \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$C_2 \quad C_1 \quad C_3 - 2C_2$

cf 2 colonnes non colinéaires

$$2) \operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$C_3 + C_1$

$C_3 + 2C_2$

$$3) \operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$C_2 + C_1$

$C_3 + C_2$

$C_3 + C_4$

colinéaires!

EXO 17

Dans chaque cas, on nous donne les images par f des vecteurs de la base canonique de l'espace de départ, qui correspondent aux colonnes de la matrice de f

$$1) \operatorname{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) \operatorname{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EXO 18

$$\begin{aligned} f(\vec{i}') &= f(1, 1) = (9, 9) = 9\vec{i}' = 9\vec{i}' + 0\vec{j}' \\ f(\vec{j}') &= f(4, -3) = (8, -6) = 2\vec{j}' = 0\vec{i}' + 2\vec{j}' \end{aligned} \quad \text{donc } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXO 19

$$\begin{aligned} f(\vec{i}') &= f(4, 3) = (4, 3) = \vec{i}' = 1\vec{i}' + 0\vec{j}' \\ f(\vec{j}') &= f(1, 1) = (0, 0) = \vec{0} = 0\vec{i}' + 0\vec{j}' \end{aligned} \quad \text{donc } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXO 20

$$\bullet \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\hookrightarrow$ colinéaires!

Ainsi

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ est le plan d'équation } z=0$$

$\hookrightarrow$ BASE!

• Comme $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rg}(f) = 2$, on déduit du théorème du rang que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\operatorname{Ker} f) + 2$ soit $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$

$$\bullet \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \quad (L_2 - L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z = -3z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

si bien que

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\hookrightarrow$ BASE!

EXO 21

$$1) \bullet \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est un sous-espace de } \mathbb{R}^3 \text{ de dimension 2}$$

On en déduit comme à l'exercice 20 que $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y-2z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y-z = -4y \\ z = 3y \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \\ 3y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{donc } \boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$2) \cdot \text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -21 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 - 7L_4$

$$\text{donc } \boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ est de dimension 2}}$$

Ici $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donc $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} -11x + 7y + 3t = 0 \\ y + 11z + 2t = 0 \\ x + 7z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7z + t = 0 & (L_3) \\ y + 11z + 2t = 0 & (L_2) \\ 7y + 77z + 14t = 0 & (L_1) + 11(L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 7z + t = 0 \\ y + 11z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z - t \\ y = -11z - 2t \end{cases} \quad \text{avec } z \text{ et } t \text{ en paramètres}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7z - t \\ -11z - 2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est de dimension 2}}$$

EXO 2.1

Déterminer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ et $f(e_4) \dots$ ce qui prouvera l'unicité de f

• On voit que $f(e_1) = \underline{e_1 - e_2 + e_3}$

• On a $f(2e_1 + 3e_4) = 2f(e_1) + 3f(e_4) = e_2$ d'où $f(e_4) = \frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}(e_1 - e_2 + e_3)$

• Utilisons la description de $\text{Ker}(f)$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 2y \\ t = x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-2y \\ x+3y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{-\frac{2}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3}$$

donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\{e_1 - e_3 + e_4; e_2 - 2e_3 + 3e_4\}$

Ainsi $f(e_1 - e_3 + e_4) = 0$ soit $f(e_3) = f(e_1) + f(e_4) = \underline{\frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_3}$

et $f(e_2 - 2e_3 + 3e_4) = 0$ soit $f(e_2) = 2f(e_3) - 3f(e_4) = \underline{\frac{8}{3}e_1 - 3e_2 + \frac{8}{3}e_3}$

On en déduit que f a nécessairement pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 8/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où l'unicité de f .

Son existence est garantie par ce qui précède : on a trouvé la matrice de manière à satisfaire les quatre contraintes sur $f(e_1), f(2e_1 + 3e_4)$ et le moyen. En effet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{8}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t = 0 \\ -x - 3y + t = 0 \\ x + \frac{8}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 8y + z - 2t = 0 & \text{3(1)} \\ x + 3y - t = 0 & \text{-(1)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 & \text{(1) - 2(2)} \\ x + 3y - t = 0 \end{cases}$$

donc tout va bien !

EXO 23

$$\bullet e_2 - 2e_3 \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(e_2 - 2e_3) = 0 \Rightarrow \underline{f(e_2) = 2f(e_3)}$$

$$e_1 + e_4 \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(e_1 + e_4) = 0 \Rightarrow \underline{f(e_1) = -f(e_4)}$$

Ainsi, l'endomorphisme f est entièrement déterminé par la donnée de $f(e_3)$ et $f(e_4)$, qui vont engendrer $\text{Im}(f)$

$$\bullet \vec{x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ t = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ est de dimension 2}$$

• Pour que f vérifie les contraintes voulues, il faut donc que

* $f(e_3)$ et $f(e_4)$ soient deux vecteurs non colinéaires de $\text{Im}(f)$

* $f(e_2) = 2f(e_3)$ et $f(e_1) = -f(e_4)$

$$\text{On va ainsi prendre } f(e_3) = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ a+2b \\ -3a \end{pmatrix}$$

$$\text{et } f(e_4) = c \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ 3d \\ c+2d \\ -3c \end{pmatrix}, \text{ avec } (a,b) \text{ et } (c,d) \text{ non proportionnels...}$$

(c'est-à-dire $ad - bc \neq 0$)

Ceci conduit à

$$\boxed{\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} -3c & 6a & 3a & 3c \\ -3d & 6b & 3b & 3d \\ -c-2d & 2a+4b & a+2b & c+2d \\ 3c & -6a & -3a & 3c \end{pmatrix} \text{ avec } ad - bc \neq 0}$$

EXO 24

- 1) $\vec{e}_1'$ et $\vec{e}_2'$ étant deux vecteurs non colinéaires, $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
Son cardinal vaut la dimension de $\mathbb{R}^2$, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

AUTRE MÉTHODE $\text{rg}\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\} = 2 = \text{card}\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\} = \dim(\mathbb{R}^2)$
donc c'est une base

- 2) Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans cette base sont les uniques réels x et y vérifiant $\vec{u} = x\vec{e}_1' + y\vec{e}_2'$. Or,

$$x\vec{e}_1' + y\vec{e}_2' = \vec{u} \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ -y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y = -12 \\ y = 7 \end{cases}$$

Ainsi,

le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(-12, 7)$ dans la base $\mathcal{B}'$

EXO 25

Pour calculer les images de $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ et $\vec{k}'$ par f , on les multiplie par M

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } f(\vec{i}') = \vec{i} = 1\vec{i}' + 0\vec{j}' + 0\vec{k}'$$

$$f(\vec{j}') = \vec{j} = 0\vec{i}' + 1\vec{j}' + 0\vec{k}'$$

$$f(\vec{k}') = 2\vec{k} = 0\vec{i}' + 0\vec{j}' + 2\vec{k}'$$

si bien que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXO 26

On va reprendre la même démarche

$$1) \vec{i}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{j}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{k}' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ET LÀ, COMME IL N'Y A RIEN DE SIMPLE, IL FAUT TROUVER LES COORDONNÉES DE $f(\vec{i}'), f(\vec{j}'), f(\vec{k}')$ DANS LA BASE $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$

$$f(\vec{i}') = a\vec{i}' + b\vec{j}' + c\vec{k}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 3 \\ a - b = 1 \\ b + c = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ b + c = 3 \\ 2b - c = 2 \quad (1) - (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ b + c = 3 \\ 3b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b = 8/3 \\ c = 3 - b = 4/3 \\ b = 5/3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 8/3 \\ 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{j}') = a\vec{i}' + b\vec{j}' + c\vec{k}' \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = -2 \\ a - b = 2 \\ b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ b + c = -1 \\ 2b - c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ b + c = -1 \\ 3b = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + b = 1/3 \\ b = -5/3 \\ c = -1 - b = 2/3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{k}') = a\vec{i}' + b\vec{j}' + c\vec{k}' \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = -2 \\ a - b = -3 \\ b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ b + c = -1 \\ 2b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ b + c = -1 \\ 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 8/3 & 1/3 & -3 \\ 5/3 & -5/3 & 0 \\ 4/3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$$

PAS TRÈS BEAU $\Rightarrow$ LA NOUVELLE BASE N'A AUCUN INTÉRÊT!

$$2) \vec{i}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\vec{i}') \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{i}' + \vec{j}' + \vec{k}' \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\vec{j}') \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{i}' - 2\vec{j}' + 3\vec{k}' \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\vec{k}') = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{i}' - 3\vec{j}' + 3\vec{k}' \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

LE CALCUL DES COORDONNÉES EST FACILE CAR LA BASE EST PLUS SIMPLA À MANIPULER

Ainsi, la matrice de f dans la nouvelle base est $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

EXO 27

1) Si λ est une valeur propre de f : il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

$$\text{Alors } f(\vec{u}) - \lambda \vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{soit } (f - \lambda \text{Id}_E)(\vec{u}) = \vec{0} : \text{donc } \vec{u} \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$$

Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, ceci montre que $\ker(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$

Réciproquement, si $\ker(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$, ce noyau contient un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$

$$\text{Ainsi } (f - \lambda \text{Id}_E)(\vec{u}) = f(\vec{u}) - \lambda \vec{u} = \vec{0}$$

d'où $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$: λ est une valeur propre de f

2) Soit λ une valeur propre de f . Pour $\vec{u}' \in E$, on a

$$\begin{aligned} \vec{u}' \in E_\lambda(f) &\Leftrightarrow f(\vec{u}') = \lambda \vec{u}' \Leftrightarrow f(\vec{u}') - \lambda \vec{u}' = \vec{0} \Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id}_E)(\vec{u}') = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{u}' \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$$

3) D'après la question 1), λ est une valeur propre de f

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$$

$$\Leftrightarrow \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) > 0$$

$$\Leftrightarrow \dim(E) - \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) < \dim(E)$$

THME DU RANG

EN EFFET $\dim E = \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) + \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ cf. Thme du rang

soit $\dim \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \dim(E) - \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E)$

4) (a) Utilisons le résultat de la question 3) pour calculer les valeurs propres de f . Déjà, on peut noter que

$$\text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) = \text{rg}(M - \lambda I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \\ L_2 + L_3 \\ L_1 + \lambda L_3 \end{matrix}$$

* Si $\lambda = 1$: $\text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ donc 1 est valeur propre

* Si $\lambda \neq 1$: on divise les deux dernières lignes par $1-\lambda$, en observant que $-1+2\lambda-\lambda^2 = -(\lambda^2-2\lambda+1) = -(\lambda-1)^2 = (1-\lambda)(\lambda-1)$

$$\text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda = 2 \\ 3 & \text{si } \lambda \neq 2 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

ce qui montre que 2 est également valeur propre

Ainsi, les valeurs propres de f sont 1 et 2

(h) Déterminons les sous-espaces propres $E_1(f)$ et $E_2(f)$

• $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, avec $\text{Mat}(f - \text{Id}_E) = M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(f) \Leftrightarrow -x + y - z = 0$

$\Leftrightarrow y = x + z$

$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

si bien que $E_1(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un s.e.v. de dimension 2

• $E_2(f) = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$, avec $\text{Mat}(f - 2\text{Id}_E) = M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(f) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & (L3) \\ -y - z = 0 & (L2) + (L3) \\ -y - z = 0 & (L1) + 2(L3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -z \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $E_2(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) Réunissons les bases de $E_1(f)$ et $E_2(f)$: on obtient $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Or $\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 3$ ($C_3 \leftarrow C_3 + C_1$) donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Notons $\bar{i}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{j}' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\bar{k}' \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Comme $\bar{i}' \in E_1(f)$, alors $f(\bar{i}') = \bar{i}' = 1\bar{i}' + 0\bar{j}' + 0\bar{k}'$

* De même, $\bar{j}' \in E_1(f)$ donc $f(\bar{j}') = \bar{j}' = 0\bar{i}' + 1\bar{j}' + 0\bar{k}'$

* Enfin, $\bar{k}' \in E_2(f)$ donc $f(\bar{k}') = 2\bar{k}' = 0\bar{i}' + 0\bar{j}' + 2\bar{k}'$

De ce fait, la matrice de f dans la base B est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Super la matrice diagonale !

CHAPITRE 25

Exos 1 à 15

EXO 1

Comme on prend un individu au hasard dans une population donnée, on est en situation d'équiprobabilité.

Notons A : « l'individu a déjà fait de la plongée »

B : « l'individu a déjà pris l'avion »

Hypothèses : $P(\bar{A}) = 0,37$ $P(\bar{B}) = 0,48$ $P(A \cap B) = 0,29$

But : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$

Méthode 1 $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

$$\begin{aligned} \text{Or } P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 0,63 \quad \text{et} \quad P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0,52 \\ \text{donc } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,63 + 0,52 - 0,29 \\ &= 0,86 \end{aligned}$$

De ce fait,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,14$$

Méthode 2 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

donc $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cup \bar{B})$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \bar{A} \cup \bar{B} &= \overline{A \cap B} \quad \text{donc } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,71 \\ \text{si bien que } P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 0,37 + 0,48 - 0,71 \\ &= 0,14 \end{aligned}$$

Ainsi

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,14$$

Méthode 3

		0,63	0,37	Ω
B		$A \cap B$ 0,29	$\bar{A} \cap B$ 0,23	0,52
$\bar{B}$		$A \cap \bar{B}$ 0,34	$\bar{A} \cap \bar{B}$ 0,14	0,48
		A	$\bar{A}$	

Ce joli schéma permet de découper Ω en $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$

EX02

On achète deux billets parmi les 100 vendus : c'est un tirage SANS ORDRE
NI REMISE de deux objets parmi cent, il y a $\binom{100}{2} = 50 \times 99$ issues possibles

Elles sont toutes équiprobables car le tirage se fait au hasard.

A : "on a au moins un billet gagnant"

$\bar{A}$: "on a uniquement des billets perdants"

$\bar{A}$ correspond aux tirages sans ordre ni remise de deux billets parmi les 97 billets perdants : il y en a $\binom{97}{2} = \frac{97 \times 96}{2} = 97 \times 48$

$$\text{Ainsi : } P(\bar{A}) = \frac{97 \times 48}{50 \times 99} = \frac{97 \times 8 \times 6}{25 \times 2 \times 3 \times 33} = \frac{97 \times 8}{25 \times 33} = \frac{776}{825}$$

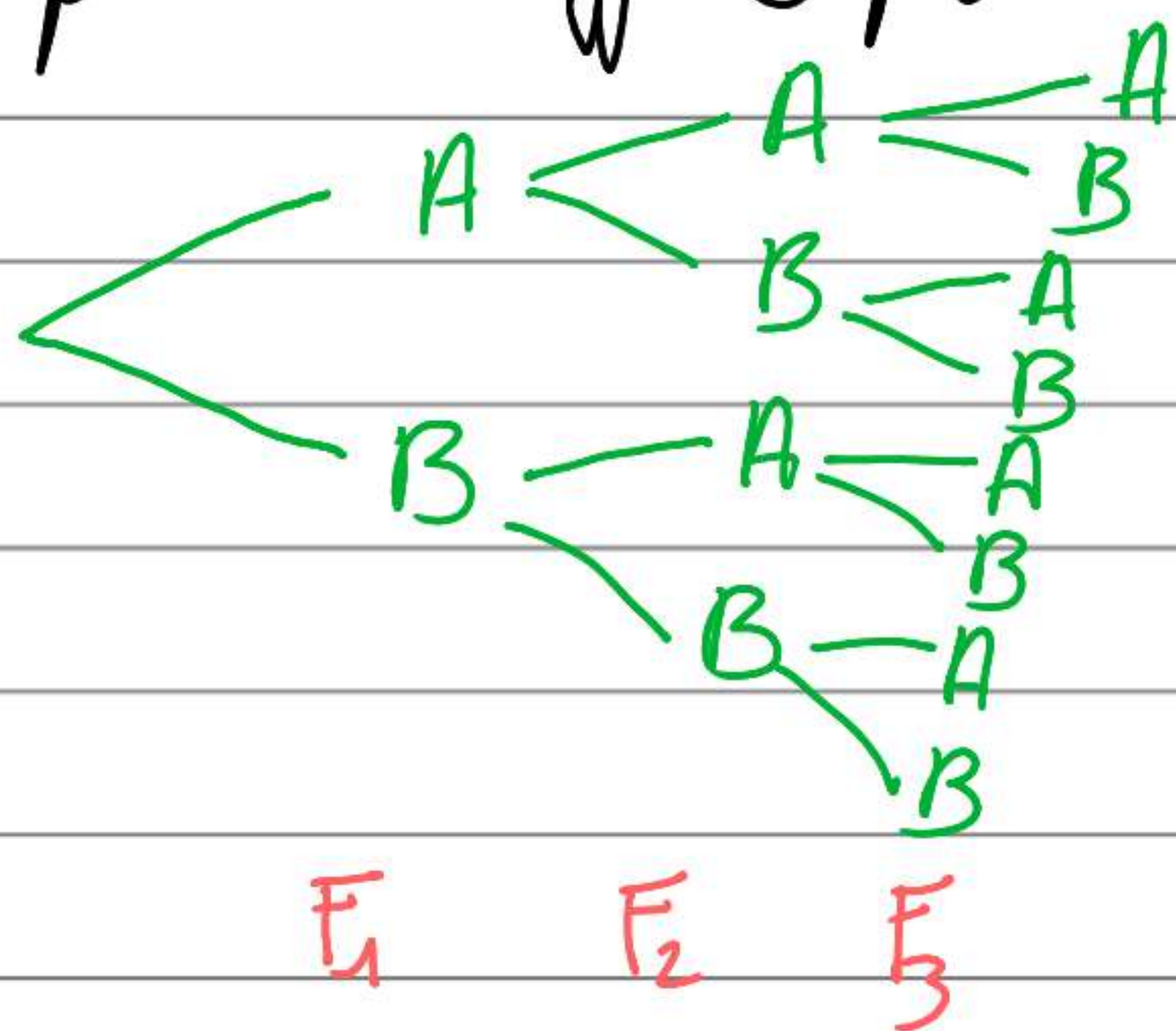
et donc

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{49}{825} \approx 0,06$$

EX03

L'idée est ici de se placer du point de vue des fèves et non des galettes :
en effet, chaque galette peut contenir 0, 1, 2, ... fèves mais ces différents événements
ne sont pas équiprobables. Par contre, chacune des fèves a une chance sur deux
de se trouver dans l'une ou l'autre galette.

- 1) En notant A et B les deux galettes, F_1, F_2 et F_3 les 3 fèves, on peut
représenter les différentes possibilités à l'aide d'un arbre



Comme chacune des fèves a autant de
chances de se trouver dans l'une ou l'autre
galette, les huit chemins sur cet arbre
sont équiprobables.

Ω : univers de cardinal $2^3 = 8$

E : "chaque galette contient au moins une fève"

$\bar{E}$: "toutes les fèves sont dans la même galette"

$\bar{E}$ est constitué des chemins AAA et BBB donc $P(\bar{E}) = 2/8 = 1/4$
De ce fait

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 3/4$$

- 2) Il suffit de faire le même calcul avec n fèves: $\bar{E}$ est toujours constitué de 2 chemins
(AAA...A et BBB...B) donc $\text{card}(\bar{E}) = 2$ et $\text{card}(\Omega) = 2^n$

$$\text{donc } P(\bar{E}) = \frac{2}{2^n} = 2^{1-n} \quad \text{soit } P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - 2^{1-n}$$

$$\text{Ainsi } P(E) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 2^{1-n} \geq 0,99 \Leftrightarrow 2^{1-n} \leq 0,01 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 100$$

$$\Leftrightarrow n-1 \geq 7 \quad \Leftrightarrow n \geq 8$$

$\square$ Il faut au moins 8 fèves

EX04

- * Tirage au hasard $\Rightarrow$ 32 issues équiprobables
 - * Parmi celles-ci : 8 coeurs et 4 rois, dont le roi de coeurs
 $\Rightarrow 8 + 4 - 1 = 11$ cartes qui sont soit un coeur, soit un roi
 - * De ce fait, il reste $32 - 11 = 21$ cartes qui ne sont ni un coeur, ni un roi.
- La probabilité recherchée est donc $P = 21/32$

EX05

Si on lance 5 fois de suite une pièce équilibrée, les résultats vont être des 5-listes d'éléments de $\{P, F\}$: il y a donc $2^5 = 32$ issues, qui sont équiprobables comme la pièce est équilibrée.

1) On obtient au moins 4 fois "Pile" lorsque l'on a :

- * 5 "Pile" $\rightarrow$ 1 issue : PPPPP

- * 4 "Pile" $\rightarrow$ 5 issues : FP PPP - PFP PP - PPFP P - PPPFP - PPPPF

La probabilité recherchée est donc $6/32 = 3/16$

2) On obtient plus de "Face" que de "Pile" lorsque l'on a :

- * 5 "Face" $\rightarrow$ 1 issue : FFFFF

- * 4 "Face" $\rightarrow$ 5 issues (5 façons de placer le P)

- * 3 "Face" $\rightarrow$ $\binom{5}{2} = 10$ issues (façons de placer les 2 P parmi les 5 places)

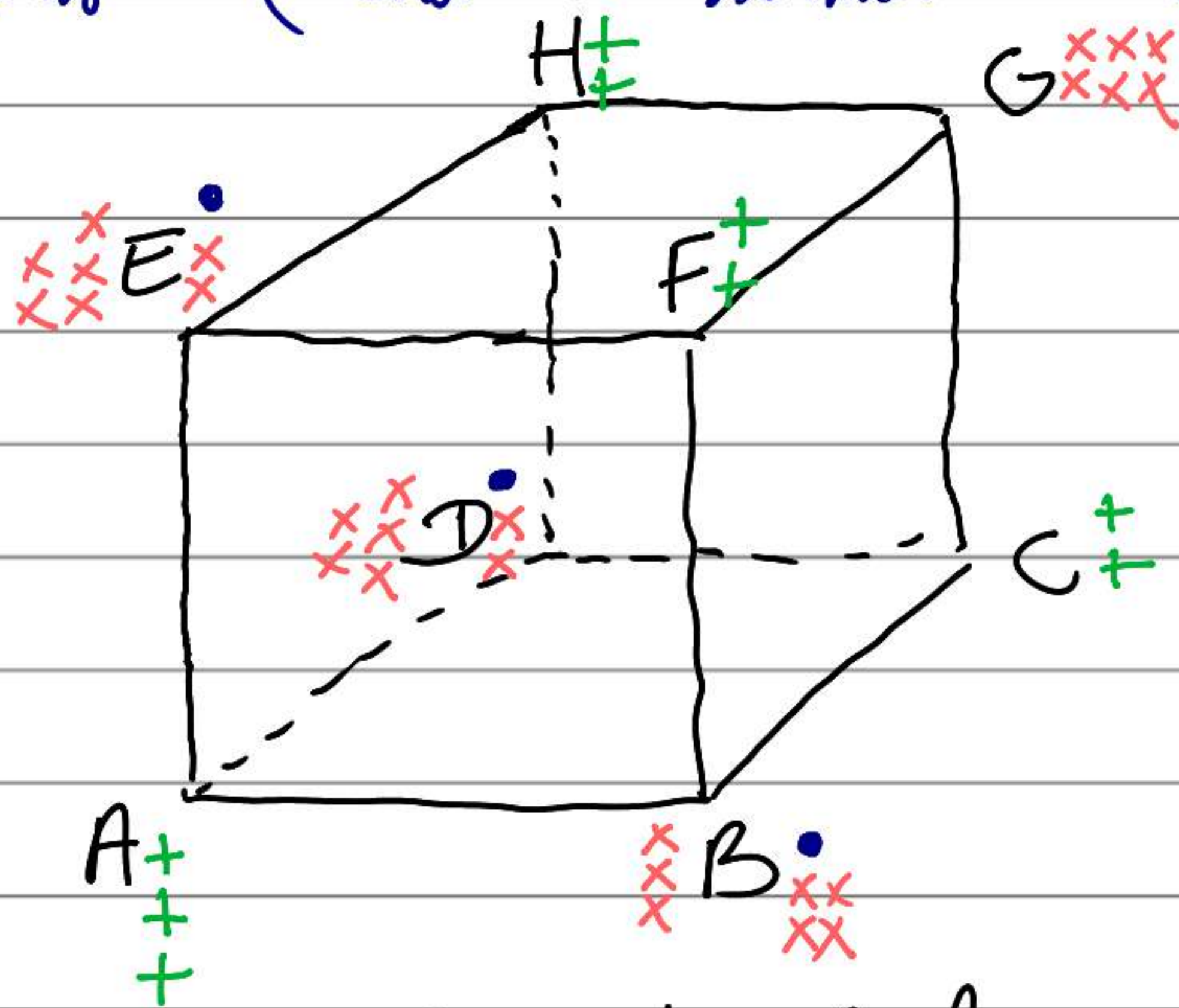
La probabilité recherchée est $16/32 = 1/2$

3) On va regarder le nombre de façons d'avoir au moins 3 "Pile" de suite puis le multiplier par 2 (autant de façons d'avoir 3 "Face")

- * 5 "Pile" de suite $\rightarrow$ PPPPP : 1 issue
 - * 4 "Pile" de suite $\rightarrow$ FPPPP, PPPPF : 2 issues
 - * 3 "Pile" de suite $\rightarrow$ PPPFF, PPPFP, FPPPF, FFPPP, PFPPP : 5 issues
- Ceci nous donne 8 issues. Il y en a également 8 avec au moins 3 "Face" de suite, si bien que la probabilité recherchée est $\boxed{16/32 = 1/2}$

EX06

On va dessiner le cube, et noter les sommets accessibles depuis A (•) puis ceux accessibles depuis ceux-là (+) et enfin les sommets accessibles depuis ces derniers (x) qui seront précisément les sommets accessibles en 3 coups. Cela permet de dénombrer les chemins joignant A à l'un de ces sommets, ce qui donne les probabilités puisque les chemins sont équiprobables (choix d'un sommet au hasard à chaque déplacement)



- un coup
- + deux coups
- x trois coups

À l'issue des 3 déplacements, la fourmi peut donc se trouver en B, D, E ou G

$$\boxed{P(B) = P(D) = P(E) = 7/27}$$

$$\text{et } \boxed{P(G) = 6/27}$$

(3 déplacements successifs avec 3 possibilités à chaque fois $\Rightarrow 3^3 = 27$ chemins)

EX07

On lance 4 fois de suite une pièce ^{équitable} $\Rightarrow 2^4 = 16$ résultats équiprobables
Les issues sont des 4 listes de $\{P, F\}$, c'est des mots de 4 lettres constitués de P et de F

* A : il faut choisir la place des 2 P $\rightarrow \binom{4}{2} = 6$ mots possibles

Ainsi

$$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

* B : ou bien 3 P et 1 F $\rightarrow \binom{4}{1} = 4$ mots (placements du F)
ou bien 3 F et 1 P $\rightarrow \binom{4}{1} = 4$ mots (placements de P)

d'où

$$P(B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

REM $A \cup B$: "il y a au moins 1 fois Pile et 1 fois Face"

$C = \overline{A \cup B}$: "4 Pile ou 4 Face" $\rightarrow 2$ issues $\rightarrow P(C) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

On note que l'on retrouve bien $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

EX08

IDÉE : visualiser les sommes de deux dés dans un tableau
voir lesquelles permettent d'obtenir 9 ou 10 avec 3 dés

$\begin{smallmatrix} D_2 \\ D_1 \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Le troisième dé apporte un numéro entre 1 et 6 :

* pour obtenir une somme égale à 9, il faut que la somme des 2 premiers soit entre 3 et 8

$\Rightarrow 25$ CAS SUR 36

* pour obtenir une somme égale à 10, il faut que la somme des 2 premiers soit entre 4 et 9

$\Rightarrow 27$ CAS SUR 36

EXO 9

Comme on choisit 5 cartes au hasard parmi 32, on a affaire à un tirage SANS ORDRE NI REMISE : il y a alors

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!27!} = \frac{32 \times 31 \times \cancel{30} \times \cancel{29} \times \cancel{28}^7}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 32 \times 31 \times 29 \times 7 = 201376$$

issues possibles.

3 cartes de même hauteur
↗

1) Comptons le nombre de façons d'obtenir un brelan et une paire

* NOMBRE DE BRELAN

Choix de la hauteur : $\binom{8}{1} = 8$ possibilités

Choix des couleurs : $\binom{4}{3} = 4$ possibilités

} $8 \times 4 = 32$ brelans

* NOMBRE DE PAIRES la hauteur est différente de celle du brelan

Choix de la hauteur : $\binom{7}{1} = 7$ possibilités

Choix des couleurs : $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ possibilités

} $7 \times 6 = 42$ paires

On a ainsi $32 \times 42 = 1344$ façons d'obtenir un brelan et une paire. La proba de cet événement est

$$P_1 = \frac{1344}{201376} = \frac{\cancel{32} \times 6 \times \cancel{7}}{\cancel{32} \times 31 \times \cancel{29} \times \cancel{7}} = \frac{6}{899} \approx 0,67\%$$

2) Procédure pour avoir un carré

* NOMBRE DE CARRÉS

$$\left. \begin{array}{l} \text{Choix de la hauteur : } \binom{8}{1} = 8 \text{ possibilités} \\ \text{Choix des couleurs : } \binom{4}{1} = 1 \text{ possibilité} \end{array} \right\} 8 \text{ carrés}$$

* NOMBRE DE CARTES RESTANTES

Une fois le carré choisi, il reste 28 cartes... donc 28 choix possibles pour la 5^{ème} carte. On a ainsi

$$8 \times 28 = 224$$

façons d'obtenir un carré, et la probabilité de cet événement est

$$P_2 = \frac{224}{201376} = \frac{\cancel{8} \times \cancel{4} \times \cancel{7}}{\cancel{32} \times 31 \times 29 \times \cancel{7}} = \frac{1}{31 \times 29} = \frac{1}{899} \approx 0.11\%$$

3) Passons à la paire ! On en veut une seule (car la paire, x en a pas deux...)

* NOMBRE DE PAIRES

$$\left. \begin{array}{l} \text{Choix de la hauteur : } \binom{8}{1} = 8 \text{ possibilités} \\ \text{Choix des couleurs : } \binom{4}{2} = 6 \text{ possibilités} \end{array} \right\} 8 \times 6 = 48 \text{ paires}$$

* TIRAGES DES 3 CARTES RESTANTES

Il faut tirer 3 cartes de 3 hauteurs différentes... et de hauteur également différente de la paire déjà choisie

$$\left. \begin{array}{l} \text{Choix des hauteurs : } \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \text{ possibilités} \\ \text{Choix des couleurs : } \binom{4}{1}^3 = 4^3 = 64 \text{ possibilités} \end{array} \right\} 35 \times 64 = 2240 \text{ choix}$$

⚠ Si l'on considère les possibilités de tirer la 3^{ème}, la 4^{ème} puis la 5^{ème} carte, on obtient en excluant les hauteurs déjà prises

$$28 \times 24 \times 20 = 13440 \text{ choix}$$

Cela en fait 6 fois plus. Pourquoi ? Parce qu'en parlant de 3^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} carte, on effectue un tirage AVEC ORDRE des 3 dernières cartes... alors que l'on considère depuis le début des tirages SANS ORDRE ni remise. Cela multiplie le nombre de possibilités par $3! = 6$

On obtient ainsi $48 \times 2240 = 107520$ façons d'obtenir une paire, et la probabilité recherchée est

$$P_3 = \frac{107520}{201376} = \frac{\cancel{8} \times 6 \times 5 \times \cancel{7} \times \cancel{4} \times 6}{\cancel{32} \times 31 \times 29 \times \cancel{7}} = \frac{480}{899} \approx 0,53$$

EXO 10

- On va s'intéresser aux jours d'anniversaires de nos 30 personnes
- On peut des 30-listes d'un ensemble de cardinal 365 (tirages avec ordre et remise de 30 éléments d'un ensemble à 365 éléments) donc il y en a en tout 365^{30}
- Considérons l'événement contraire de l'événement proposé
 $\bar{A}$: « les personnes ont toutes des jours distincts »
 Cela correspond aux 30-listes d'éléments DISTINCTS d'un ensemble de card. 365
 donc il y en a $365 \times 364 \times \dots \times 336 = \frac{365!}{335!}$
- De ce fait $P(A) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times 336}{365^{30}} = \prod_{k=1}^{30} \frac{335+k}{365}$

si bien que la probabilité recherchée est

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \prod_{k=1}^{30} \frac{335+k}{365} \approx 0,7$$

EXO 11

1) Tirage sans remise m/lemise $\leadsto \binom{n}{k}$ tirages équiprobables possibles

• Tirages contenant la boule 1

$\rightarrow$ il y a le 1 : $\binom{1}{1} = 1$ choix

$\rightarrow$ et $k-1$ n°s $\neq$ 1 : $\binom{n-1}{k-1}$ choix

} $\binom{n-1}{k-1}$ tirages

La probabilité de tirer la boule 1 est donc égale à

$$P_1 = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} \times \frac{k!}{k!} = \frac{k}{n}$$

2) (a) Quel que soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la probabilité d'obtenir la boule i au $k^{\text{ème}}$ tirage est la même... soit $1/n$

En particulier, la probabilité d'obtenir la boule 1 au $k^{\text{ème}}$ tirage est égale à $P(\pi) = 1/n$

(b) La probabilité d'obtenir la boule 1 lors des k tirages est donc

$$\sum_{k=1}^k P(\pi) = \sum_{k=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

On retrouve le résultat de la question 1

REM : on retrouve le résultat de la question 2(a) avec la formule des probas composées, en notant U_n : « on obtient n au $n^{\text{ème}}$ tirage »

$$\text{Alors } P(U_n) = P(\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \cap \dots \cap \bar{U}_{n-1} \cap U_n)$$

$$= P(\bar{U}_1) \times P_{\bar{U}_1}(\bar{U}_2) \times \dots \times P_{\bar{U}_1 \cap \dots \cap \bar{U}_{n-2}}(\bar{U}_{n-1}) \times P_{\bar{U}_1 \cap \dots \cap \bar{U}_{n-1}}(U_n)$$

$$= \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \dots \times \frac{\cancel{n-(n-1)}}{\cancel{n-(n-2)}} \times \frac{1}{\cancel{n-(n-1)}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{n}}$$

EXO 12

Il suffit de représenter les différents duels à l'aide de tableaux et de faire apparaître le nom du vainqueur dans chaque cas

B \ A	2	4	9
1	A	A	A
6	B	B	A
8	B	B	A

C \ B	1	6	8
3	C	B	B
5	C	B	B
7	C	C	B

A \ C	3	5	7
2	C	C	C
4	A	C	C
9	A	A	A

Effectivement

A	l'emporte 5 fois sur 9 sur B
B	_____ C
C	_____ A

EXO 13

Les issues de notre expérience aléatoire sont les 36-listes avec ordre dans remise de nos 36 élèves, bref toutes les permutations possibles de nos 36 affreux jojos

$\Rightarrow$ il y en a

$$\boxed{\text{card}(\Omega) = 36!}$$

Notons A_n : "il y a n personnes entre Antoine et Clovis" et dénombrons les cardinaux de ces événements. Pour cela, on va recenser les configurations possibles.

$(n=0)$ A_0 a lieu lorsque Antoine et Clovis sont l'un après l'autre

* $\boxed{\dots | A | C | \dots}$: 35 positions possibles du bloc $[AC]$ (A ira de la 1^{ère} à la 35^{ème} posit^{ion})
 * $\boxed{\dots | C | A | \dots}$: 35 positions possibles du bloc $[CA]$

$\Rightarrow 2 \times 35$ positions d'Antoine et Clovis

Ensuite, il faut placer les 34 autres élèves... une fois de plus, on a affaire à des PERMUTATIONS (façons de les ordonner)
 $\Rightarrow 34!$ positions possibles

Ainsi : $\boxed{\text{card}(A_0) = 2 \times 35 \times 34! = 2 \times 35!}$ et $\boxed{P(A_0) = \frac{2 \times 35!}{36!} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}}$

$(n \in [1, 34])$ A_n a lieu lorsque n personnes s'interposent entre Antoine et Clovis

* $\boxed{\dots | \underbrace{A \dots}_{n \text{ personnes}} | \underbrace{C \dots}_{r \text{ personnes}} | \dots}$: $35-n$ positions possibles du bloc $\underbrace{A \dots C}_{n+r \text{ personnes}}$
 donc la dernière posit^{ion} possible est $(36 - (n+r)) = (35-n)$

* $\boxed{\dots | \underbrace{C \dots}_{r \text{ personnes}} | \underbrace{A \dots}_{n \text{ personnes}} | \dots}$: encore $35-n$ positions possibles

$\Rightarrow 2 \times (35-n)$ positions d'Antoine et Clovis

Ensuite il faut ordonner les 34 autres élèves $\Rightarrow 34!$ positions

Ainsi : $\boxed{\text{card}(A_n) = 2 \times (35-n) \times 34!}$ et $\boxed{P(A_n) = \frac{2 \times (35-n)}{36 \times 35} = \frac{35-n}{18 \times 35}}$

On retrouve bien évidemment $P(A_0)$ pour $n=0$

EX014

Déjà, comme on lance 5 dés équilibrés, on peut assimiler l'expérience à un tirage AVEC ORDRE et AVEC REMISE de 5 éléments de $[1; 6]$
 $\Rightarrow$ il y a donc $\text{card}(\Omega) = 6^5$ issues équiprobables

1) A: "obtenir 5 numéros distincts"

A correspond aux tirages AVEC ORDRE et SANS REMISE de 5 éléments de $[1; 6]$, de sorte que

$$\text{card}(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 6!$$

Il en découle que

$$P(A) = \frac{6!}{6^5} = \frac{5!}{6^4} \approx 0,09$$

2) B: "avoir au moins un multiple de 3"

$\bar{B}$: "n'avoir ni 3, ni 6" correspond aux tirages AVEC ORDRE et AVEC REMISE de cinq éléments de $\{1; 2; 4; 5\}$, de sorte que

$$\text{card}(\bar{B}) = 4^5 \quad \text{et} \quad P(\bar{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \quad \text{d'où} \quad P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0,87$$

3) C: "avoir au moins 2 faces identiques"

$C = A$ donc

$$P(C) = 1 - P(A) \approx 0,91$$

4) D: "obtenir un produit pair"

D a lieu quand on obtient au moins un numéro pair
donc $\bar{D}$: "obtenir uniquement des n°s impairs"

$\Rightarrow$ tirage avec ordre et remise de 5 éléments de $\{1; 3; 5\}$
d'où $\text{card}(\bar{D}) = 3^5$, $P(\bar{D}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ et

$$P(D) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

EXO 15

On suppose que l'on a $n = 650$ taxis numérotés de 1 à n .
On va partir du principe que tous les taxis ont la même probabilité de passer dans les passages, et que leurs trajets sont indépendants

A : « les 4 premiers taxis qui passent ont un n° ≤ 205 »

Par indépendance, la probabilité de cette intersection de 4 événements est

$$P(A) = \left(\frac{205}{650} \right)^4 = \left(\frac{41}{130} \right)^4 \approx 0,01$$

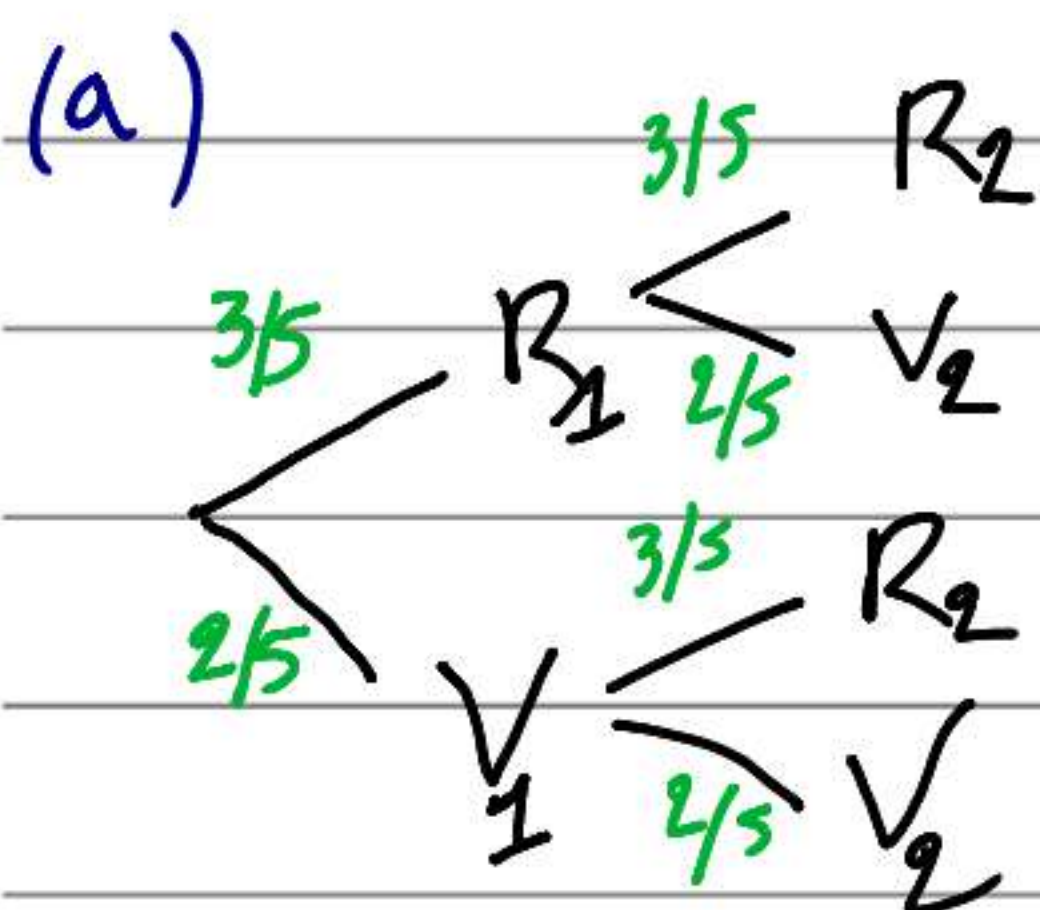
Cette probabilité est très faible, ce qui laisse penser que le chauffeur de taxi raconte n'importe quoi.

MORALITÉ ne jamais croire les histoires que vous racontent les chauffeurs de taxi !

CHAPITRE 25

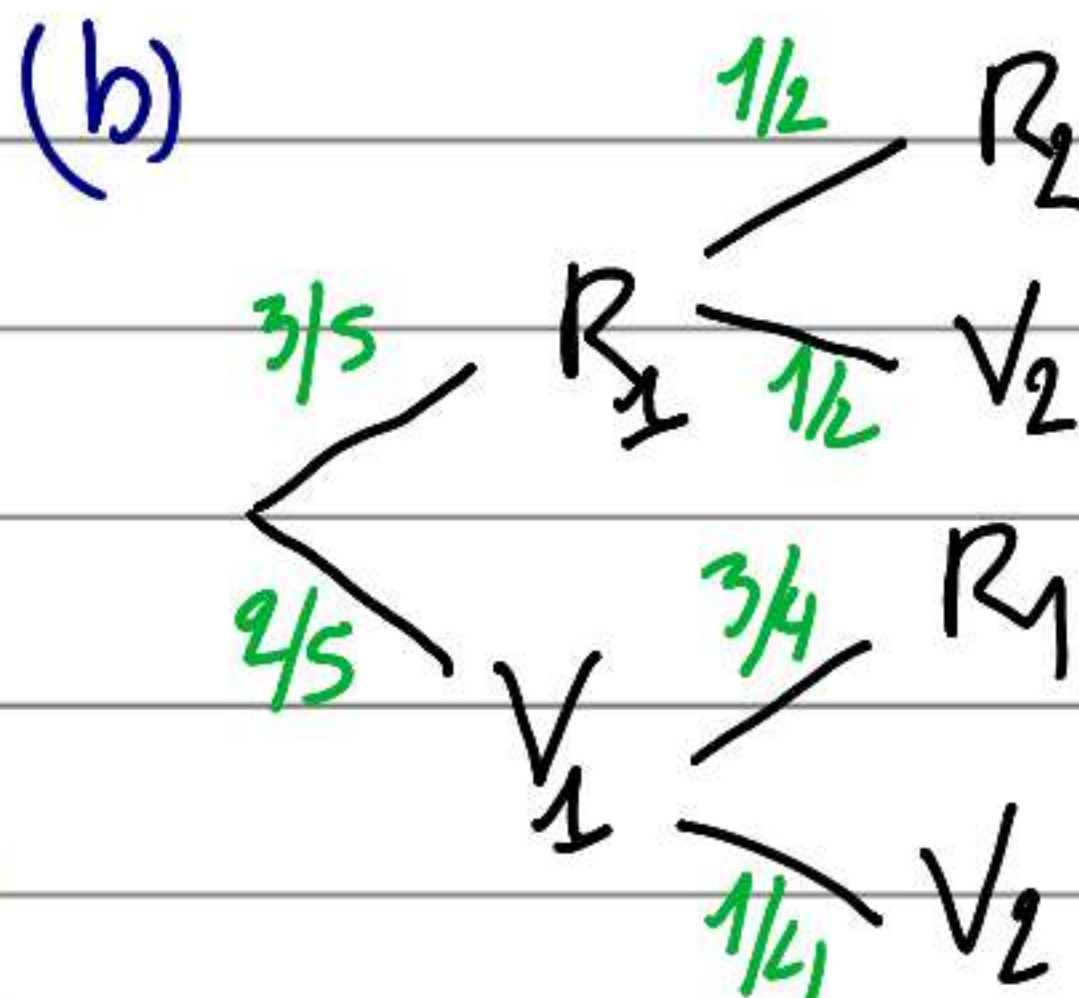
Exercices n° 16 à 38

EXO 16



Mêmes probas
aux deux tirages

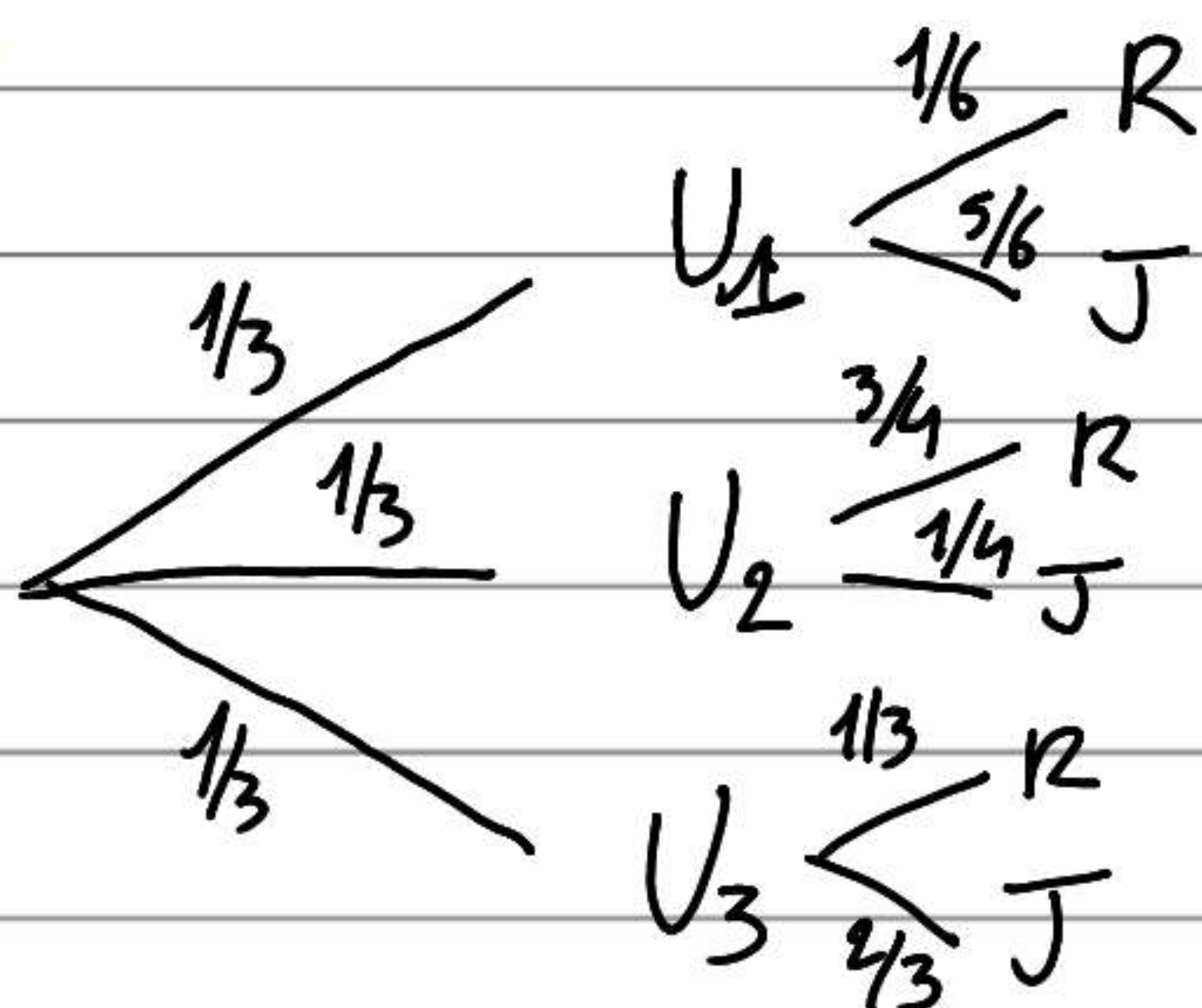
$$P(V_1 \cap V_2) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{25}}$$



Ici, les probas du
second tirage dépen-
dent des résultats
du premier tirage

$$P(V_1 \cap V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

EXO 17



On est en situation d'équiprobabilité
pour le choix de l'urne. Pour les tirages
des boules aussi, si bien que les probabilités
des différentes couleurs sont proportionnelles
aux effectifs correspondants

1) Formule des probas totales:

$$P(R) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{12} + \frac{9}{12} + \frac{4}{12} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{15}{12} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

2) De ce fait, $P(J) = 1 - P(R) = \boxed{\frac{7}{12}}$ (c'est l'événement contraire)

et

$$P(U_3) = \frac{P(U_3 \cap J)}{P(J)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{9} \times \frac{12}{7} = \frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 3 \times 7} = \boxed{\frac{8}{21}}$$

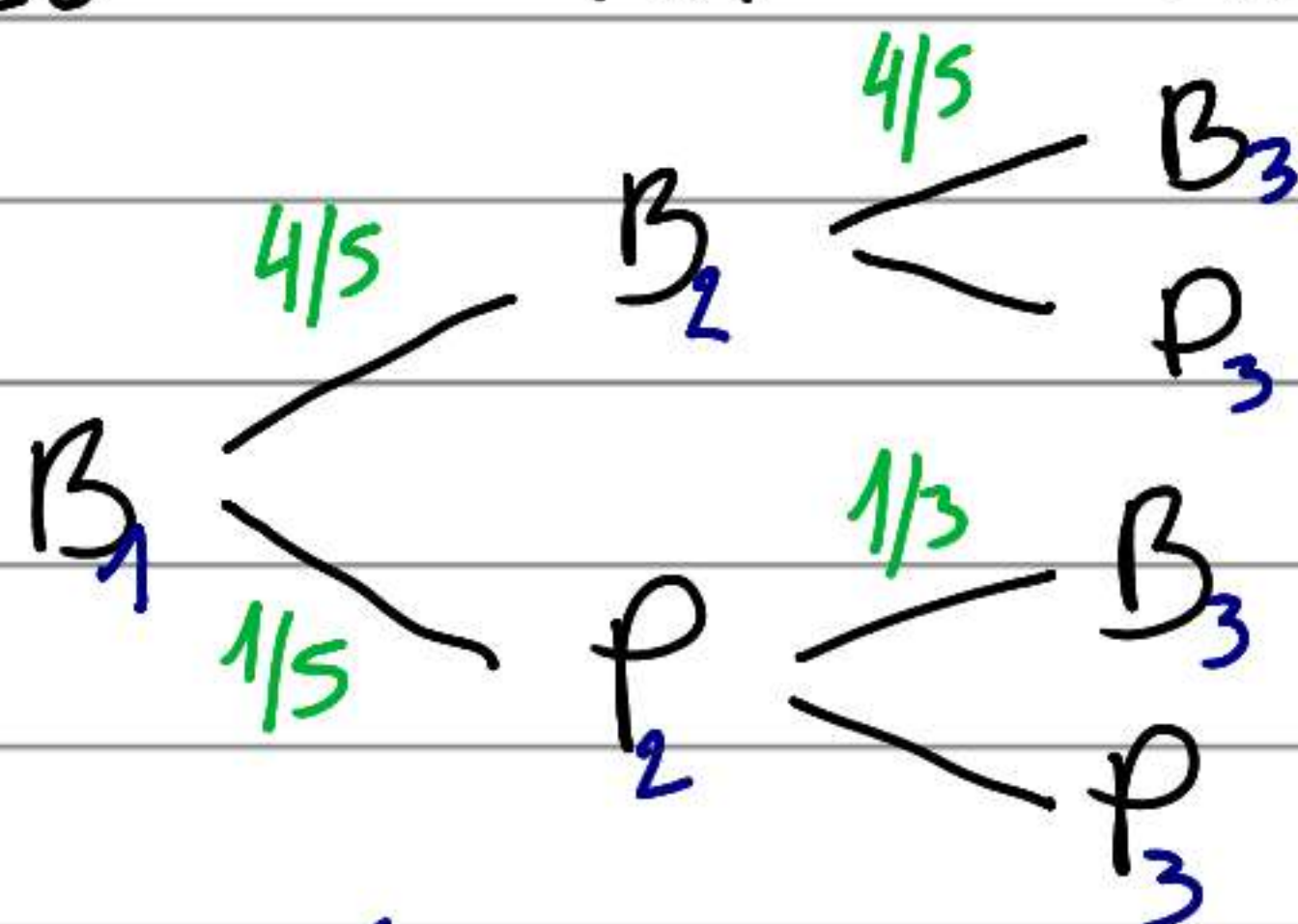
EXO 18

LU

MA

ME

B: "il fait beau"
P: "il pleut"

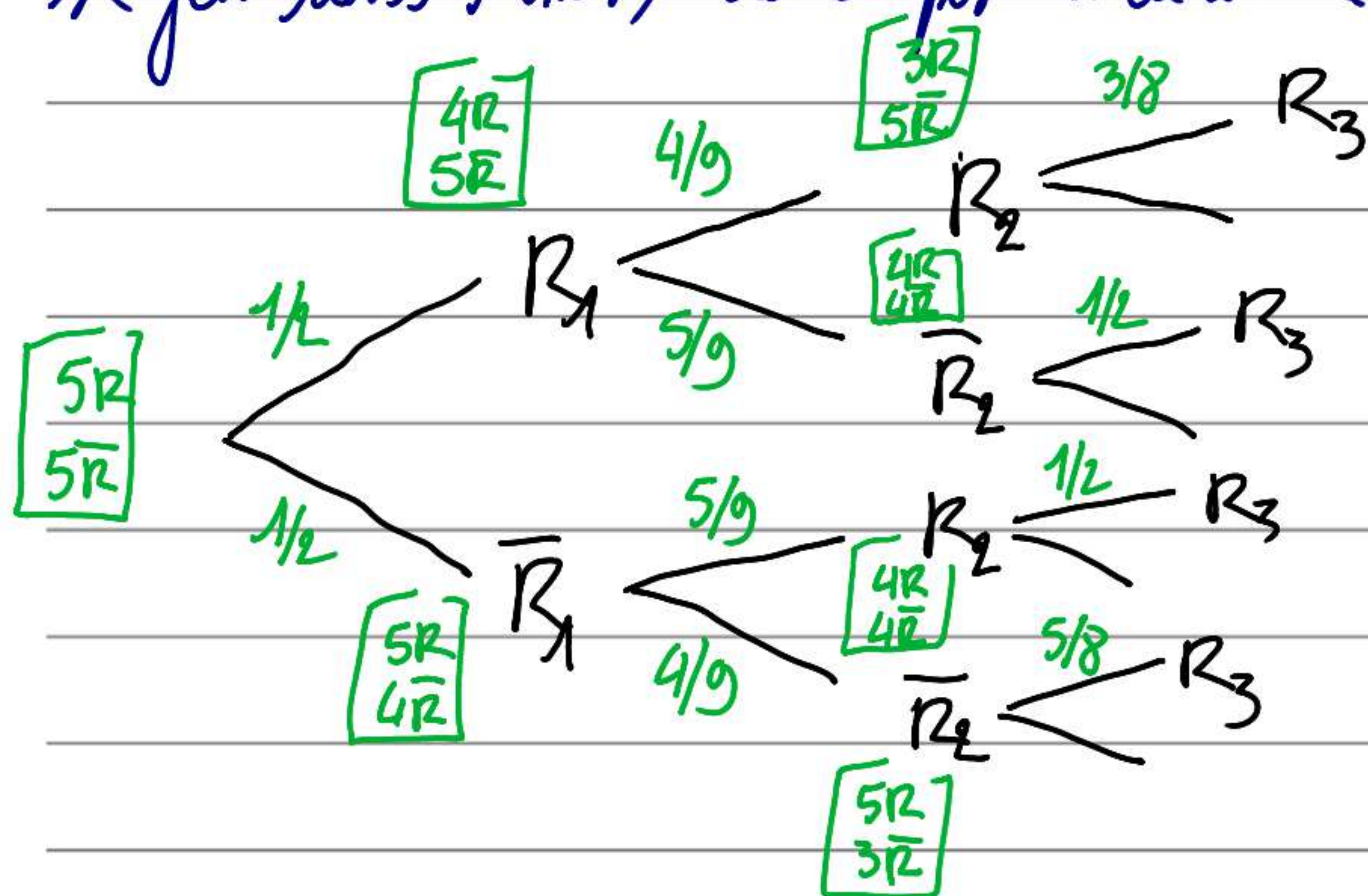


Formule des probas totales: $P(B_3) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{25} + \frac{1}{15} = \frac{48}{75} + \frac{5}{75}$

$$= \boxed{\frac{53}{75}}$$

EXO 19

On va juste regarder si la boule est rouge ou pas. Comme les tirages se font sans remise, la composition de l'urne change à chaque tirage



On retrouve la même probabilité qu'au 1^{er} tirage!

Probas totales: $P(R_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

Idem: $P(R_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \right)$

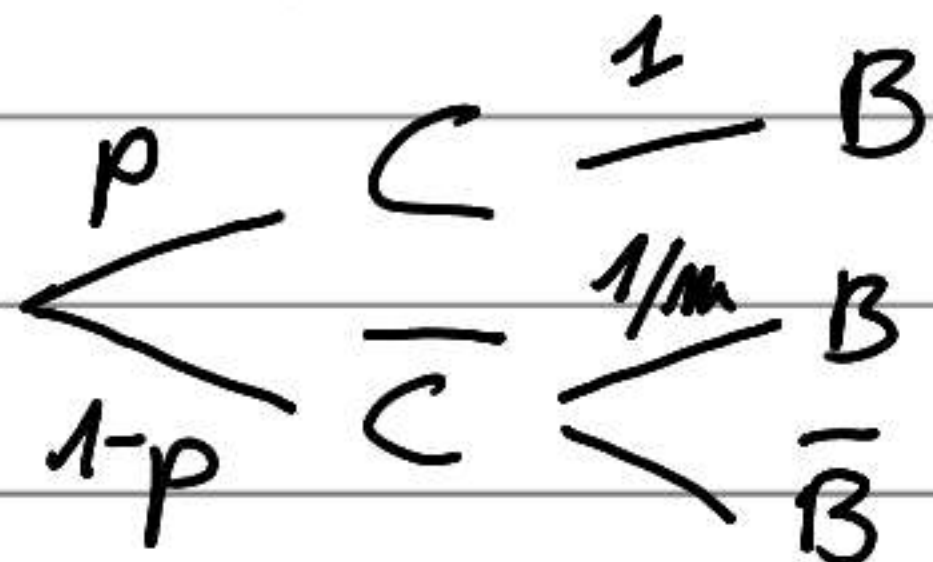
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{12 + 20 + 20 + 20}{72} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

EXO 20

Notons C : "il connaît la bonne réponse"
 B : "il donne la bonne réponse"

On a $P(C) = p$, $P_C(B) = 1$ et $P_{\bar{C}}(B) = \frac{1}{m}$ (situation d'équiprobabilité d'où l'autre de probabilités : dans ce cas)



On cherche $P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)}$ où $P(B \cap C) = p \times 1 = p$ (cf. arbre)

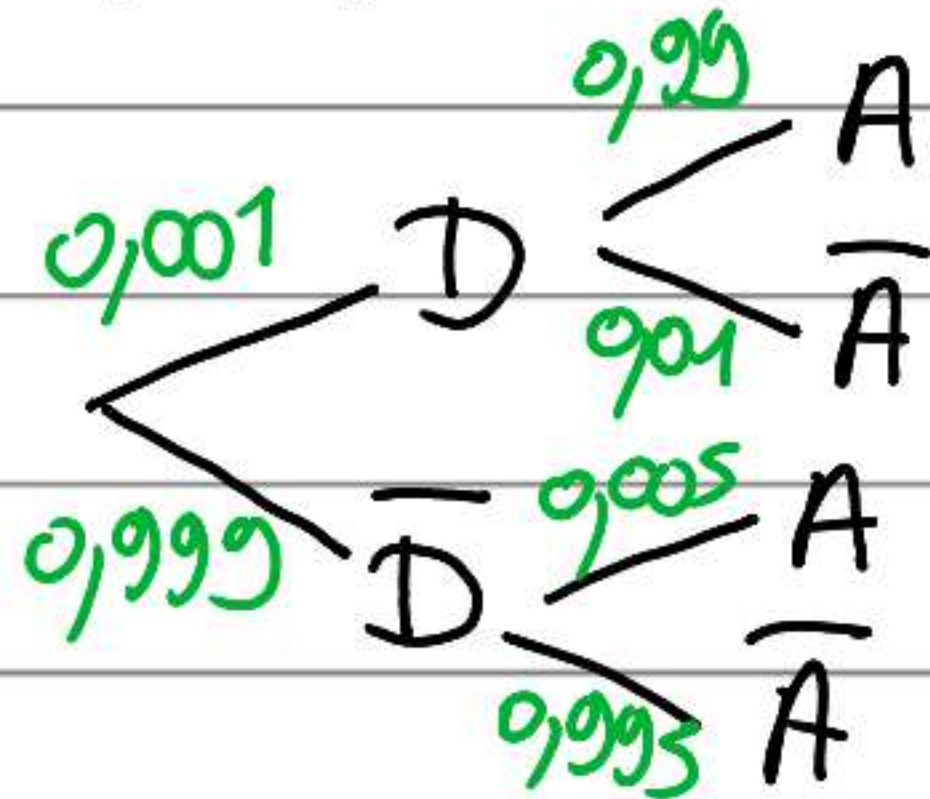
et $P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap \bar{C}) = p + \frac{1-p}{m} = \frac{1+(m-1)p}{m}$ (formule des probas totales)
 si bien que

$$P_B(C) = \frac{mp}{1+(m-1)p}$$

Exemple : pour $p = 0,75$ et $m = 4$
 on obtient $\frac{3}{3,25} = \frac{12}{13}$

EXO 21

On va noter A : "l'alarme se déclenche" et D : "il y a un danger"
 énoncé $\Rightarrow P_D(A) = 0,99$ $P_{\bar{D}}(A) = 0,005$ $P(D) = 0,001$
 d'où l'autre :



On cherche $P_A(\bar{D})$, c'est-à-dire

$$\frac{P(A \cap \bar{D})}{P(A)}$$

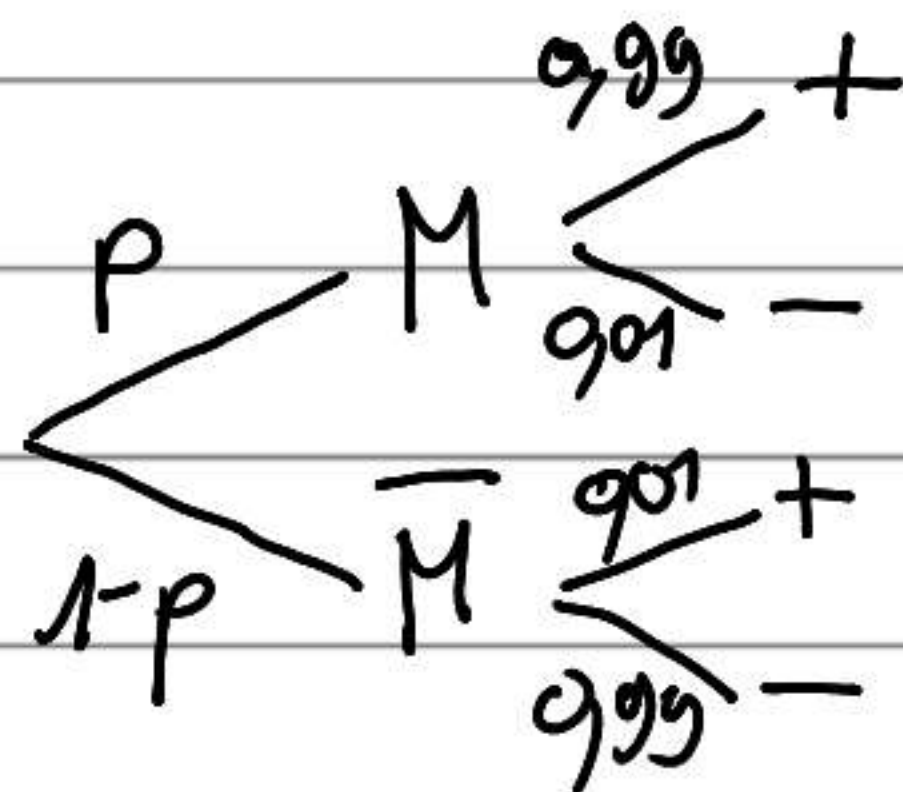
Or $P(A \cap \bar{D}) = 0,999 \times 0,005 = 5 \times 999 \times 10^{-6}$ d'après l'autre

et $P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \bar{D}) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,005 = (990 + 5 \times 999) \times 10^{-6}$
 si bien que

$$P_A(\bar{D}) = \frac{5 \times 999}{990 + 5 \times 999} = \frac{999}{1197} = \frac{111}{133} \approx 0,83$$

EXO 22

On note + : "le test est positif" et M : "l'individu est malade"
 D'après l'énoncé, $P_+(+) = 0,99$ $P_{\bar{+}}(-) = 0,99$ $P(M) = p$



On cherche $P_+(M)$ c'est-à-dire $\frac{P(M \cap +)}{P(+)}$

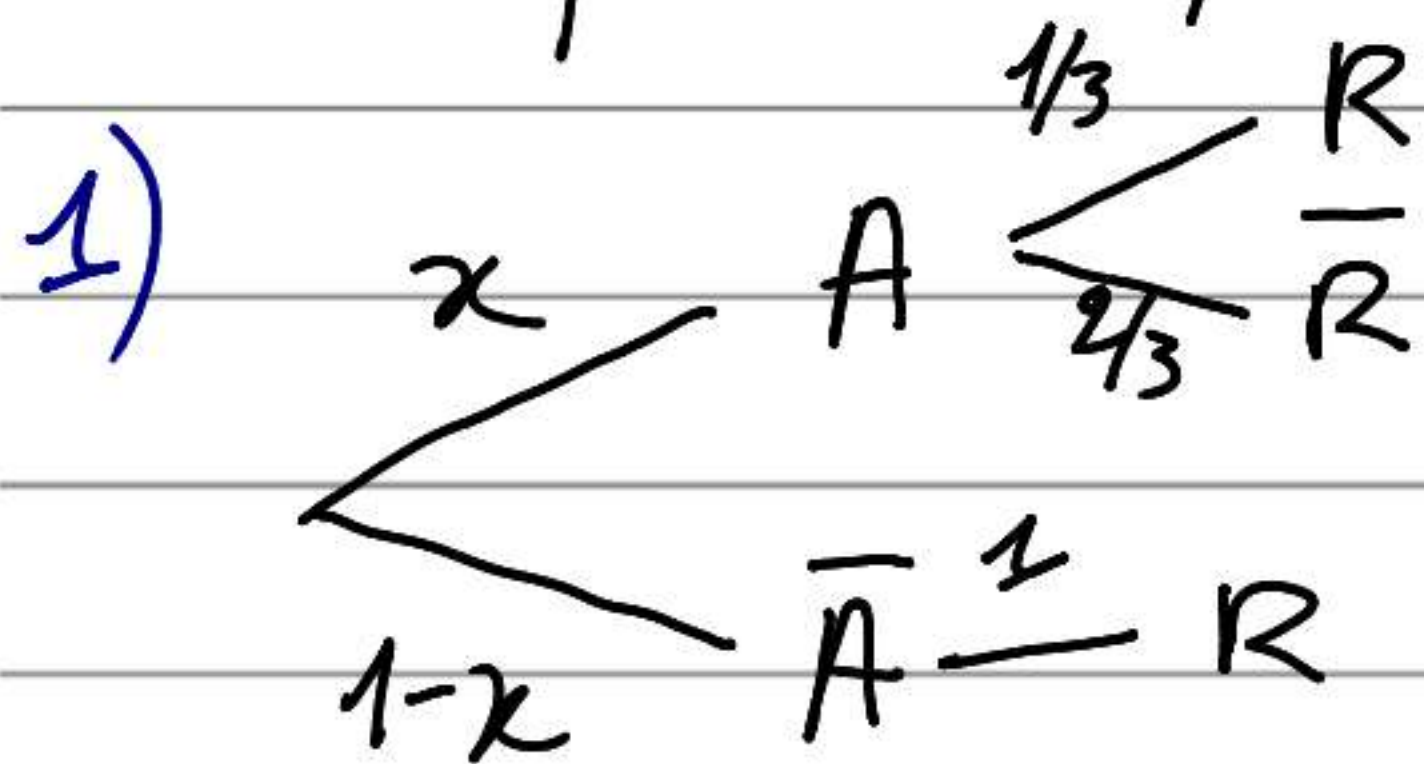
Or $P(M \cap +) = 0,99p$ d'après l'arbre et
 $P(+)=P(M \cap +)+P(\bar{M} \cap +)=0,99p+0,01(1-p)$
 $=0,01+0,98p$

d'où $P_+(M) = \frac{0,99p}{0,01+0,98p} = \frac{99p}{98p+1}$

Si $p=0,01$ par exemple, on obtient
 alors $P_+(M) = \frac{0,99}{1,98} = \frac{1}{2}$

EXO 23

D'après l'énoncé, $P_A(R) = 1$ $P_A(\bar{R}) = \frac{1}{3}$ $P(R) = \frac{4}{5}$
 Il manque $P(A)$, que l'on note x



D'après la formule des probabilités totales,
 on a $P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap \bar{A})$
 $= \frac{1}{3}x + 1-x = 1 - \frac{2x}{3}$

Or $P(R) = \frac{4}{5}$ d'où $1 - \frac{2x}{3} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$

Ainsi

$P(A) = \frac{3}{10}$

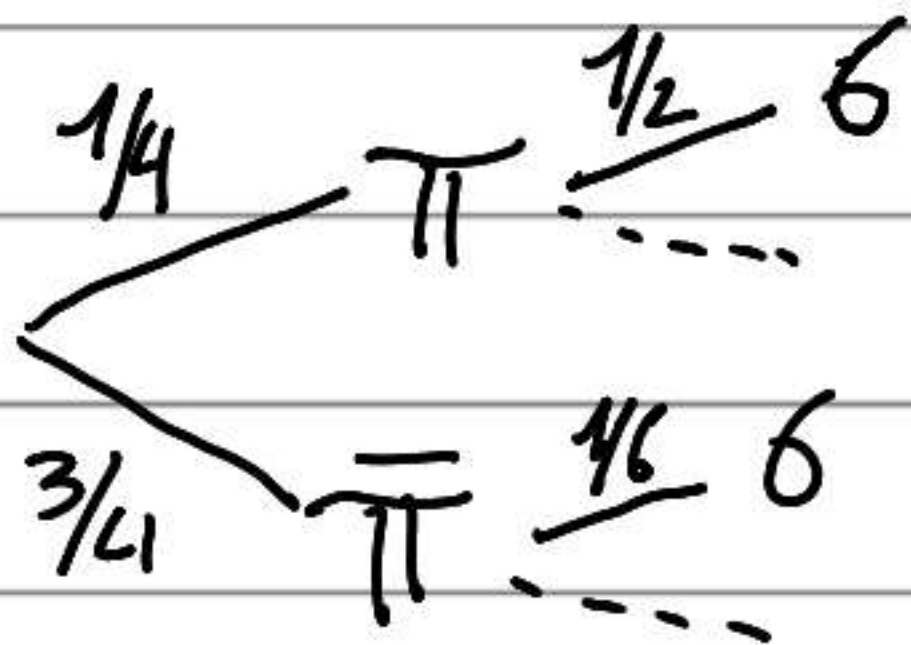
2) On cherche $P_R(A)$. Or, $P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{8}$

Ainsi

$P_R(A) = \frac{1}{8}$

EXO 24

Notons π : "le dé choisi est pipé". Le tirage des dés étant équiprobable, on a $P(\pi) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. De plus, $P_{\pi}(6) = \frac{1}{2}$



On cherche $P_6(\pi) = \frac{P(\pi \cap 6)}{P(6)}$

Or $P(\pi \cap 6) = P(\pi) P_{\pi}(6) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

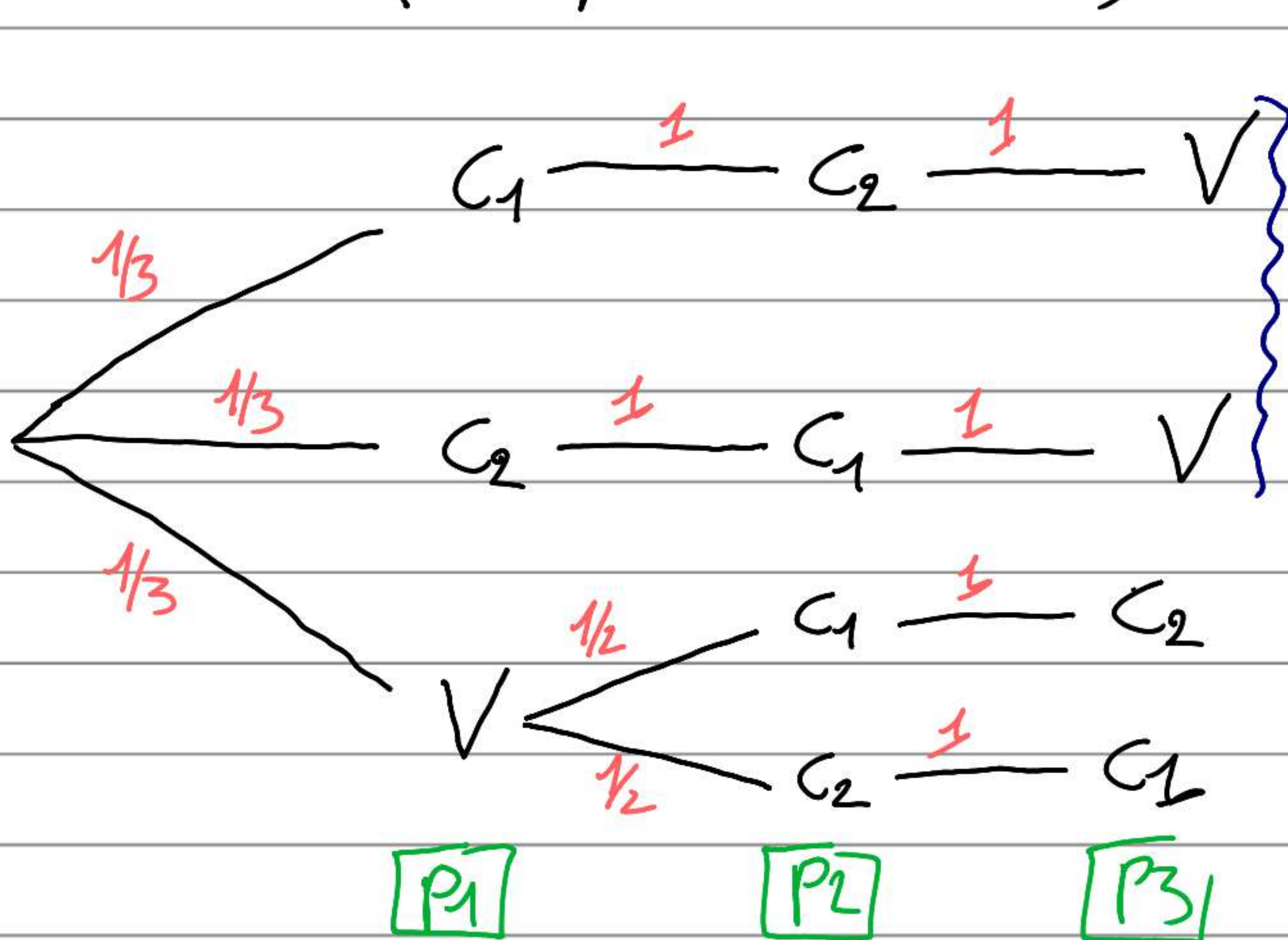
et $P(6) = P(\pi \cap 6) + P(\bar{\pi} \cap 6) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ (form. probas totales)
soit bien que

$$P_6(\pi) = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

EXO 25

Il suffit de visualiser qui, parmi C_1, C_2 et V (les deux chèvres et la voiture)
se trouve derrière

- la porte choisie par le joueur (P_1)
- la porte ouverte par l'animateur (P_2), qui choisit au hasard une chèvre parmi celles disponibles
- la porte restante (P_3)



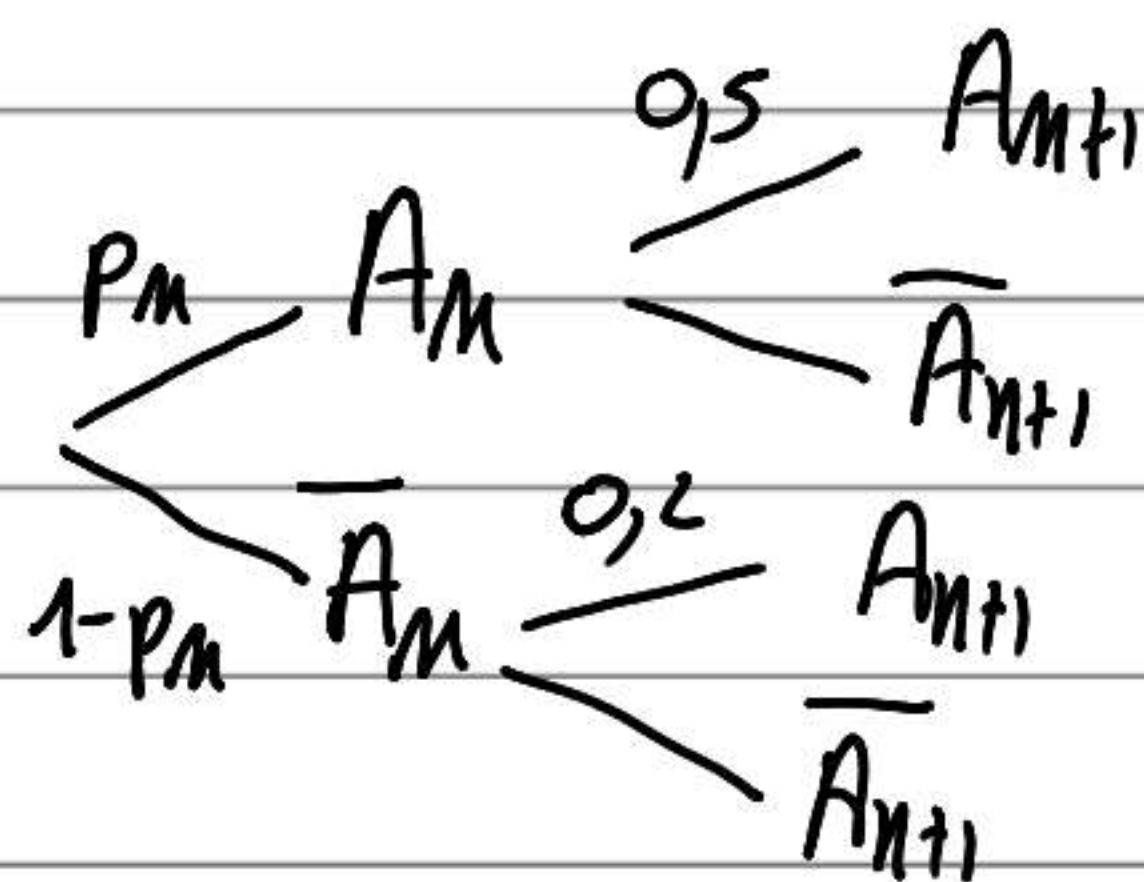
La proba que la voiture soit derrière la porte restante est donc

$$P(V) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

On tombe sur le résultat attendu !

EX026

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : "il arrête le $n^{\text{ième}}$ tir" et $p_n = P(A_n)$
D'après l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,5$ et $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = 0,2$. De plus, $p_1 = 0,3$
On a alors la situation suivante :



On déduit de la formule des probabilités totales
que
soit
$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\bar{A}_n \cap A_{n+1})$$
$$p_{n+1} = p_n \times 0,5 + (1-p_n) \times 0,2$$
$$= 0,5 p_n + 0,2 - 0,2 p_n$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n+1} = 0,2 + 0,3 p_n$$

- 2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 0,2 + 0,3x \Leftrightarrow 0,7x = 0,2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} = \alpha$
Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} p_{n+1} = 0,2 + 0,3 p_n \\ \alpha = 0,2 + 0,3 \alpha \end{cases} \Rightarrow p_{n+1} - \alpha = 0,3(p_n - \alpha)$$

Pour alors $U_n = p_n - \alpha$: la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique
de raison 0,3 et de premier terme $U_1 = p_1 - \alpha = 0,3 - \frac{2}{7} = \frac{3}{10} - \frac{2}{7} = \frac{21-20}{70} = \frac{1}{70}$
si bien que

$$U_n = (0,3)^{n-1} U_1 = \frac{1}{70} \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = U_n + \alpha = \frac{1}{70} \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} + \frac{2}{7}$$

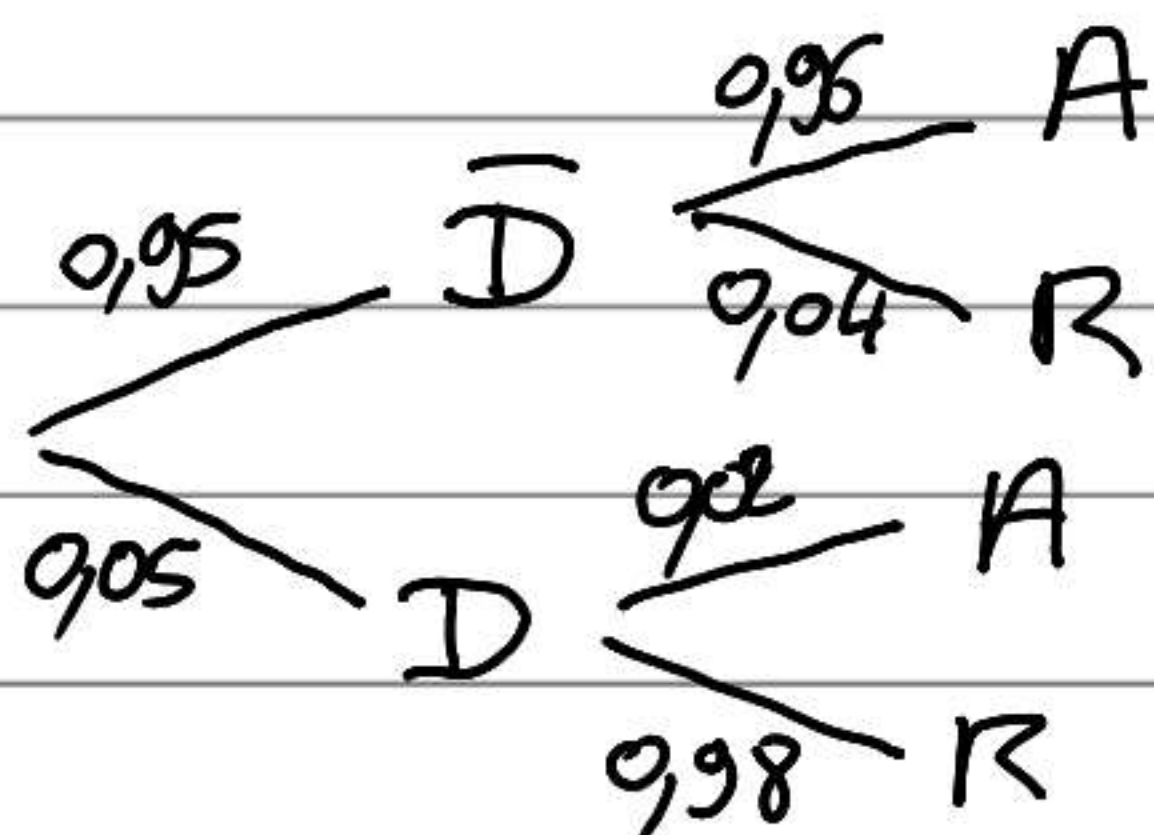
- 3) Il en découle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{7}$

Ceci signifie que lorsque la séquence de tir se prolonge, le gardien
arrête en moyenne 2 tirs sur 7.

EX0 27

On va noter D : "la pièce est défectueuse"
 A : "elle est acceptée lors du contrôle"
 R : "elle est refusée"

Voici la traduction de l'énoncé:



- 1) On cherche la probabilité de l'événement $(\bar{D} \cap R) \cup (D \cap A)$
C'est une union d'événements incompatibles, donc elle vaut

$$P(\text{Erreur}) = P(\bar{D} \cap R) + P(D \cap A) = 0,95 \times 0,04 + 0,05 \times 0,02 \\ = 0,38 + 0,001 = 0,381$$

Ainsi $P(\text{Erreur}) = 0,381$

- 2) On cherche la probabilité $P_A(D) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)}$

Or $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,05 \times 0,02 = 0,001$

et $P(A) = P(D \cap A) + P(\bar{D} \cap A)$
 $= 0,001 + 0,95 \times 0,96$
 $= 0,001 + 0,912$
 $= 0,913$

donc $P_A(D) = \frac{0,001}{0,913} = \frac{1}{913}$

C'est très faible !

EXO 28

Le devoir a lieu (oh oui!) si aucun des événements mentionnés dans l'énoncé n'a lieu. Par indépendance de ces événements (on fait cette hypothèse) la probabilité de cette intersection est le produit des 3 probabilités, soit

$$P = \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} \times \frac{14}{15} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 14}{5 \times 2 \times 5 \times 3 \times 5} = \frac{84}{125} = 0,672$$

EXO 29

Comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

En outre, $A \subset B$ implique que $A \cap B = A$

De ce fait,

$$P(A) = P(A) \times P(B) \quad \text{soit} \quad P(A) \times (1 - P(B)) = 0$$

Il en découle que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 1$

EXO 30

A et B sont deux événements indépendants de probabilités respectives $P(A) = 4/5$ et $P(B) = 7/8$

1) On cherche $P(A \cap B)$. Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{7}{10}$

2) On cherche $P(A \cap \bar{B})$. Par indépendance, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$

3) On cherche $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. Par indépendance, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40}$

4) On cherche $P(A \cup B)$. Or, $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$ donc $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{39}{40}$

5) On cherche $P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}$ soit $P(\text{marche}) = \frac{11}{40}$

EXO 31

À chaque lancer, on est en situation d'équiprobabilité (avec 6 issues possibles) et les lancers sont indépendants les uns des autres

1) Notons A : "on obtient au moins un 6"

Alors $\bar{A}$: "on n'obtient que des numéros de 1 à 5"

À chaque lancer, la probabilité de n'obtenir que des n° de 1 à 5 est $5/6$ d'où $P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ par indépendance. On en déduit ainsi que

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,518$$

2) Notons B : "on obtient au moins un double 6"

Alors $\bar{B}$: "on obtient aucun double 6"

À chaque lancer, la probabilité d'obtenir un double 6 est $1/36$, si bien que $P(\bar{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ par indépendance. On en déduit ainsi que

$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0,491$$

3) Il y a plus de chance d'obtenir un 6 en lançant un dé 4 fois que d'obtenir un double 6 en lançant deux dés 24 fois

EXO 32

Notons $m \in \mathbb{N}^*$ le nombre de tirs effectués par le joueur.

Soit A : "il atteint la cible au moins une fois"

Alors $\bar{A}$: "il rate la cible à chaque fois". Les m tirs étant indépendants,

on en déduit que $P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{5}\right)^m$ soit $P(A) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^m$

On veut que $P(A) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^m \geq 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^m \leq \frac{1}{1000}$

$$\Leftrightarrow 5^m \geq 1000 \Leftrightarrow m \geq 5 \quad (5^4 = 625 \text{ et } 5^5 = 3125)$$

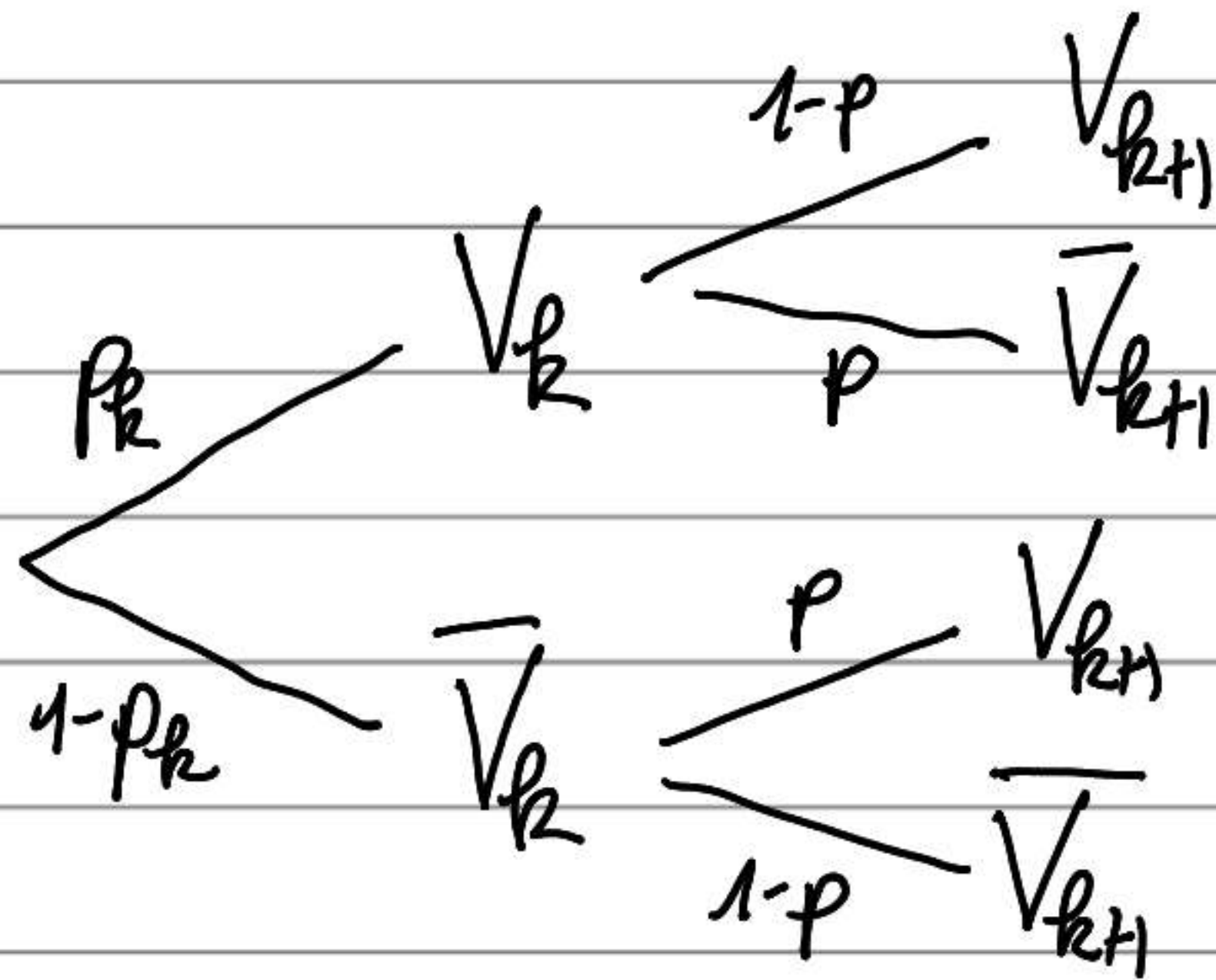
Il faut au moins 5 tirs

EXO 33

- 1) Si l'information initiale d'est vraie, la probabilité qu'elle soit encore vraie après transmission par un habitant est égale à la probabilité que celui-ci dise la vérité, soit $1-p$. Ainsi

$$P_1 = 1-p$$

Considérons maintenant la transmission de l'information par la $k^{\text{ème}}$ personne.



Lors de cette transmission, l'information est
 * préservée avec une probabilité $1-p$
 * modifiée avec une probabilité p

On déduit alors de la formule des probas totales que

$$P(V_{k+1}) = (1-p)P_k + p(1-P_k)$$

$$= P_k - pP_k + p - pP_k$$

$$= p + P_k - (2p)P_k$$

Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P_{k+1} = p + (1-2p)P_k$$

- 2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = p + (1-2p)x \Leftrightarrow p - 2px = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$
 Et ce fait, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$P_{k+1} = p + (1-2p)P_k$$

$$\ominus \quad 1/2 = p + (1-2p)1/2$$

$$P_{k+1} - 1/2 = (1-2p)(P_k - 1/2)$$

Notons $u_k = P_k - 1/2$: alors $u_{k+1} = (1-2p)u_k$ donc (u_k) est géométrique.

Par ailleurs, $\mu_1 = p_1 - \frac{1}{2} = 1 - p - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - p$

Il en découle que

$$\mu_k = (1-2p)^{k-1} \mu_1 = (1-2p)^{k-1} \left(\frac{1}{2} - p\right)$$

si bien que

$$p_k = \mu_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-2p)^{k-1} \left(\frac{1}{2} - p\right)$$

3) • Si $p=0$, on a $p_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

C'est normal : si $p=0$, personne ne ment jamais donc l'information initialement vraie est vraie à chaque étape

• Si $p=1$, on a
$$p_k = \frac{1}{2} (1 - (-1)^{k-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

C'est logique : si $p=1$, tout le monde ment à chaque fois donc la véracité de l'info dépend de la parité du nombre de transmission

• Si $0 < p < 1$, alors $0 > 1-2p > -1$ donc $1 > 1-2p > -1$
De ce fait $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1-2p)^{k-1} = 0$ d'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = \frac{1}{2}$$

Quand l'information est transmise par un grand nombre d'habitants, la probabilité qu'elle soit vraie est proche de $\frac{1}{2}$

EXO 34

1)

Pour que le joueur X remporte le tournoi, il faut :

- soit qu'il remporte les deux premières parties (événement V_1)
- soit qu'il perde la première partie et remporte les deux suivantes (V_2)

Dans le cas de l'événement V_1 , on se contrefiche du résultat de la 3^{ème} partie... mais il est essentiel de commencer l'événement V_2 par une défaite, afin que V_1 et V_2 soient bien incompatibles

(a) Par indépendance des parties, on a dans cette configuration

$$P(V_1) = ab \quad \text{et} \quad P(V_2) = (1-a)ba$$

donc la probabilité que X remporte le tournoi est

$$P(V) = P(V_1) + P(V_2) = \boxed{(2-a)ab}$$

(b) Cette fois, $P(V_1) = ba$ et $P(V_2) = (1-b)ab$ donc $\boxed{P(V) = (2-b)ab}$

2) Par hypothèse, $b > a$ donc $-b < -a$ soit $2-b < 2-a$

d'où, comme $ab > 0$, $(2-b)ab < (2-a)ab$

Ainsi, X a plus de chances de l'emporter dans la 1^{ère} configuration

De prime abord, on aurait pu penser qu'il valait mieux rencontrer plus souvent le joueur A, qu'il a plus de chances de battre. Mais comme il faut gagner 2 parties consécutives, il vaut mieux que la partie centrale (la 2^{ème}) ait lieu contre le joueur qu'il a le plus de chances de battre, A.

Ceci explique pourquoi la configuration B-A-B est plus favorable que A-B-A

EXO 35

1) Notons X le nombre de raquettes encore attachées à l'arrivée

- $X=0$: toutes les raquettes se sont détachées
Par indépendance des fixations $P(X=0) = p^4$
- $X=1$: {l'une des 4 raquettes reste attachée $\leadsto$ 4 possibilités
les trois autres se détachent

De ce fait, $P(X=1) = 4(1-p)p^3 = 4p^3 - 4p^4$

Ainsi, $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 4p^3 - 3p^4 = P$

2) Notons de même Y le nombre de raquettes encore attachées à l'arrivée
Par indépendance des fixations, $P(Y=0) = p^2 = Q$

3) On vient de calculer la probabilité que l'éléphant s'enlève dans chaque cas.

De plus, $P \geq Q \Leftrightarrow Q - P \leq 0 \Leftrightarrow 3p^4 - 4p^3 + p^2 \leq 0$
 $\Leftrightarrow (3p^2 - 4p + 1)p^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3p^2 - 4p + 1 \leq 0$

Or $3p^2 - 4p + 1$ a pour racines $\frac{1}{3}$ et 1 , donc

$$3p^2 - 4p + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq p \leq 1$$

Ainsi

- si $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$, on a $P \leq Q$ donc il vaut mieux sauter équipé de 4 raquettes.

- si $\frac{1}{3} \leq p \leq 1$, on a $P \geq Q$ donc il vaut mieux sauter équipé de 2 raquettes.

EXO 36

1) On a ici une situation d'équiprobabilité dans un univers de cardinal 12
A contient 6 issues cf. $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$
De ce fait, $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

B contient 4 issues car $B = \{3; 6; 9; 12\}$ si bien que $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Enfin $A \cap B = \{6; 12\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Comme $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors A et B sont indépendants

2) On est toujours en situation d'équiprobabilité mais le cardinal devient 13
La boule 13 ne portant ni n° ni pair, ni multiple de 3, les événements
A, B et $A \cap B$ ne changent pas.

On en déduit que $P(A) = \frac{6}{13}$, $P(B) = \frac{4}{13}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$

Or $P(A) \times P(B) = \frac{24}{13^2} = \frac{2}{13} \times \frac{12}{13} \neq P(A \cap B)$

et ainsi, les événements A et B ne sont pas indépendants

EXO 37

Il faut bien comprendre que la partie se serait arrêtée au plus tard au 5^e lancer
puisque alors, on a au moins 3 "Pile" ou 3 "Face". On peut aussi toujours considérer
que l'on effectue 5 lancers et que A gagne uniquement s'il y a au moins 3 "Pile"

1) Il y a 16 issues, qui sont des 4 listes de "Pile" et "Face"
Le joueur A l'emporte s'il y a au moins 2 fois "Pile"

- 4 "Pile" $\rightarrow$ 1 seule issue P-P-P-P
- $\left. \begin{array}{l} 3 \text{ "Pile"} \\ 1 \text{ "Face"} \end{array} \right\} \rightarrow \binom{4}{1} = 4$ issues différentes (placement de "Face")
- $\left. \begin{array}{l} 2 \text{ "Pile"} \\ 2 \text{ "Face"} \end{array} \right\} \rightarrow \binom{4}{2} = 6$ issues différentes (placement des deux "Face")

Ainsi 11 des 16 issues conduisent à la victoire de A
 Comme on peut supposer que la pièce est équilibrée, on est en situation d'équiprobabilité si bien que

$$P(A \text{ gagne}) = \frac{11}{16} \quad \text{et} \quad P(B \text{ gagne}) = \frac{5}{16}$$

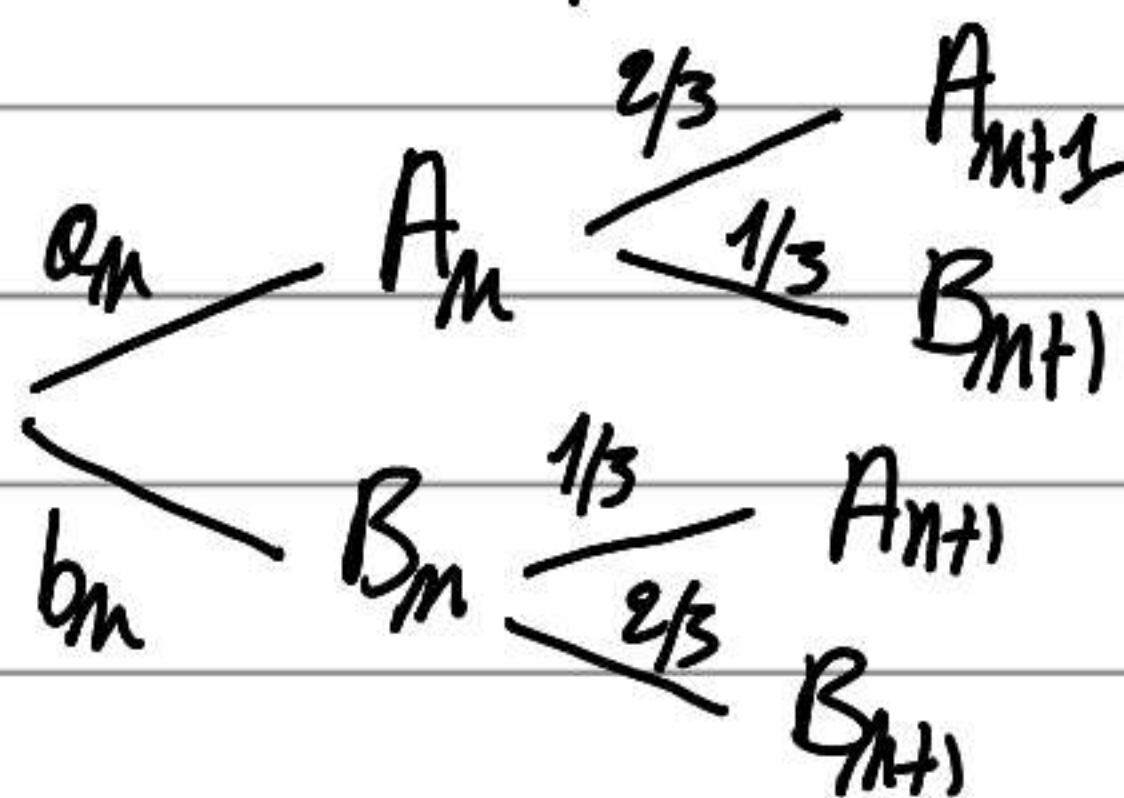
2) On répartit le montant proportionnellement aux probabilités de victoire:

$$64 \times \frac{11}{16} = 44 \text{ pour A} \quad \text{et} \quad 64 \times \frac{5}{16} = 20 \text{ pour B}$$

EXO 38

1) Comme Clovis est en A à l'instant initial, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$
 On peut aussi noter que $B_n = \bar{A}_n$ d'où $b_n = 1 - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

• Après chaque couplet, Clovis change de maison avec une proba de $1/3$
 d'où l'autre de probabilité suivant:



On déduit de la formule des probabilités totales
 que
 et
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2) Comme $b_n = 1 - a_n$ et $b_{n+1} = 1 - a_{n+1}$, on en déduit que

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}$$

On retrouve une suite arithmétique géométrique! Allons-y gaiement:

$$* \quad x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$* \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(a_n - \frac{1}{2})$$

La suite de même général $u_n = a_n - \frac{1}{2}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. De ce fait, $u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $a_n = \frac{1}{2} + u_n$
soit

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

d'où

$$b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3) $P_{A_i}(A_j)$: probabilité qu'il soit en A après j couplets sachant qu'il est en A après i couplets.

Autrement dit, on cherche la probabilité que, partant de A à un instant donné, il soit encore A après j-i couplets: c'est tout simplement $P(A_{j-i})$

Ainsi

$$P_{A_i}(A_j) = P(A_{j-i}) \text{ pour } i < j$$

Or A_i et A_j sont indépendants si, et seulement si, $P_{A_i}(A_j) = P(A_j)$

c'est-à-dire si $P(A_{j-i}) = P(A_j)$

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, cette égalité n'est vérifiée que si $i = 0$. De ce fait,

$$A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants si } i = 0$$

CHAPITRE 26

Exercices 1 à 20

EXO 1

On choisit deux réponses au hasard parmi les quatre possibles : il y a de ce fait $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ issues équiprobables. Notons X le nombre de points obtenus.

• 2 Bonnes réponses

On a choisi 2 bonnes réponses parmi les 2, soit $\binom{2}{2} = 1$ issue.

Dans ce cas, $X = 1 + 1 = 2$

1 Bonne réponse

On a choisi 1 bonne réponse parmi les 2 et 1 mauvaise réponse parmi les 2. Cela nous donne $\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 4$ issues. Dans ce cas, $X = 1 - 0,75 = 0,25$

0 Bonne réponse

On a choisi 2 mauvaises réponses parmi les 2, soit $\binom{2}{2} = 1$ issue.

Dans ce cas, $X = -0,75 - 0,75 = -1,5$

Voici la loi de X :

a	2	0,25	-1,5
$P(X=a)$	1/6	4/6	1/6

$$\text{On a alors } E(X) = \frac{1}{6} (2 + 4 \times 0,25 - 1,5) = \frac{1,5}{6} = \frac{1}{4}$$

Ceci ne concerne qu'une seule des 10 questions. Pour le QCM complet, on obtient par linéarité de l'espérance une espérance totale de $10 \times \frac{1}{4} = 2,5$

Ainsi, en répondant au hasard, on peut espérer au mieux une note moyenne de $2,5/20$!
PAS TERRIBLE $\Rightarrow$ NE PAS RÉPONDRE AU HASARD !

EX02

Notons X le gain algébrique réalisé. Voici sa loi :

a	-1	2	3	-4	5	-6
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

En effet, on est en situation d'équiprobabilité en partant du principe que le dé est équilibré

L'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{6}(-1+2+3-4+5-6) = -\frac{1}{6} < 0$

Il ne faut surtout pas jouer!

EX03

Le plus simple est de visualiser les valeurs de X à l'aide d'un tableau à double entrée qui recense les 36 issues équiprobables :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Et voilà le travail. Splendide!
Il ne reste plus qu'à compter les occurrences de chaque valeur de X pour déduire sa loi

a	1	2	3	4	5	6
$P(X=a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$E(X) = \frac{1}{36}(1+6+15+28+45+66) = \frac{161}{36} \approx 4,5$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{36}(1+12+45+112+225+396) - \frac{161^2}{36^2} = \text{un nombre!}$$

EXO 4

- 1) On peut décrire les issues de notre expérience sous la forme de listes (a, b, c, d) avec
- a : le numéro de la lettre dans l'enveloppe n°1
 - b : — — — — — n°2
 - c : — — — — — n°3
 - d : — — — — — n°4

Il s'agit des 4-listes d'éléments distincts de $\{1, 2, 3, 4\}$, donc des PERMUTATIONS de cet ensemble. Il y a ainsi $4! = 24$

Les lettres étant réparties au hasard, on peut de plus supposer que ces issues sont équiprobables. Ainsi notre univers Ω est constitué de 24 issues équiprobables.

- 2) A priori $X(\omega) \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$. Recensons les issues correspondant aux différents cas.

$X=4$ c'est l'issue $(1, 2, 3, 4)$... donc $P(X=4) = 1/24$

$X=3$ Si 3 des lettres sont dans leurs enveloppes attitrées, la dernière l'est aussi!
Cet événement n'a donc jamais lieu.

$X=2$

- choisissons les deux lettres bien placées : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités
- pour les deux autres (notées A et B) : il n'y a qu'un placement possible
lettre A dans enveloppe B & lettre B dans enveloppe A

$$\text{Ainsi } P(X=2) = 6/24 = 1/4$$

$X=1$

- choix de la lettre bien placée : $\binom{4}{1} = 4$ possibilités
- pour les 3 autres, notées A, B, C dans l'ordre, il faut qu'aucune ne soit à sa place, ce qui laisse comme possibilité B, C, A et C, A, B : 2 choix

Ainsi $P(X=1) = 8/24 = 1/3$

$X=0$ On déduit de ce qui précède que $P(X=0) = 1 - \frac{1}{24} - \frac{6}{24} - \frac{8}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

Voici donc la loi de la variable X :

a	0	1	2	4
$P(X=a)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$

$$\text{et } E(X) = \frac{8 + 2 \times 6 + 4}{24} = 1$$

$$\text{soit } \boxed{E(X) = 1}$$

EX05

1) $X(\omega) = \{-1; 1\}$ | si on gagne, le gain est de 1 €
 | si on perd, on perd la mise de 1 € donc le gain est -1 €

Par équiprobabilité des 37 issues, $P(X=1) = \frac{18}{37}$ et $P(X=-1) = \frac{19}{37}$

a	-1	1
$P(X=a)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$$E(X) = \frac{18 - 19}{37} = -\frac{1}{37} < 0$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \text{ avec } E(X^2) = \frac{1 \times 19 + 1 \times 18}{37} = 1$$

$$= 1 - \frac{1}{37^2} \approx 1$$

2) Cette fois, $X(\omega) = \{-1; 35\}$ et $P(X=35) = \frac{1}{37}$ par équiprobabilité

a	-1	35
$P(X=a)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$E(X) = \frac{35 \times 1 - 1 \times 36}{37} = -\frac{1}{37} < 0$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \text{ avec } E(X^2) = \frac{36 + 35^2}{37}$$

$$= \frac{36 + 35^2}{37} - \frac{1}{37^2} > 30$$

Les espérances sont identiques et négatives : même gain moyen, jeux défavorables
 Par contre, la variance du 2^d jeu est supérieure : le risque que le gain moyen
 s'écarte de l'espérance est plus fort ; on peut gagner ou perdre beaucoup, le
 frisson est intense !

EXO 6

Notons X_1, X_2, X_3 les numéros donnés par les trois dés.

- $X_1(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et $P(X_1=i) = 1/6$ pour tout $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$

AINSI
$$E(X_1) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

- Il en va de même pour X_2 et X_3

- De ce fait, la valeur moyenne de la somme des points obtenus est

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 7/2 = \frac{21}{2}$$

EXO 7

- Les issues de notre expérience sont des 4-lettres de $\{P; F\}$: il y en a $2^4 = 16$.
La pièce étant équilibrée, ces 16 issues sont équiprobables.

- $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ (avec 4 lancers, on obtient au plus 2 séquences Pile-Face)

$X=2$ c'est l'issue PFPF donc $P(X=2) = 1/16$

$X=1$ on place la séquence aux différentes positions possibles et on complète avec des P et des F

- PFPF, PFFP, PFFF,
- PPFP, PPFF, FPFP, FPFF
- PPFF, FPPF, FFPP

Ainsi $P(X=1) = 10/16$

$X=0$ Fatalement $P(X=0) = 5/16$... on retrouve cela en notant que l'absence de séquence PF signifie qu'un P est forcément suivi d'un autre P

- PPPP, FPPP, FFPP, FFFP, FFFF

On retrouve bien $P(X=0) = 5/16$

a	0	1	2
$P(X=a)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$E(X) = \frac{1 \times 10 + 2 \times 1}{16} = \frac{12}{16} \text{ soit } \boxed{E(X) = \frac{3}{4}}$$

EX08

Les issues étant des N -liées de $[1; n]$, il y en a $\text{card}(\Omega) = n^N$ cf. tirages avec ordre et remise. De plus, ces issues sont équiprobables puisque les tirages sont effectués au hasard.

1). $X \leq k$ signifie que tous les numéros tirés sont dans $[1; k]$.
De ce fait, l'événement $X \leq k$ est l'ensemble des N -liées de $[1; k]$ si bien que $\text{card}(X \leq k) = k^N$ et

$$\boxed{P(X \leq k) = \frac{k^N}{n^N} = \left(\frac{k}{n}\right)^N}$$

• Comme $X(\Omega) = [1; n]$, alors $P(X=1) = P(X \leq 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^N$

• Pour $k \in [2; n]$, on a $(X \leq k) = (X \leq k-1) \cup (X=k)$ événements incompatibles

$$\text{donc soit } P(X \leq k) = P(X \leq k-1) + P(X=k)$$

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N$$

Cette relation est valable pour $k=1$, si bien que

$$\boxed{\forall k \in [1; n] \quad P(X=k) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N}$$

2) Comme $X(\Omega) = [1; n]$, alors $E(X) = \sum_{k=1}^n k P(X=k)$

$$= \sum_{k=1}^n \left[k \left(\frac{k}{n}\right)^N - k \left(\frac{k-1}{n}\right)^N \right]$$

On en déduit par linéarité de la somme que

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^N - \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k-1}{n}\right)^N \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^N - \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \left(\frac{l}{n}\right)^N \quad \text{car } l=k-1 \\
 &= n \left(\frac{n}{n}\right)^N + \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{k}{n}\right)^N - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \left(\frac{k}{n}\right)^N \quad \text{car } k=l \\
 &= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^N
 \end{aligned}$$

d'où
$$E(X) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^N$$

Ainsi
$$\frac{1}{n} E(X) = 1 - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^N}_{\text{somme de Riemann associée à } f: x \mapsto x^N \text{ sur } [0,1]}$$

qui converge vers $\int_0^1 x^N dx = \left[\frac{x^{N+1}}{N+1} \right]_0^1 = \frac{1}{N+1}$

d'où
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}$$

3) À n fixé, on a $\left|\frac{k}{n}\right| < 1$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^N = 0$ pour tout $k \in [0, n-1]$

d'où
$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X) = n$$
 En répétant indéfiniment les tirages, on finit par tomber sur le jeton numéro n !

EXO 9

Il suffit de représenter toutes les sommes possibles à l'aide d'un tableau à double entrée

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Comme les dés sont équilibrés, les différentes issues sont équiprobables.
De ce fait

$$X(\omega) = [1; 12] \quad \text{et} \quad P(X=i) = 1/12 \quad \forall i \in [1, 12]$$

EXO 10

1) On peut a priori obtenir n'importe quel membre de "Face" avant d'obtenir le premier "Pile" donc

$$X(\omega) = \mathbb{N}^*$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(X=k)$ signifie que l'on a obtenu $k-1$ fois "Face" et 1 fois "Pile".
Par indépendance mutuelle des lancers, on a ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = 0,3 \times (0,7)^{k-1}$$

2) L'espérance de X est alors $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k) = 0,3 \sum_{k=1}^{\infty} k (0,7)^{k-1}$

IDÉE Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$, posons $f_N(x) = \sum_{k=1}^N k x^{k-1}$: c'est la dérivée

$$\text{de } F_N(x) = \sum_{k=1}^N x^k = x \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{x - x^{N+1}}{1-x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi } f_N(x) &= \left(\frac{x - x^{N+1}}{1-x} \right)' = \frac{(1 - (N+1)x^N)(1-x) - (x - x^{N+1})(-1)}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{1 - x - (N+1)x^N + (N+1)x^{N+1} + x - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

Or, pour $0 < x < 1$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1)x^N = 0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} Nx^{N+1}$

par croissances comparées, si bien que $\lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Enfin, $E(X) = 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} k (0,7)^{k-1} = 0,3 \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(0,7)$

$$= 0,3 \times \frac{1}{0,3^2}$$

$$= \frac{1}{0,3} \quad \swarrow \text{probab d'obtenir "Pile"}$$

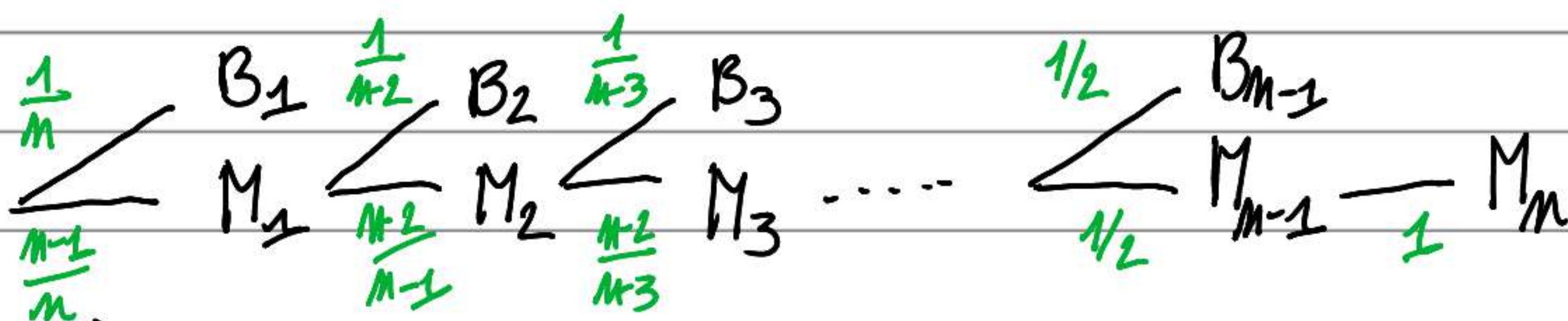
soit $\boxed{E(X) = \frac{10}{3}}$

Il faut en moyenne $\frac{10}{3}$ lancers avant de voir sortir le premier "Pile"

EXO 11

1) Voici un arbre correspondant à la situation

B_i / M_i : bonne clef / mauvaise clef à l'essai numéro i



À chaque tentative, le nombre de clefs baisse... et il n'y a qu'une seule clef

On observe que $P(X=1) = P(B_1) = \frac{1}{n}$

$$P(X=2) = P(M_1 \cap B_2) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

$$P(X=3) = P(M_1 \cap M_2 \cap B_3) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

$\vdots$

$$P(X=n) = P(M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_{n-1} \cap B_n) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{n}$$

si bien que $X(\omega) \in [1, n]$ et $P(X=i) = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in [1, n]$

C'est assez logique : la bonne clef a autant de chance de sortir à chaque tentative. C'est comme si on mélangeait les clefs dans un ordre donné avant de les tester les unes après les autres : la bonne clef peut se trouver dans n'importe quelle position avec la même probabilité.

$$\text{On a alors } E(X) = \sum_{i=1}^n i \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} \text{ soit } E(X) = \frac{n+1}{2}$$

C'est la moyenne des valeurs extrêmes.

2) On retrouve la situation de l'exercice 10 : à chaque essai, la probabilité d'obtenir la bonne clef est $1/n$ et celle d'obtenir une mauvaise clef est $\frac{n-1}{n}$. On peut de plus tirer indéfiniment une mauvaise clef avant de tomber sur la bonne, si bien que $X(\omega) \in \mathbb{N}^*$

De plus $(X=k)$ signifie que l'on tire $k-1$ fois une mauvaise clef puis la bonne. Par indépendance mutuelle des tirages,

$$P(X=k) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Des calculs similaires à ceux de l'exo 10 vont alors permettre de voir que

$$E(X) = 1 \div \frac{1}{n} = n$$

EN EFFET dans les deux cas, on a une expérience de la forme

$$E(X) = p \sum_{k=1}^N k (1-p)^{k-1} = p \lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^N k (1-p)^{k-1}}_{f_N(1-p)}$$

OR $\lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $0 < x < 1$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(1-p) = \frac{1}{p^2}$ et $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

EXO 12

1) Pour $i \in [1, n]$ on pose $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'objet } i \text{ est dans } B_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Les objets étant placés au hasard dans les n boîtes, on a $P(Y_i = 1) = 1/n$ et ainsi $E(Y_i) = 1/n$ (Variable aléatoire de Bernoulli)

• $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ est une somme d'entiers valant 0 ou 1 : c'est ainsi le nombre de termes égaux à 1, donc le nombre d'objets contenus dans B_1

Le nombre moyen d'objets contenus dans B_1 est donc par linéarité de l'espérance

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = n \times \frac{1}{n} \quad \text{soit} \quad \boxed{E(Y) = 1}$$

Quel scoop ! En répartissant n objets dans n boîtes, on en a en moyenne un par boîte...

2) (a) De la même manière, $X = X_1 + \dots + X_n$ représente le nombre de boîtes vides.

LES VARIABLES X_i ET Y_i SONT EN FAIT DES VARIABLES INDICATRICES

- (b) Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. La boîte B_i est vide si les m objets sont hors de B_i .
- Pour un objet donné, la probabilité qu'il soit hors de B_i est $\frac{n-1}{n}$
 - Par indépendance mutuelle des placements, on a $P(X_i=1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$

Comme $X_i(\omega) \in \{0, 1\}$, X_i est une variable de Bernoulli

ω	0	1
$P(X_i=\omega)$	$1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^m$

et $E(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$

- (c) Par linéarité de l'espérance, $E(X) = n \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$ est le nombre moyen de boîtes vides à l'issue du rangement. Ainsi

$$\mu_n = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

N.B. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = \exp\left(m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ et $\ln(1+u) \sim u$ donc $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$ $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$ soit enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = e^{-1} = \frac{1}{e}$ par continuité de exp

Ainsi $\mu_n \sim \frac{n}{e}$

Exo 13

Considérons à part les deux conjoints du couple i

- Les m déces correspondent à un choix sans ordre ni remise de m personnes parmi les $2n$ présentes : il y a $\binom{2n}{m}$ possibilités équiprobables

- Le couple i survit si les déces ont lieu parmi les $2n-2$ autres personnes, ce qui fait cette fois $\binom{2n-2}{m}$ possibilités

Ainsi,
$$P(C_i) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = \frac{\frac{(2n-2)!}{m!(2n-2-m)!}}{\frac{2n!}{m!(2n-m)!}} = \frac{(2n-2)! (2n-m)!}{(2n)! (2n-2-m)!} = \frac{(2n-m)(2n-m-1)}{(2n)(2n-1)}$$

La variable indicatrice 1_{C_i} vaut 1 si C_i a lieu et 0 sinon

a	0	1
$P(1_{C_i}=a)$	$1-P(C_i)$	$P(C_i)$

$$E(1_{C_i}) = P(C_i) = \frac{(2n-m)(2n-m-1)}{(2n)(2n-1)}$$

Le nombre de couples qui survivent est $N = \sum_{i=1}^m 1_{C_i}$ (cf. raisonnements de l'exo 12)
En moyenne, il y en a

$$E(N) = \sum_{i=1}^m E(1_{C_i}) = \frac{(2n-m)(2n-m-1)}{2(2n-1)}$$

EXO 14

1) On a $X(\omega) = [1; m]$ et $P(X=k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in [1; m]$
puisque l'on choisit une des boîtes au hasard.
De ce fait

$$E(X) = \sum_{k=1}^m \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

2) Là, tout dépend du numéro de la boîte d'abord choisie : il faut donc calculer la loi de Y conditionnée par X pour commencer.

• Soit $k \in [1; m]$: si $X=k$, on tire une boule au hasard parmi k boules numérotées de 1 à k , donc

$$P_{(X=k)}(Y=l) = \frac{1}{k} \text{ pour tout } l \in [1; k]$$

• Déterminons maintenant la loi de Y . On peut déjà noter que $Y(\omega) \in [1; m]$ cf. cas où $X=m$. Ensuite, pour tout $l \in [1; m]$, on a d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(Y=l) &= \sum_{k=1}^m P(X=k) P_{X=k}(Y=l) \\ &= \sum_{k=l}^m P(X=k) P_{X=k}(Y=l) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } P(Y=l) = \sum_{k=l}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} \text{ pour } l \in [1; n]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{l=1}^n l P(Y=l) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=l}^n \frac{l}{kn} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} \frac{l}{k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \frac{l}{k} \quad (\text{propriétés des sommes triangulaires}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{l=1}^k l \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (k+1) = \frac{1}{2n} \times \frac{n(n+3)}{2} \end{aligned}$$

soit $E(Y) = \frac{n+3}{4}$

3) Évidemment pas, puisque on a forcément $Y \leq X$: ainsi $P(X=1 \cap Y=2) = 0$
Or $P(X=1) \neq 0$ et $P(Y=2) \neq 0$ donc $P(X=1 \cap Y=2) \neq P(X=1)P(Y=2)$
Ainsi

X et Y ne sont pas indépendantes

EXO 15

Notons X le nombre de "Pile" obtenus. Comme on répète 20 fois et de manière indépendante (la pièce n'a pas de mémoire !) une épreuve de Bernoulli de paramètre $1/2$ (la pièce est équilibrée), le nombre de succès X suit la loi binomiale $B(20, 1/2)$. On gagne au jeu proposé lorsque $X = 9, 10$ ou 11 donc

$$\begin{aligned} P(\text{gagner}) &= P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \left[\binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{11} \right] \approx 0,497 \end{aligned}$$

Ainsi, ce jeu est (légèrement) défavorable au joueur... donc peu intéressant.

EXO 16

Notons X le nombre d'ordinateurs qui tombent en panne. On répète 20 fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,3 donc le nombre de succès X suit la loi Binomiale $B(20, 0.3)$. Et oui!

Ainsi la probabilité recherchée est

$$P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^4 P(X=k) = \sum_{k=0}^4 \binom{20}{k} 0,3^k 0,7^{20-k} \approx 0,24$$

EXO 17

Pour éviter de distinguer tous les scores possibles, le plus simple est de considérer que l'on joue 9 points en tout... le perdant n'aura qu'en plus 4 points, si bien que le vainqueur est bien le premier arrivé à 5 points.

Notons X le nombre de points remportés par A. En considérant que les points sont indépendants les uns des autres, on a affaire à la répétition de 9 épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre 0,72. De ce fait, le nombre de succès X suit la loi binomiale $B(9, 0.72)$, et la probabilité que le joueur A l'emporte est

$$P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^9 P(X=k) = \sum_{k=5}^9 \binom{9}{k} 0,72^k 0,28^{9-k} \approx 0,92$$

Sans surprise, cette probabilité est élevée.

EXO 18

Notons $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de tirs effectués et X le nombre de fois où la cible est atteinte. En supposant que les tirs sont indépendants les uns des autres, on a une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre 0,6.

De ce fait, le nombre de tirs X suit la loi binomiale $B(n, 0.6)$
 On, on veut que

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &\geq 0.99 \\ \Leftrightarrow P(X \leq 1) &\leq 0.01 \\ \Leftrightarrow P(X=0) + P(X=1) &\leq 0.01 \end{aligned}$$

avec $P(X=0) = \binom{n}{0} 0.6^0 0.4^n = 0.4^n$ et $P(X=1) = \binom{n}{1} 0.6^1 0.4^{n-1} = 0.6n 0.4^{n-1}$
 Ainsi, on cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tq

$$0.4^n + 0.6n 0.4^{n-1} \leq 0.01$$

Il nous faut étudier les variations de $f: x \mapsto 0.4^x + 0.6x 0.4^{x-1}$ sur $[1, +\infty[$
 Comme la fonction exponentielle $x \mapsto a^x$ a pour dérivée $x \mapsto \ln(a) a^x$,
 la fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(0.4) 0.4^x + 0.6 0.4^{x-1} + 0.6x \ln(0.4) 0.4^{x-1} \\ &= 0.4^{x-1} [0.4 \ln(0.4) + 0.6 + 0.6x \ln(0.4)] \end{aligned}$$

$$\text{donc } f'(n) > 0 \Leftrightarrow 0.6x \ln(0.4) > -(0.4 \ln(0.4) + 0.6)$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-(0.4 \ln(0.4) + 0.6)}{0.6 \ln(0.4)} \approx 0.4$$

Ainsi $f' < 0$ et f est décroissante sur $[1, +\infty[$. La suite de terme général $u_n = 0.4^n + 0.6n 0.4^{n-1}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est strictement décroissante, et il suffit de calculer ses valeurs successives pour voir à partir de quand $u_n \leq 0.01$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	0.64	0.35	0.18	0.087	0.041	0.019	0.008

Ainsi, il faut au minimum 8 tirs pour que la probabilité d'atteindre au moins deux fois la cible dépasse 99%

EXO 19

- 1) Le mobile effectue n pas en tout, indépendants les uns des autres.
La probabilité de faire un pas à droite est à chaque fois égale à p
On retrouve alors un schéma de Bernoulli et le nombre de pas vers la droite, D_n , correspond au nombre de succès. De ce fait

$$D_n \text{ suit la loi } B(n, p)$$

- 2) Le mobile effectue D_n pas vers la droite et $n - D_n$ pas vers la gauche, donc son abscisse vaut à l'issue des n pas

$$X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$$

On en déduit que $E(X_n) = 2E(D_n) - n$ soit $E(X_n) = 2np - n$

et $V(X_n) = 4V(D_n)$ soit $V(X_n) = 4np(1-p)$

- 3) Le variable X_n est centrée lorsque $E(X_n) = 0 = n(2p - 1)$ soit $p = 1/2$

Effectivement, lorsque $p = 1/2$, le mobile va effectuer en moyenne autant de pas vers la gauche que vers la droite, donc il reste au niveau de l'origine !

EXO 20

1) Les moteurs fonctionnent indépendamment les uns des autres et avec la même probabilité, on retrouve un schéma de Bernoulli

Ainsi

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{B}(4, p)$$

et

$$Y \text{ suit la loi } \mathcal{B}(2, p)$$

2) A arrive si $X \leq 2$ et B arrive si $Y \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 + \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3 + \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 \\ &= 1 - 4p + 6p^2 - 4p^3 + p^4 + 4p(1 - 3p + 3p^2 - p^3) + 6p^2(1 - 2p + p^2) \\ &= 1 - 4p + 6p^2 - 4p^3 + p^4 + 4p - 12p^2 + 12p^3 - 4p^4 + 6p^2 - 12p^3 + 6p^4 \\ &= 1 - 4p^3 + 3p^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } P(Y \leq 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 + \binom{2}{1} p(1-p) \\ &= 1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 \\ &= 1 - p^2 \end{aligned}$$

De ce fait, il vaut mieux monter dans l'avion A ssi $P(X \leq 2) \geq P(Y \leq 1)$
càd $1 - 4p^3 + 3p^4 \geq 1 - p^2$

$$\Leftrightarrow 3p^4 - 4p^3 + p^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(3p^2 - 4p + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p=0 \text{ ou } 3p^2 - 4p + 1 \geq 0$$

Or $3p^2 - 4p + 1$ a pour racines 1 et $1/3$

$$\text{donc } 3p^2 - 4p + 1 = 3(p-1)(p-1/3)$$

et ≥ 0 ssi $p=1$ ou $p \in [0; 1/3]$

Ainsi, il vaut mieux monter dans l'avion A ssi $p \in [0; 1/3]$ ou $p=1$

et il vaut mieux monter dans l'avion B ssi $p=0$ ou $p \in [1/3; 1]$

CHAPITRE 27

Exos 1 à 10

EXO 1

- 1) Le nombre $f(x,y) = \ln(x/y)$ est défini lorsque $y \neq 0$ et $x/y > 0$.
La deuxième condition est satisfaite ssi x et y sont non nuls et de même signe.
Ainsi

$$\mathcal{D}_f =]0, +\infty[^2 \cup]-\infty, 0[^2$$

- 2) Le nombre $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 1}$ est défini lorsque $x^2 - 2y^2 + 1 \geq 0$
soit $2y^2 \leq 1 + x^2$. Ainsi

$$\mathcal{D}_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \text{ et } -\sqrt{\frac{1+x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{1+x^2}{2}} \right\}$$

C'est la zone du plan comprise entre les courbes représentatives des fonctions
 $f_1: x \mapsto \sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$ et $f_2 = -f_1$

- 3) Le nombre $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - xy}$ est défini lorsque $x^2 + y^2 - xy \neq 0$.

$$\text{Or } x^2 + y^2 - xy = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

ne s'annule que pour $x - \frac{y}{2} = 0$ et $\frac{3}{4}y = 0$, soit $x = y = 0$. Ainsi

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

EXO 2

(a) Comme $|\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
alors $|(x+y) \sin(\frac{1}{x^2+y^2})| \leq |x+y|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Or $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x+y = 0$ par somme de limites.

On déduit du Théorème des Gendarmes que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin(\frac{1}{x^2+y^2}) = 0$

(b) Le passage en coordonnées polaires $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$ mène à

$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \cos(2\theta)$ ce qui conduit à penser qu'il n'y a pas de limite en 0

Provenons-le avec des contre-exemples :

$$f(x,0) = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \text{mais} \quad f(0,y) = -1 \xrightarrow{y \rightarrow 0} -1$$

ce qui prouve que

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ n'a pas de limite en } (0,0)$$

(c) Le passage en coordonnées polaires $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$ mène à

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^3 (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))}{\rho^2} = \rho (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))$$

$$\text{Or } |\cos^3 \theta| \leq 1 \text{ et } |\sin^3 \theta| \leq 1 \text{ donc } \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq 2\rho$$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \rho = 0$, on déduit du Théorème des Gendarmes que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

EN EFFET $(x,y) \rightarrow (0,0)$
ÉQUIVAUT À $\rho \rightarrow 0$

(d) Pour $x \neq 0$, on a $\frac{x^2+y^2-1}{x} \times \sin(x) = (x^2+y^2-1) \frac{\sin(x)}{x}$

• On a $\sin(x) \sim x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ soit $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

• De plus, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2+y^2-1 = -1$ par continuité (fonction polynomiale)

On en déduit par produit de limites que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2-1}{x} \sin(x) = -1$

(e) Avec les coordonnées polaires $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, on obtient

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

et cette quantité n'a pas de limite en $(0,0)$. Prouvons-le à l'aide de contre-exemples finement choisis :

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad \text{mais} \quad f(x,-x) = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

ce qui prouve que $\frac{xy}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $(0,0)$

(f) Avec les coordonnées polaires $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$, on obtient

$$f(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\rho} = \rho (3 \cos^2(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta))$$

Or $\cos^2 \theta \leq 1$ et $|\cos(\theta) \sin(\theta)| \leq 1$ donc $|f(x,y)| \leq 4\rho$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \rho = 0$, on déduit du Théorème des Encadrements que

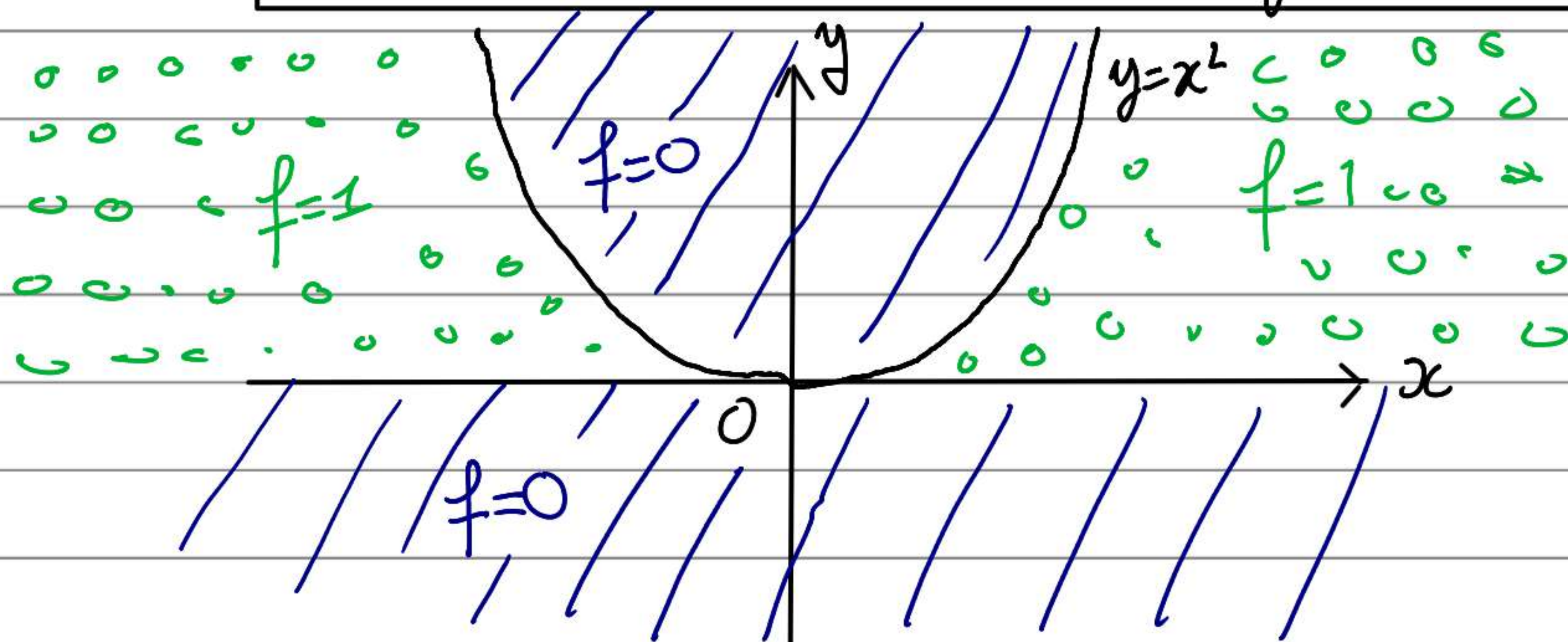
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

EXO 3

1) Facile :

f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions continues

2)



L'idée est ici d'observer que l'on peut tendre vers le point $(0,0)$ en restant aussi bien dans la zone où $f=0$ que dans celle où $f=1$ (et même en se baladant entre les deux) ... ce qui va permettre de montrer que f n'a pas de limite en $(0,0)$ et n'est pas continue en ce point.

• Pour $y \in \mathbb{R}$, on a $f(0,y) = 0$ car $\begin{cases} \text{soit } y \leq 0 \\ \text{soit } y \geq x^2 = 0 \end{cases}$
donc $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$

• Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x, \frac{1}{2}x^2) = 1$ car $0 < y = \frac{1}{2}x^2 < x^2$
d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \frac{1}{2}x^2) = 1 \neq f(0,0)$ alors que $(x, \frac{1}{2}x^2) \rightarrow (0,0)$

Ceci prouve que

f n'est pas continue en $(0,0)$

3) À l'intérieur du cercle trigonométrique (pour $x^2 + y^2 \leq 1$) la fonction f est polynomiale donc continue. En particulier

f est continue en $(0,0)$

EXO 4

On voit que $\lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \cos(y)$ puisque $\sin' = \cos$ sur $\mathbb{R}$
donc il est naturel de prolonger f à $\mathbb{R}^2$ en posant

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ \cos(y) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Cette fonction est bien évidemment continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$ en tant que quotient de fonctions continues. Il reste à vérifier qu'elle est aussi continue en tout point de la forme $(x_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Deux cas se présentent

- Si $x = y$, alors $f(x, y) = \cos(x) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \cos(x_0)$ par continuité du cosinus
- Si $x \neq y$, on peut écrire $\sin(x) = \sin(y) + (x - y)\cos(y) + o(x - y)$ en utilisant le DL de $\sin$ en y , de sorte que

$$f(x, y) = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \frac{(x - y)\cos(y) + o(x - y)}{x - y} = \cos(y) + o(1)$$

d'où $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \cos(x_0)$ par continuité du cosinus et par règle de limites

On a bien $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, x_0)} f(x, y) = f(x_0, x_0)$ dans tous les cas, ce qui prouve la continuité de f en (x_0, x_0) . Ainsi

Le prolongement proposé est bien continu sur $\mathbb{R}^2$

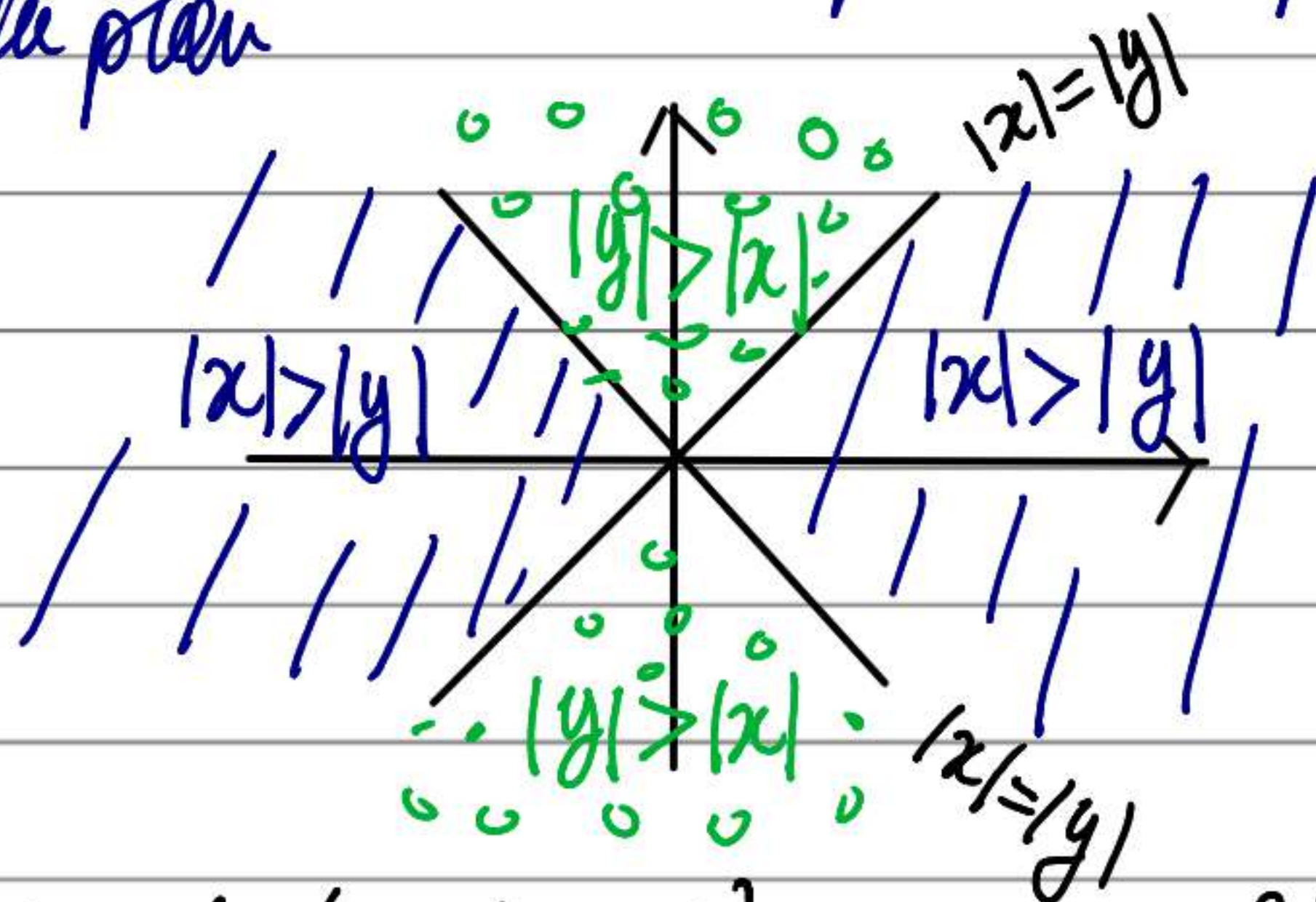
EXO 5

1) Notons que la valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ puisque $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}}$

2) Il va falloir commencer par déterminer l'expression simplifiée de $f(x,y)$ selon les zones du plan



• Sur $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| > |y|\}$ on a $f(x,y) = |x|$ et $x \neq 0$
donc f est dérivable et

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}} \text{ et } \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

• Sur $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |y| > |x|\}$ on a $f(x,y) = |y|$ et $y \neq 0$
donc f est dérivable et

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0} \text{ et } \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}}$$

Sur $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |y| = |x|\}$ (réunion des deux droites d'équations $y=x$ et $y=-x$ respectivement)
 c'est plus subtil !

* Regardons par exemple a qui se pose en (x_0, x_0) avec $x_0 > 0$

$f(x, x_0) = |x| = x$ pour $x > x_0$ donc $f(\cdot, x_0)$ est dérivable à droite

mais $f(x, x_0) = |x_0| = x_0$ donc $f(\cdot, x_0)$ est dérivable à gauche de x_0 et sa dérivée est nulle

Ainsi f n'est pas dérivable par rapport à x en (x_0, x_0) .

Même chose pour la dérivée par rapport à y

* Pour $x_0 < 0$, c'est encore pareil : les dérivées partielles en (x_0, x_0) n'existent pas

* Enfin, examinons le cas de $(0,0)$:

$f(x, 0) = |x|$ pour tout x donc $f(\cdot, 0)$ n'est pas dérivable en 0

De même, $f(0, y) = |y|$ pour tout y donc $f(0, \cdot)$ n'est pas dérivable en 0

Ainsi, les dérivées partielles de f en $(0,0)$ n'existent pas.

Par conséquent,

les dérivées partielles de f n'existent pas sur D_3

3) Enfin un bel calcul ! On a une composée de fonctions dérivables :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \times \frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

4). Pour $(x,y) \neq (0,0)$, le nombre $f(x,y)$ est un quotient de polynômes donc parfaitement dérivable par rapport à x et y :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yx(x^2+y^2) - xy \times 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xx(x^2+y^2) - xy \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

• Examinons les applications partielles en $(0,0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,0) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ f(0,y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$$

EXO 6

Pour t proche de 0, le couple $(a+th, b+tk)$ est dans le petit ouvert contenant le point (a,b) donc $\varphi(t)$ est bien définie. Comme la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur ce petit ouvert, il en va de même pour φ et

$$\varphi'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk)$$

EXO 7

LEMME " Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$ "

Ceci se démontre facilement avec le TAF : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ compris entre 0 et x tel que
 soit $\sin(x) - \sin(0) = \sin'(c)(x-0)$
 soit $\sin(x) = \cos(c) \times x$
 d'où $|\sin(x)| = |x| \times |\cos(c)| \leq |x|$

• Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|+|y|} \leq \frac{|x||y|}{|x|+|y|}$

donc $|f(x,y)| \leq |x|$ puisque $|y| \leq |x|+|y|$

On déduit alors du Théorème des Gendarmes que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$. Comme elle est aussi continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par quotient de fonctions usuelles, elle est en particulier continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = \frac{\sin(0)}{|x|} = 0$ donc f est dérivable par rapport à x en $(x,0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \dots \text{en particulier } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \dots$$

• De même, f est dérivable par rapport à y en $(0,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$

• Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, f est dérivable par rapport à x et y (quotient de fonctions C^∞) mais les expressions vont dépendre des signes de x et y ... et il faut regarder ce qui se passe pour $x=0$ ou $y=0$

* Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x+y}$

$$\text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y \cos(xy)(x+y) - \sin(xy)}{(x+y)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Pour $x < 0$ et $y > 0$, on a $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y-x}$

$$\text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y \cos(xy)(y-x) + \sin(xy)}{(y-x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Ceci montre que f est dérivable par rapport à x en $(0, y)$ pour $y > 0$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 1 \quad \text{pour } y > 0$$

En outre, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est même continue en $(0, y)$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$

Au passage, en faisant les mêmes calculs avec $y < 0$, on démontre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -1$ pour $y < 0$

* L'expression de f est symétrique en x et y ($f(x, y) = f(y, x)$) donc des calculs similaires montrent que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ -1 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0, 0)$

BILAN f est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$

- Elle l'est évidemment sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$
- En $(0, y)$: on vient de voir que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue avec $y \neq 0$

De plus $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x \cos(xy)(|x| + |y|) \pm \sin(xy)}{(|x| + |y|)^2}$

tend bien vers 0 lorsque $x \rightarrow 0$ (en toute rigueur, il faut distinguer tous les cas possibles selon les signes de x et y)
donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, y)$

Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ en tout point $(0, y)$. De même, elle est continue en tout point $(x, 0)$. De ce fait

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et continue en $(0, 0)$

EX08

- Même principe, avec une expression plus simple (il n'y a pas de valeur absolue)
- Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction f est de classe C^∞ en tant que quotient de polynômes
 - Il ne reste qu'à examiner ce qui se passe en $(0,0)$

* Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| = \frac{|xy| \times |x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq |xy|$
 car $|x^2 - y^2| \leq |x^2| + |y^2| = x^2 + y^2$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy| = 0$, on déduit du Théorème des Gendarmes que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \quad \text{donc } f \text{ est continue en } (0,0)$$

* $\rightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\rightarrow$ Pour $y \neq 0$ fixé et $x \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$ Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2 y - y^3)}{x^2 + y^2} - \frac{2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$... même expression!

En passant en coordonnées polaires $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\rho^3 (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)}{\rho^2} - \frac{2 \rho^4 \cos \theta (\cos^3 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^3 \theta)}{\rho^4}$$

d'où $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leq \rho (3 \cos^2 \theta |\sin \theta| + |\sin \theta|^3 + \dots) \leq 8\rho$

si bien que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

Ceci montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$

* Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, les calculs sont similaires :

$$\rightarrow f(0,y)=0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \text{et en particulier} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$\rightarrow \text{Pour } x \neq 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - 3y^2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} \rightarrow 0$$

$$\text{donc} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

si bien que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

* On a ainsi établi que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$

$$* \rightarrow \text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0 \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0)=0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

$$\text{En particulier} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

$$\rightarrow \text{Pour } y \neq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} - \frac{2x(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{2x(3x^2y - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\ - \frac{2x(3x^2y - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8x^2(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^3}$$

ça se casse un peu !

L'expression est infâme, mais ce qu'il faut voir ici c'est que les degrés des numérateurs et des dénominateurs sont identiques, si bien qu'il n'y a aucune possibilité de limite en $(0,0)$... comme Exercice 2, limite (h)

Utilisons deux directions particulières en contre-exemple :

$$(y=x) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x) = 6 - 4 - 0 - 4 + 0 = -2 \not\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

$$(y=-x) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,-x) = -6 + 4 - 0 + 4 - 0 = 2 \not\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

Une seule aurait suffi pour montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ n'est pas continue en $(0,0)$ mais avec les deux, on établit que l'expression $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ n'admet aucune limite en $(0,0)$

* Le même phénomène se reproduit pour les autres dérivées partielles secondes : elles sont bien définies en $(0,0)$

$$\rightarrow \text{Pour tout } y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$$

$$\rightarrow \text{Pour tout } y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$\rightarrow \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

mais leurs expressions sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont des quotients de polynômes de même degré qui n'admettent pas de limite en $(0,0)$

Ainsi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$

donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$

Au passage, on vient de montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

ce qui, par contreposé du Théorème de Schwarz, montre que

$$f \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^2 \text{ en } (0,0)$$

EXO 9

Rappel du cours de Statistiques (bônus!)

« La droite de régression linéaire est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ où (a,b) est le minimum de la fonction f »

Une l'expression de f , on voit bien que :

- cette fonction est polynomiale donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$
- f tend vers $+\infty$ quand (a,b) part au diable
- f est toujours positive

donc f n'est pas majorée mais elle est minorée : elle atteint donc un minimum global, qui sera aussi local ($\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}f$ est un ouvert) donc un point critique.

Il ne reste plus qu'à elle à la chercher aux points critiques et voir, parmi ceux-ci, en quel point f est minimale.

Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $[y_k - (ax_k + b)]^2 = y_k^2 - 2y_k(ax_k + b) + (ax_k + b)^2$

$$= y_k^2 - 2ax_k y_k - 2by_k + a^2 x_k^2 + 2abx_k + b^2$$

$$= a^2 x_k^2 + 2abx_k - 2ax_k y_k + b^2 - 2by_k + y_k^2$$

si bien que

$$f(a, b) = a^2 \sum_{k=1}^N x_k^2 + 2ab \sum_{k=1}^N x_k - 2a \sum_{k=1}^N x_k y_k + Nb^2 - 2b \sum_{k=1}^N y_k + \sum_{k=1}^N y_k^2$$

De ce fait

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 2a \sum_{k=1}^N x_k^2 + 2b \sum_{k=1}^N x_k - 2 \sum_{k=1}^N x_k y_k \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 2a \sum_{k=1}^N x_k + 2Nb - 2 \sum_{k=1}^N y_k \end{cases}$$

Or, (a, b) est un point critique de f ssi' $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k - \frac{a}{N} \sum_{k=1}^N x_k = \bar{y} - a\bar{x}$$

où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les moyennes des séries statistiques (x_k) et (y_k)

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2N} \frac{\partial f}{\partial a} = a \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 + b \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k = 0$$

$$\Leftrightarrow a \bar{x}^2 + b \bar{x} - \bar{x}\bar{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow a \bar{x}^2 + \bar{x}\bar{y} - a \bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(\bar{x}^2 - \bar{x}^2) = \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}$$

$$\Leftrightarrow a V_x = S_{x,y} \quad \text{cf. formule de König-Huygens}$$

↑
VARIANCE DE x

↑
COVARIANCE DE x ET y

d'où

$$a = \frac{S_{x,y}}{V_x} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

C'est l'unique point critique de f , donc son minimum : on a ainsi retrouvé l'équation de l'unique droite qui minimise la quantité f , qui est la fameuse DROITE DE RÉGRESSION LINÉAIRE

Pour vous remettre les notations en tête, revoyez le chapitre 15... on parle de COVARIANCE et de RÉGRESSION LINÉAIRE à la toute fin.

EXO 10

PRINCIPE : les extrema locaux étant des points critiques, on va commencer par décrire tous les points critiques avant de voir lesquels parmi ceux-ci sont des extrema locaux...

$$1) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ unique point critique}$$

De plus, $f(0,0) = 0 \leq f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si bien que

f atteint son minimum en $(0,0)$

$$2) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ unique point critique.}$$

De plus, $f(0,0) = 0 \dots$ Mais ce n'est pas un extremum local car

$$\begin{cases} f(x,0) = x^2 > 0 \\ f(0,x) = -x^2 < 0 \end{cases}$$

pour tout $x \neq 0$. Ainsi

f ne possède pas d'extremum local

$$3) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ Unique point critique}$$

Or $f(x, 0) = x^3 \begin{cases} > 0 \text{ si } x > 0 \\ < 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ donc $f(0, 0) = 0$ n'est pas un extremum local de f .

De ce fait

f n'admet pas d'extremum local

$$4) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, y) \dots \text{infinité de points critiques}$$

De plus, $f(0, y) = 0 \leq x^4 = f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
donc

f atteint son minimum en $(0, y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$5) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ 4y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-2, 1)$$

Pour examiner le comportement en ce point, on calcule $f(-2, 1) = -3$ et

$$f(-2+h, 1+k) = 4 - 4h + h^2 + 2(1 + 2k + k^2) + 4(-3 + h - k) + 3$$

$$= h^2 + 2k^2 - 3$$

$$\geq -3$$

$$\geq f(-2, 1)$$

ce qui prouve que

f atteint son minimum en $(-2, 1)$

REMARQUE on pourrait aussi noter que

$$f(x, y) = x^2 + 4x + 2(y^2 - 2y) + 3 = (x+2)^2 - 4 + 2((y-1)^2 - 1) + 3$$

$$= (x+2)^2 + 2(y-1)^2 - 3 \quad \text{admet } -3 \text{ pour minimum en } (-2, 1)$$

$$6) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3y \\ y^2 = 3x \end{cases}$$

Ceci implique que $3x = y^2 = \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 = \frac{x^4}{9}$ d'où $x^4 - 27x = 0$
soit $x(x^3 - 27) = 0$
donc $x = 0$ ou $x = 3$

• Pour $x = 0$, on obtient $y = 0$ d'où le point critique $(0, 0)$

Pour $x = 3$, on obtient $y = 3$ — — — — — $(3, 3)$

* Etude du point $(0, 0)$ On a $f(0, 0) = 0$

On note que $f(x, 0) = x^3 \begin{cases} > 0 & \text{pour } x > 0 \\ < 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$

donc $f(0, 0) = 0$ n'est pas un extremum de f

* Etude du point $(3, 3)$ On a $f(3, 3) = -27$

$$\begin{aligned} f(3+h, 3+k) &= (3+h)^3 + (3+k)^3 - 9(3+h)(3+k) \\ &= 27 + 27h + 9h^2 + h^3 + 27 + 27k + 9k^2 + k^3 \\ &\quad - 9(9 + 3h + 3k + hk) \\ &= -27 + 9(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3 \\ &= f(3, 3) + 9(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3 \end{aligned}$$

en utilisant $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Comme $(h-k)^2 = h^2 + k^2 - 2hk \geq 0$, on a $-hk \geq -\frac{h^2 + k^2}{2}$

d'où $h^2 - hk + k^2 \geq \frac{h^2 + k^2}{2}$

et

$$f(3+h, 3+k) - f(3, 3) \geq \frac{9}{2}(h^2 + k^2) + h^3 + k^3$$

Or $h^3 = o(h^2)$ et $k^3 = o(k^2)$ donc $h^3 + k^3 = o(h^2 + k^2)$

En particulier, pour (h, k) proche de 0, $-\frac{1}{2}(h^2 + k^2) \leq h^3 + k^3 \leq \frac{1}{2}(h^2 + k^2)$

si bien que $f(3+h, 3+k) - f(3, 3) \geq \frac{8}{2}(h^2 + k^2) \geq 0$

De ce fait, f admet un minimum local en $(3, 3)$

EN EFFET $f_1 = o(f_2)$

signifie que $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

ce qui implique que $-\frac{1}{2} \leq \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq \frac{1}{2}$ pour x proche de 0

en utilisant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$

7) On a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2}$

donc $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

Ainsi, f admet pour unique point critique $(0, 0)$ et $f(0, 0) = \frac{1}{1} = 1$

Or, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x^2 + 2y^2 + 1 \geq 1$ donc $f(x, y) \leq 1$

De ce fait, f admet son maximum en $(0, 0)$