

Limites et continuité

Table des matières

1	Limites d'une fonction réelle	2
1.1	L'ensemble $\mathbb{R}$	2
1.1.1	Intervalles de $\mathbb{R}$	2
1.1.2	Voisinage	2
1.2	Limite d'une fonction en un point et en l'infini	3
1.2.1	Limite finie en un point	3
1.2.2	Limite infinie en un point	5
1.2.3	Limites en l'infini	6
1.2.4	Une seule définition pour toutes les limites	6
1.3	Opérations sur les limites	6
1.4	Limites usuelles	7
1.5	Composition de limites	8
1.6	Limites et ordre	8
1.7	Limites des fonctions monotones	9
1.8	Asymptotes	11
2	Continuité d'une fonction réelle	12
2.1	Définitions	12
2.2	Prolongement par continuité	13
2.3	Continuité sur un intervalle	14
2.4	Opérations sur les fonctions continues	14
3	Applications de la notion de continuité	15
3.1	Théorème des valeurs intermédiaires	15
3.2	Algorithme de dichotomie	16
3.3	Théorème des bornes	17
3.4	Théorème de la bijection monotone	18
3.5	Suites récurrentes	19

1 Limites d'une fonction réelle

1.1 L'ensemble $\mathbb{R}$

1.1.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.1 : Ouverts

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. L'intervalle $]a, b[$ est dit **ouvert**.

Exemple 1. Pour a et b deux réels tels que $a \leq b$, les intervalles suivants sont ouverts :

$$\mathbb{R}, \quad]-\infty, a[, \quad]b, +\infty[, \quad]a, b[, \quad \emptyset.$$

Définition 1.2 : Fermés

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ est dit **fermé**.

Exemple 2. Pour a et b deux réels tels que $a \leq b$, les intervalles suivants sont fermés :

$$\mathbb{R}, \quad]-\infty, a], \quad [b, +\infty[, \quad [a, b], \quad \emptyset.$$

Remarque 1.3 : Autres intervalles de $\mathbb{R}$

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Les intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$ ne sont ni des ouverts, ni des fermés.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les seules parties **connexes** de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les ensembles "d'un seul tenant".

1.1.2 Voisinage

Définition 1.4 : Voisinage d'un point

Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de a tout intervalle du type

$$V_a =]a - h, a + h[\text{ avec } h > 0.$$

On appelle **voisinage à gauche** de a tout intervalle du type $]a - h, a[$ avec $h > 0$.

On appelle **voisinage à droite** de a tout intervalle du type $]a, a + h[$ avec $h > 0$.

On appelle **voisinage épointé** de a tout intervalle du type $]a - h, a[\cup]a, a + h[$ avec $h > 0$.

Définition 1.5 : Propriété locale au voisinage d'un point

Une proposition $\mathcal{P}(x)$ dépendant de x est dite vraie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ si

$$\exists h > 0, \quad \forall x \in]a - h, a + h[, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

Exemple 3. La proposition $\mathcal{P}(x)$ " $x(x-3)(x+1) < 0$ " est vraie au voisinage de 2 car il existe $h = 1 > 0$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour $x \in]2 - h, 2 + h[$.

Définition 1.6 : Voisinage de l'infini

On appelle **voisinage de $+\infty$** tout intervalle du type

$$V =]A, +\infty[\text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

On appelle **voisinage de $-\infty$** tout intervalle du type

$$V =]-\infty, A[\text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.7 : Propriété locale au voisinage de l'infini

- Une proposition $\mathcal{P}(x)$ dépendant de x est dite vraie au voisinage de $+\infty$ si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

- Une proposition $\mathcal{P}(x)$ dépendant de x est dite vraie au voisinage de $-\infty$ si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \quad \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

Exemple 4. La proposition $\mathcal{P}(x)$ " $x^2 - x > 0$ " est vraie au voisinage de $+\infty$ car il existe $A = 2 > 0$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour $x > A$.

1.2 Limite d'une fonction en un point et en l'infini**1.2.1 Limite finie en un point****Définition 1.8 : Limite finie en un point (version voisinage)**

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers la limite l en a lorsque pour tout voisinage V_l de l , il existe un voisinage V_a du point a tel que

$$f(V_a) \subset V_l.$$

Intuitivement, $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de l si on prend x assez proche de a .
On note alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

Définition 1.9 : Limite finie en un point (version quantificateurs)

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers la limite l en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

En effet, on a

$$|x - a| < \eta \Leftrightarrow -\eta < x - a < \eta \Leftrightarrow x \in]a - \eta, a + \eta[.$$

De plus,

$$|f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[.$$

Cela revient donc à prendre dans la définition 1.8 $V_l =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ et $V_a =]a - \eta, a + \eta[$. Cette définition est cependant réservée aux exercices les plus théoriques ou les plus ardu.

Proposition 1.10 : Unicité de la limite

Si f admet une limite en a , alors celle-ci est unique.

Démonstration. On suppose que l et l' sont des limites de f en a . Alors pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\exists \eta' > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon.$$

En posant $\eta'' = \min(\eta, \eta')$, on obtient donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta'' > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \text{ et } |f(x) - l'| < \varepsilon.$$

Ainsi

$$|l - l'| = |(l - f(x)) + (f(x) - l')| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| < 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient bien que $|l - l'| = 0$, d'où $l = l'$. □

Définition 1.11 : Limite à gauche, limite à droite

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à gauche du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite à gauche de f en a est égale à l lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a - \eta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l.$$

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage à droite du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite à droite de f en a est égale à l lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l.$$

Exemple 5. Déterminer les limites à gauche et à droite de la fonction partie entière en 0.

Solution.

Définition 1.12 : Lien entre limite, limite à droite et limite à gauche

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

Si f n'est pas définie en a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

Si f est définie en a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Exemple 6. Étudier la limite en 0 de l'application f définie par

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x \geq 0, \\ e^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solution.

1.2.2 Limite infinie en un point

Définition 1.13 : Limite infinie en un point (version voisinage)

Soit f une fonction définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a lorsque pour tout voisinage V de $+\infty$ (resp. $-\infty$), il existe un voisinage V_a du point a tel que

$$f(V_a) \subset V.$$

On prend dans la définition 1.13 précédente :

- $V = [A, +\infty[$ et $V_a =]a - \eta, a + \eta[$ pour que f tende vers $+\infty$ en a ,
- $V =]-\infty, A]$ et $V_a =]a - \eta, a + \eta[$ pour que f tende vers $-\infty$ en a .

Définition 1.14 : Limite infinie en un point (version quantificateurs)

Soit f une fonction définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en a lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Généralement, ce type de limites s'observe au niveau d'une valeur interdite de la fonction f .

Exemple 7. Déterminer la version avec les quantificateurs de la limite vers $-\infty$ en un point.

Solution.

Définition 1.15 : Limite infinie à gauche (resp. à droite) en un point

Soit f une fonction définie sur un voisinage à gauche du point $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) > A.$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) < A.$

Soit f une fonction définie sur un voisinage à droite du point $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a < x < a + \eta \Rightarrow f(x) > A.$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad a < x < a + \eta \Rightarrow f(x) < A.$

Exemple 8. Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Solution.

1.2.3 Limites en l'infini

Définition 1.16 : Limite finie en $+\infty$

Soient $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que la fonction f tend vers l en $+\infty$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]B, +\infty[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Exemple 9. Déterminer la définition de la limite finie en $-\infty$.

Solution.

Définition 1.17 : Limite infinie en $+\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage du point $+\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) > A.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) < A.$

Exemple 10. Déterminer la définition de la limite infinie en $-\infty$.

Solution.

1.2.4 Une seule définition pour toutes les limites

On peut remarquer que toutes les limites données précédemment se résument en une seule définition avec la version voisinage.

Définition 1.18 : Limite en un point de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (hors programme)

Soient $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que la fonction f tend vers la limite l en a lorsque pour tout voisinage V_l de l , il existe un voisinage V_a de a tel que

$$f(V_a) \subset V_l.$$

1.3 Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe, a désigne un réel ou l'infini. Ainsi en notant $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. l et l' sont des réels.

Limite d'une somme

$\lim_a f$	l	$+\infty$	$-\infty$	l	l	$+\infty$
$\lim_a g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a (f + g)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminé

Limite d'un produit

$\lim_a f$	l	$\pm\infty$	l	0
$\lim_a g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a (f \times g)$	$l \times l'$	(règles des signes) $\pm\infty$		indéterminé

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_a f$	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-
$\lim_a \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Il y a donc plusieurs formes indéterminées :

$$"(+\infty) + (-\infty)", \quad "0 \times \infty", \quad "\frac{0}{0}", \quad "\frac{\infty}{\infty}", \quad "1^\infty"$$

pour lesquelles on ne sait pas a priori si la fonction converge ou diverge et quelle sera la limite si elle existe.

Remarque 1.19 : Limites à gauche et à droite

On a les mêmes résultats pour les limites à gauche et à droite en un point.

1.4 Limites usuelles

Proposition 1.20 : Limite d'une fonction polynôme ou fraction rationnelle en l'infini

La limite d'une fonction polynôme en $\pm\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.

La limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Exemple 11. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 - x^4 + 10 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 10}{4 - 3x}.$$

Solution.

Proposition 1.21 : Croissances comparées

Soient a et b deux réels strictement positifs.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a (\ln(x))^b = 0.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^{bx} = 0.$$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui elle-même l'emporte sur le logarithme.

Proposition 1.22 : Limites usuelles venant de taux d'accroissement

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$(ii) \quad \text{Pour } \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

Démonstration. (i), (ii) et (iii) sont des taux d'accroissement en 0. □

Exemple 12. Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ d'après la proposition précédente.}$$

1.5 Composition de limites

Proposition 1.23 : Composition de limites

Soient trois éléments a , b et c de $\overline{\mathbb{R}}$. On considère une fonction f définie au voisinage de a et une fonction g définie au voisinage de b .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

On adapte cette proposition au cas où les limites en jeu sont des limites à gauche ou à droite.

Exemple 13. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x}.$$

Solution.

1.6 Limites et ordre

Théorème 1.24 : Théorème de prolongement des inégalités

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g telles que pour x au voisinage de a

$$f(x) \leq g(x).$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \Rightarrow l \leq l'.$$

Si on a $f(x) < g(x)$ au lieu de $f(x) \leq g(x)$, la conclusion reste $l \leq l'$: les inégalités strictes deviennent larges après passage à la limite.

Démonstration. Démonstration analogue au théorème similaire dans le chapitre sur les suites. $\square$

Exemple 14. $\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0$ et pourtant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Il faut déjà savoir que les fonctions convergent avant de passer à la limite.

Théorème 1.25 : Théorème d'encadrement

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et trois fonctions f , g et h telles que pour x au voisinage de a

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l.$$

Contrairement au théorème 1.24 de prolongement des inégalités où on suppose que les deux fonctions sont convergentes, dans le théorème 1.25 d'encadrement, on suppose que f et h convergent pour prouver la convergence de la fonction encadrée.

Exemple 15. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$.

Solution.

Corollaire 1.26 : *Théorème d'encadrement avec une valeur absolue*

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g telles que pour x au voisinage de a

$$|f(x) - l| \leq g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

Démonstration. Au voisinage de a , $l - g(x) \leq f(x) \leq l + g(x)$. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement. $\square$

Théorème 1.27 : *Théorème de comparaison*

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g telles que pour x au voisinage de a

$$f(x) \leq g(x).$$

Alors

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty.$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$

Exemple 16. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) - x^2$.

Solution.

1.7 Limites des fonctions monotones

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $]a, b[$.

Théorème 1.28 : *Théorème de la limite monotone pour une fonction croissante*

Si f est croissante alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existent. De plus,

- (i) Si f est minorée, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ est finie et

$$f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Si f n'est pas minorée, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

- (ii) Si f est majorée, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ est finie et

$$f(x) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.

Théorème 1.29 : *Théorème de la limite monotone pour une fonction décroissante*

Si f est décroissante alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existent. De plus,

- (i) Si f est majorée, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ est finie et

$$f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

- (ii) Si f est minorée, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ est finie et

$$f(x) \geq \lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

Si f n'est pas minorée, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$.

Corollaire 1.30 : *Existence de limites à gauche et à droite pour une fonction monotone*

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ (différent des bornes de I). Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ existent.}$$

De plus,

- Si f est croissante, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

- Si f est décroissante, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Exemple 17. *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

Tracer la courbe représentative de f .

Solution.

Exemple 18. *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 2 + x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tracer la courbe représentative de f .

Solution.

1.8 Asymptotes

Définition 1.31 : Asymptote verticale

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 . Si la limite (à droite ou à gauche) de f en x_0 est infinie, alors on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .

Exemple 19. L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Définition 1.32 : Asymptote horizontale

Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

On peut alors lire sur un tableau de variations la position relative de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

Exemple 20. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de f .

Solution.

Définition 1.33 : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

On observe qu'il suffit de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$ pour montrer que la courbe représentative de f a une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$.

Remarque 1.34 : Asymptotes en $-\infty$

On définit de façon analogue une asymptote horizontale ou oblique en $-\infty$.

Exemple 21. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ possède une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ et déterminer la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote.

Solution.

2 Continuité d'une fonction réelle

2.1 Définitions

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I .

Définition 2.1 : Continuité en un point

Soit $x_0 \in I$. On dit que f **est continue en** x_0 si f possède une limite finie en x_0 et que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si f n'est pas continue en x_0 , on dit qu'elle est discontinue en x_0 .

Exemple 22. Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Tracer la fonction f au voisinage de 0.

Solution.

Définition 2.2 : Continuité à droite en un point

Soit $x_0 \in I$. On dit que f **est continue à droite en** x_0 si f possède une limite finie à droite en x_0 et que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Définition 2.3 : Continuité à gauche en un point

Soit $x_0 \in I$. On dit que f **est continue à gauche en** x_0 si f possède une limite finie à gauche en x_0 et que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 23. Reprenons la fonction de l'exemple précédent. Montrer que f est continue à gauche en 0 mais n'est pas continue à droite en 0.

Solution.

Exemple 24. La fonction partie entière est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1.

Théorème 2.4 : Continuité en un point et continuité à gauche et à droite en un point

Soit $x_0 \in I$.

$$f \text{ est continue en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0.$$

Si x_0 est une borne de I , une seule des deux limites (à droite ou à gauche) existe.

Exemple 25. Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2, & \text{si } x \leq 1, \\ e^{x-1}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en 1.

Solution.

2.2 Prolongement par continuité

Théorème 2.5 : *Prolongement par continuité*

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 sauf en x_0 (au voisinage épointé de x_0). Si f admet une limite finie l en x_0 , alors on définit la fonction $\tilde{f}$ sur $D_f \cup \{x_0\}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in D_f, \\ l, & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est continue en x_0 et cette fonction est appelée **prolongement par continuité** de f en x_0 .

Lorsqu'il est possible, le prolongement par continuité en un point est unique.

Exemple 26. *Déterminons le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1.$$

Ainsi comme $|x| > 0$,

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \leq |x|.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

On peut donc définir $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f en 0.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.6 : *Interprétation*

On rajoute (si cela est possible) une valeur supplémentaire à la fonction f en un point où elle n'était pas définie initialement et en préservant la continuité de la fonction f .

Pour alléger les notations, la fonction $\tilde{f}$ est souvent encore notée f .

2.3 Continuité sur un intervalle

Définition 2.7 : Continuité sur un intervalle

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I . L'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I est noté $C(I)$ ou $C^0(I)$.

Si I est de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$, alors f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de $]a, b[$ et continue à droite en a si I contient a , et à gauche en b si I contient b .

Exemple 27. Une fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$ si elle est continue en tout point $x_0 > 0$ et continue à droite en 0.

Théorème 2.8 : Continuité des fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, puissances, valeur absolue, logarithme, exponentielle et fonctions trigonométriques sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple 28. $x \mapsto x^5 + 3x^2 - 8$ est continue sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{x^3 - 5x + 1}{x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

$x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Remarque 2.9 : Partie entière

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais l'est sur tout intervalle $[n, n + 1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Elle est aussi continue à droite sur $\mathbb{R}$.

2.4 Opérations sur les fonctions continues

Propriété 2.10 : Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , alors $f + g$ et fg sont continues sur I .

Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est aussi continue sur I .

Propriété 2.11 : Composée de fonctions continues

Si f est continue sur I à valeurs dans J et si g est continue sur J , alors $g \circ f$ est aussi continue sur I .

Pour démontrer qu'une fonction est continue, il suffit donc généralement de dire qu'elle s'obtient à partir de fonctions usuelles et de ces différentes opérations.

Exemple 29. On définit la fonction f par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{(\cos(x))^2 + 1}.$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et quotient de fonctions usuelles (logarithme, cosinus, polynomiale) toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec un dénominateur qui ne s'annule jamais.

3 Applications de la notion de continuité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

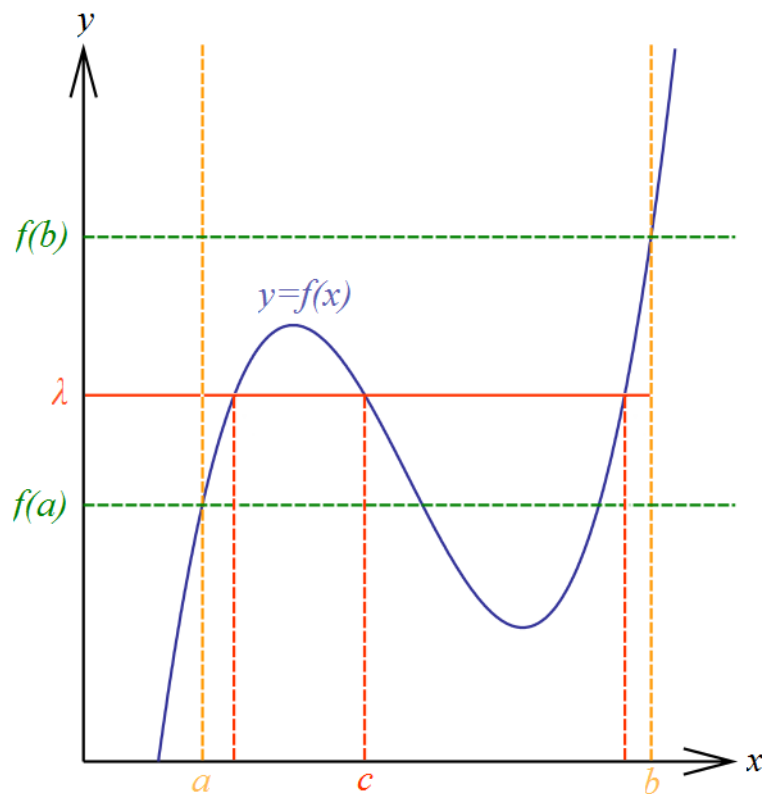
Théorème 3.1 : *Théorème des valeurs intermédiaires*

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 3.2 : *Théorème des valeurs intermédiaires sur un segment*

Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Le réel c n'est pas nécessairement unique.



Démonstration. Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Si $f(a) = f(b)$, le résultat est immédiat puisqu'il suffit de prendre $c = a$ ou $c = b$. Supposons que $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$ se traite de manière analogue).

On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > \lambda$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n \quad \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq \lambda$$

On montre sans difficulté par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Ainsi $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente vers 0. On en conclut donc que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée c . Par récurrence, on montre également que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

Ainsi par continuité de f sur $[a, b]$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c)$. D'après le théorème d'encadrement, $\lambda = f(c)$.

□

La fonction f peut aussi prendre des valeurs qui ne sont pas comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple 30. Soit

$$\begin{aligned} f : [-1, 2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

On remarque que $f([-1, 2]) = [0, 4]$ et pourtant $f(-1) = 1$ et $f(2) = 4$.

Si la fonction n'est pas continue, elle ne prend pas forcément toutes les valeurs intermédiaires car elle peut faire un "saut".

Exemple 31. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lfloor 1 \rfloor = 1 \text{ et } \lfloor 2 \rfloor = 2 \text{ mais } \lfloor x \rfloor = 1.5 \text{ n'a pas de solution.}$$

On constate aussi que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ qui n'est plus un intervalle.

Corollaire 3.3 : *Fonction continue changeant de signe*

Toute fonction continue qui change de signe sur un intervalle s'annule au moins une fois sur cet intervalle.

Exemple 32. Montrer que l'équation $x^5 + 3x^3 - 2 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

Solution.

3.2 Algorithme de dichotomie

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires 3.2, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On reprend les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires : $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} && \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0 \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n && \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

On rappelle que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers c et que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq c \leq b_n$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'algorithme de dichotomie cherche à déterminer un rang n_0 à partir duquel pour $n \geq n_0$

$$0 \leq b_n - a_n \leq \varepsilon$$

Ceci permet alors d'avoir une approximation de c à ε près avec a_{n_0} (ou b_{n_0}) car

$$0 \leq c - a_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} \leq \varepsilon.$$

Informatique 3.4 : Python : algorithme de dichotomie

On va définir la fonction Python suivante prenant en entrée f (définie préalablement), a , b et ε .

```
def dichotomie(f,a,b,eps):
    while b-a>eps:
        t=(a+b)/2
        if f(a)*f(t)<0 : # f change de signe entre a et t
            b=t # alors f s'annule entre a et t
        else :
            a=t # alors f s'annule entre t et b
    return b
```

La fonction renvoie une approximation d'un point en lequel f s'annule à ε près.

Exemple 33. On va déterminer une approximation à 10^{-3} près d'une solution de $x^5 + 3x^3 - 2 = 0$ sur $[0, 1]$. On utilise la fonction dichotomie faite précédemment.

```
import numpy as np
def f(x):
    return x**5+3*x**3-2
print(dichotomie(f,0,1,0.001))
```

Python renvoie la valeur 0.8173828125.

3.3 Théorème des bornes

Définition 3.5 : Segment

On appelle **segment** tout intervalle de $\mathbb{R}$ fermé et borné (i.e. tout intervalle $[a, b]$ avec a et b deux réels).

Théorème 3.6 : Théorème des bornes

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème 3.7 : Théorème des bornes, version équivalente

Si une fonction f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. Autrement dit, si on note $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, alors

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Démonstration. Admis □

Exemple 34. Si $f(x) = \sin(x)$ alors $f([0, \pi]) = [0, 1]$.

Si on ne prend pas un segment, l'ensemble image n'est plus forcément un segment.

Exemple 35. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors f est continue sur $]0, 1]$ mais $f(]0, 1]) = [1, +\infty[$.

3.4 Théorème de la bijection monotone

Définition 3.8 : *Rappel : fonction réelle bijective*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow J$ une fonction. On dit que f est une bijection de I sur J lorsque pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x .

Théorème 3.9 : *Théorème de la bijection monotone*

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

L'hypothèse de stricte monotonie permet donc d'assurer l'unicité de l'antécédent dans le théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration. On limitera notre démonstration au cas du segment. Notons $I = [a, b]$ et J l'ensemble des réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

La monotonie de la fonction implique que l'image de l'intervalle $[a, b]$ est contenue dans J :

- si f est croissante, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$,
- si f est décroissante, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

Le fait que cette monotonie soit stricte assure que deux réels distincts ne peuvent avoir la même image, autrement dit la fonction est injective sur $[a, b]$.

Enfin, le théorème des valeurs intermédiaires (qui s'appuie sur l'hypothèse de continuité) garantit que tout élément de J admet au moins un antécédent par f , c'est-à-dire que la fonction est surjective dans J . $\square$

Exemple 36. Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ possède exactement une solution dans $[0, 1]$.

Solution.

Toutes les bijections ne sont pas nécessairement continues et strictement monotones.

Exemple 37. Soit

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ 1 - x, & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

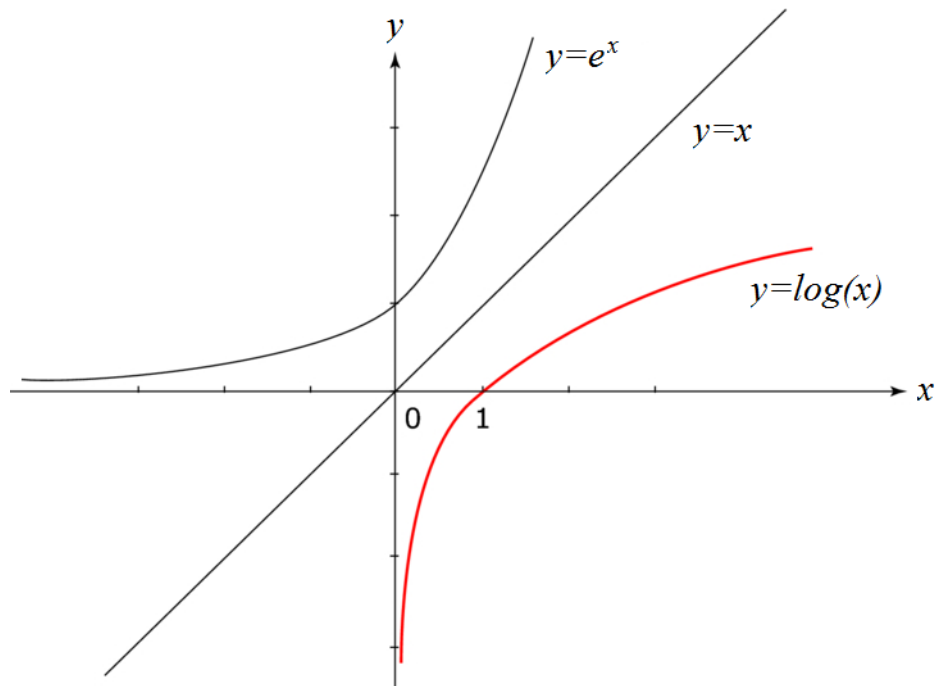
Vérifier que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$

Solution.**Théorème 3.10 :** *Bijection réciproque*

Si f est continue et bijective de l'intervalle I dans l'intervalle J , alors sa bijection réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I , elle est continue sur J et a le même sens de variation que f .

Les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} (dans un repère orthonormé) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 38. La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Elle est bijective et sa bijection réciproque est la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui est aussi continue et strictement croissante.



3.5 Suites récurrentes

Proposition 3.11 : Continuité et suites

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et si f est continue en l , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l).$$

Démonstration. Comme f est continue en l ,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x - l| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(l)| \leq \varepsilon.$$

En utilisant la convergence de la suite, pour $\eta > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \eta.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |f(u_n) - f(l)| \leq \varepsilon.$$

□

Définition 3.12 : Suite récurrente

On appelle **suite récurrente** (d'ordre 1) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ donné et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Définition 3.13 : Point fixe d'une fonction

Soit f une fonction définie sur D_f . On appelle **point fixe** de f tout réel $x \in D_f$ vérifiant

$$x = f(x).$$

Proposition 3.14 : Limite d'une suite récurrente (proposition hors programme)

Soit f une fonction définie sur D_f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de D_f définie par

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et si f est continue en l , alors l est un point fixe de f . On a donc :

$$l = f(l).$$

Démonstration. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, alors $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$. Comme f est continue en l , d'après la proposition 3.11,

$$f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(l).$$

Par unicité de la limite, $l = f(l)$. □

Remarque 3.15 : Limites finies possibles d'une suite récurrente

Si la fonction f est continue sur l'intervalle considéré, alors les limites finies possibles de la suite (u_n) sont données par les points fixes de f .

Méthode 3.16 : Étude des suites récurrentes

La combinaison des deux propriétés précédentes est très puissante : une des grandes méthodes d'étude des suites récurrentes suit le plan suivant :

1. (a) On étudie les variations de f .
 (b) On détermine les points fixes de f :
 - soit en résolvant l'équation $f(x) = x$.
 - soit en utilisant le théorème de la bijection monotone à $x \mapsto f(x) - x$ (dans ce cas on ne disposera pas d'une expression explicite pour les éventuels points fixes).
2. On trouve un intervalle contenant tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On détermine la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. On détermine si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge :
 - (a) si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on en déduit par le théorème de la limite monotone que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l . Par unicité de la limite, on en déduit que $f(l) = l$.
 - (b) Sinon on montre par l'absurde que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend alors vers $+\infty$ si elle est croissante (resp. $-\infty$ si elle est décroissante).

Exemple 39. Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. Étudier f et faire un tableau de variations de f .
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x > 0$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement positive.
4. Pour quelle valeur de a , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante?
5. On suppose $a > 1$.
 - (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
 - (b) Étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (c) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
6. On suppose $a < 1$.
 - (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$.
 - (b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Solution.