

1 Les signaux périodiques

1.1 Période

Définition. Un signal $s(t)$ est **périodique** si et seulement s'il existe une **période** T telle que, pour tout t :

$$s(t + T) = s(t)$$

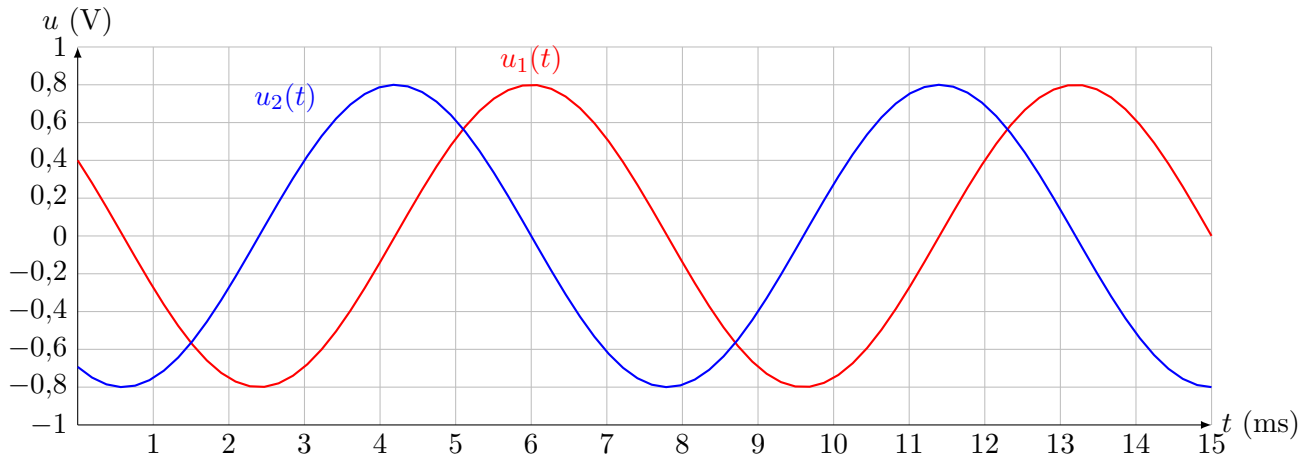
Exemple

Le signal $s(t) = A \sin(\omega t)$ a une période $T = 2\pi/\omega$.

Démonstration :
$$s\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A \sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = A \sin(\omega t + 2\pi) = A \sin(\omega t)$$

1.2 Déphasage

Considérons les signaux u_1 et u_2 **synchrones** (même pulsation) ci-dessous :



Sur le signal ci-dessus, on repère la période du signal 1 :

$$T = 13,2 - 6,0 = 7,2 \text{ s}$$

Le moment $t_{\max,1}$ où le signal $u_1(t)$ a un maximum est tel que $\omega t_{\max,1} + \varphi_1 = 2k\pi$, de même, le moment $t_{\max,2}$ où le signal $u_2(t)$ a un maximum est tel que $\omega t_{\max,2} + \varphi_2 = 2k'\pi$; ainsi :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2(k' - k)\pi + \omega(t_{\max,1} - t_{\max,2})$$

On choisit $k' - k$ de sorte que $\varphi_2 - \varphi_1$ soit dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$. On peut repérer $t_{\max,1} = 6,0 \text{ s}$ et $t_{\max,2} = 4,2 \text{ s}$ si bien que :

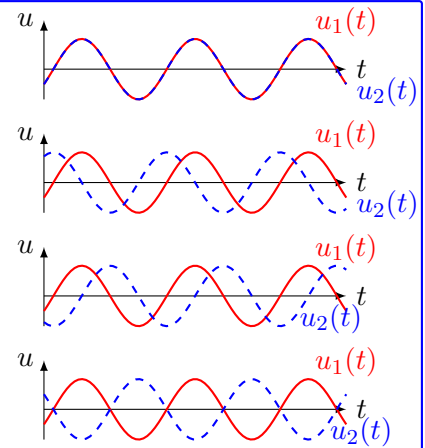
$$\omega(t_{\max,1} - t_{\max,2}) = \frac{2\pi}{7,2} \times 1,8 = \frac{\pi}{2}$$

On choisit alors $k' - k = 0$ ainsi :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

Définition.

- $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$: u_2 est en **phase** avec u_1 ;
- $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$: u_2 est en **quadrature avance** sur u_1 ;
- $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$: u_2 est en **quadrature retard** sur u_1 ;
- $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$: u_2 est en **opposition de phase** avec u_1 .

**Remarque.**

- Pour une bobine :

$$\underline{U} = jL\omega \underline{I} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} \underline{I}$$

Ainsi, si $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, alors :

$$u(t) = L\omega I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dans une bobine, $u(t)$ est en **quadrature avance** sur $i(t)$.

- Pour un condensateur :

$$\underline{U} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \underline{I}$$

Ainsi, si $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, alors :

$$u(t) = \frac{1}{C\omega} I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Dans un condensateur, $u(t)$ est en **quadrature retard** sur $i(t)$.

- Pour une résistance, $u(t) = Ri(t)$. Ainsi, si $u(t) = U \cos(\omega t)$, alors :

$$u(t) = RI_0 \cos(\omega t)$$

Dans une résistance, $u(t)$ est en **phase** avec $i(t)$.

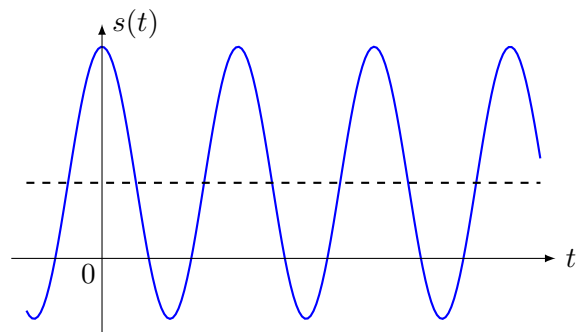
1.3 Décomposition d'un signal périodique**1.3.1 Valeur moyenne**

Définition. On définit la **valeur moyenne** du signal périodique $s(t)$ par la relation

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

Exemple

| Considérons le signal $s(t) = C + A \cos(\omega t)$.



$$\begin{aligned}
 \langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (C + A \cos(\omega t)) dt \\
 &= \frac{1}{T} \left(\int_0^T C dt + \int_0^T A \cos(\omega t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{T} \left([Ct]_0^T + \left[\frac{A}{\omega} \sin(\omega t) \right]_0^T \right) \\
 &= \frac{1}{T} \left(C(T - 0) + \frac{A}{\omega} (\sin(\omega T) - \sin(\omega \times 0)) \right) = \frac{1}{T} (CT)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle s(t) \rangle = C}$$

C'est la valeur autour de laquelle oscille $s(t)$.

Remarque importante. On peut souvent obtenir la valeur moyenne par simple lecture graphique ou en analysant l'expression analytique de $s(t)$, sans revenir à sa définition.

1.3.2 Théorème de Fourier

Tout signal périodique se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal $s(t)$ de fréquence f s'écrit

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \cos(2\pi i f t + \varphi_i)$$

où :

- S_0 la valeur moyenne du signal (ou composante continue) ;
- A_i et φ_i des coefficients dépendant du signal. Les différents coefficients A_i représentent le **spectre** du signal.



Spectre des signaux créneau et triangle

<https://www.falstad.com/fourier/>

Un signal créneau peut s'écrire avec les harmoniques impaires du fondamental (fréquence f) :

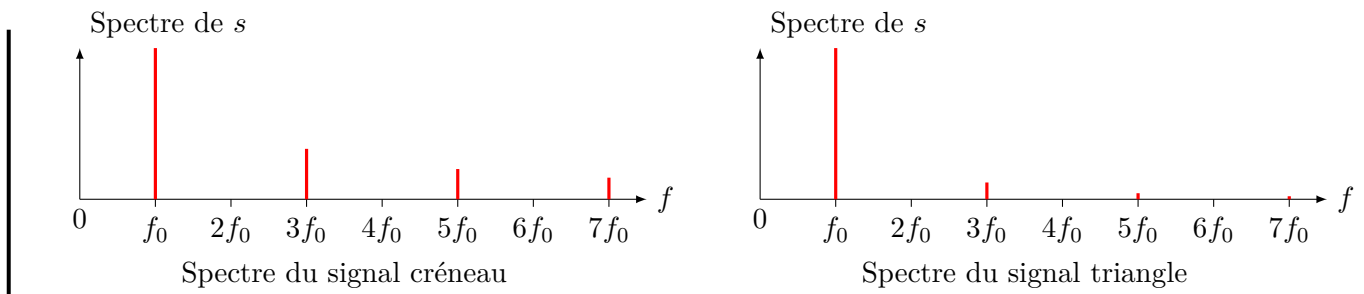
$$\begin{aligned}
 s(t) &= A \sin(2\pi f t) + \frac{A}{3} \sin(6\pi f t) + \frac{A}{5} \sin(10\pi f t) + \frac{A}{7} \sin(14\pi f t) + \dots \\
 &= A \cos\left(2\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{3} \cos\left(6\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{5} \cos\left(10\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{7} \cos\left(14\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots
 \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme est le **fondamental** (à la même fréquence f que le signal), les suivants sont les **harmoniques** (aux fréquences $k \times f$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$).

Le signal triangle s'écrit aussi avec les harmoniques impaires, mais les amplitudes associées sont différentes :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A \sin(2\pi f t) - \frac{A}{9} \sin(6\pi f t) + \frac{A}{25} \sin(10\pi f t) - \frac{A}{49} \sin(14\pi f t) + \dots \\
 &= A \sin(2\pi f t) + \frac{A}{9} \sin(6\pi f t + \pi) + \frac{A}{25} \sin(10\pi f t) + \frac{A}{49} \sin(14\pi f t + \pi) + \dots \\
 &= A \cos\left(2\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{9} \cos\left(6\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{25} \cos\left(10\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{49} \cos\left(14\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots
 \end{aligned}$$

On représente sur le **spectre** les amplitudes en fonction de la fréquence. Pour reconstruire le signal, il faut également donner la phase associée à chacune des harmoniques.



À retenir. Un signal périodique de fréquence f s'écrit comme somme :

- de la valeur moyenne du signal (**fréquence/pulsation nulle**) ;
- d'une sinusoïde à la fréquence f (le **fondamental**) et de sinusoïdes de fréquences multiplies de f ($k \times f$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) : les **harmoniques**.

2 Puissance et valeur efficace

2.1 Valeur efficace

Définition. On définit la **valeur efficace** d'un signal périodique $s(t)$ par la relation

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$$

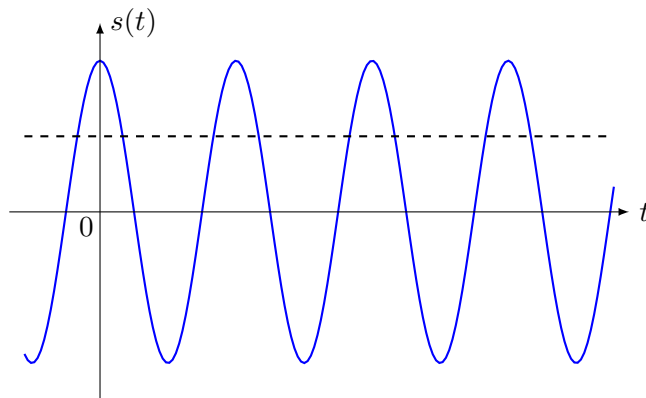
On définit cette quantité car l'énergie transportée est proportionnelle au carré des signaux (exemple : énergie stockée dans un condensateur, emmagasinée dans une bobine, énergie cinétique, puissance dissipée par effet Joule, etc.). Pour une résistance, la puissance moyenne dissipée dans une résistance est :

$$\mathcal{P} = \left\langle \frac{u^2(t)}{R} \right\rangle = \frac{\langle u(t)^2 \rangle}{R} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

Remarque. La valeur de 230 V pour le secteur est la valeur efficace de la tension.

Exemple

Considérons le signal $s(t) = A \cos(\omega t)$.



$$\begin{aligned} \langle s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (A^2 \cos^2(\omega t)) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \left(\int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \frac{1}{2} \cos(2\omega t) dt \right) \\ &= \frac{A^2}{T} \left(\left[\frac{1}{2} t \right]_0^T + \left[\frac{1}{2} \frac{A}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T \right) \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

$$s_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

⚠ Attention

Il n'y a pas toujours le rapport $\sqrt{2}$ entre amplitude et valeur efficace. Par exemple, pour un signal triangle, la valeur efficace est $A/\sqrt{3}$ et pour un créneau de moyenne nulle, elle est égale à son amplitude A .

2.2 Répartition de la puissance : formule de Parseval

Un signal périodique peut s'écrire :

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \cos(2\pi i f t + \varphi_i)$$

ou encore :

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{2} S_{i,\text{eff}} \cos(2\pi i f t + \varphi_i)$$

Égalité de Parseval. On peut montrer que :

$$S_{\text{eff}}^2 = S_0^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} S_{i,\text{eff}}^2$$

Autrement dit, l'énergie portée par le signal se répartit dans les différentes harmoniques de celui-ci de façon indépendante.

3 Action d'un filtre sur un signal périodique

3.1 Rappel : action d'un filtre sur un signal sinusoïdal

Pour un signal :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

On lit sur le diagramme le gain et la phase pour la fréquence/pulsation du signal. La sortie sera :

$$s(t) = |\underline{H}(\omega)| A \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

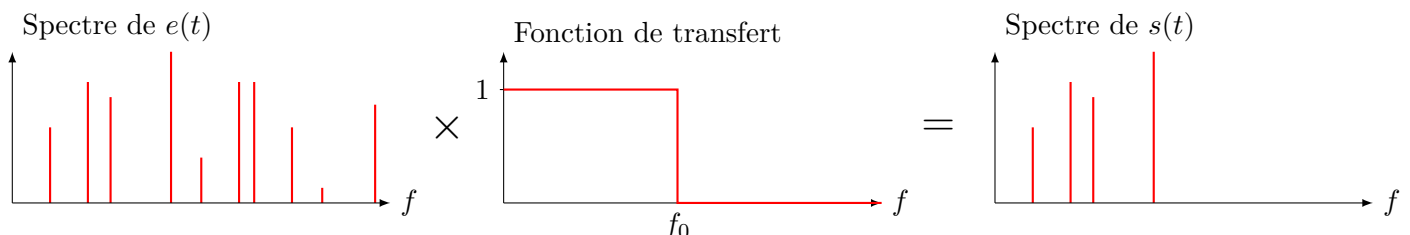
On trouve $|\underline{H}(\omega)|$ en inversant la formule du gain :

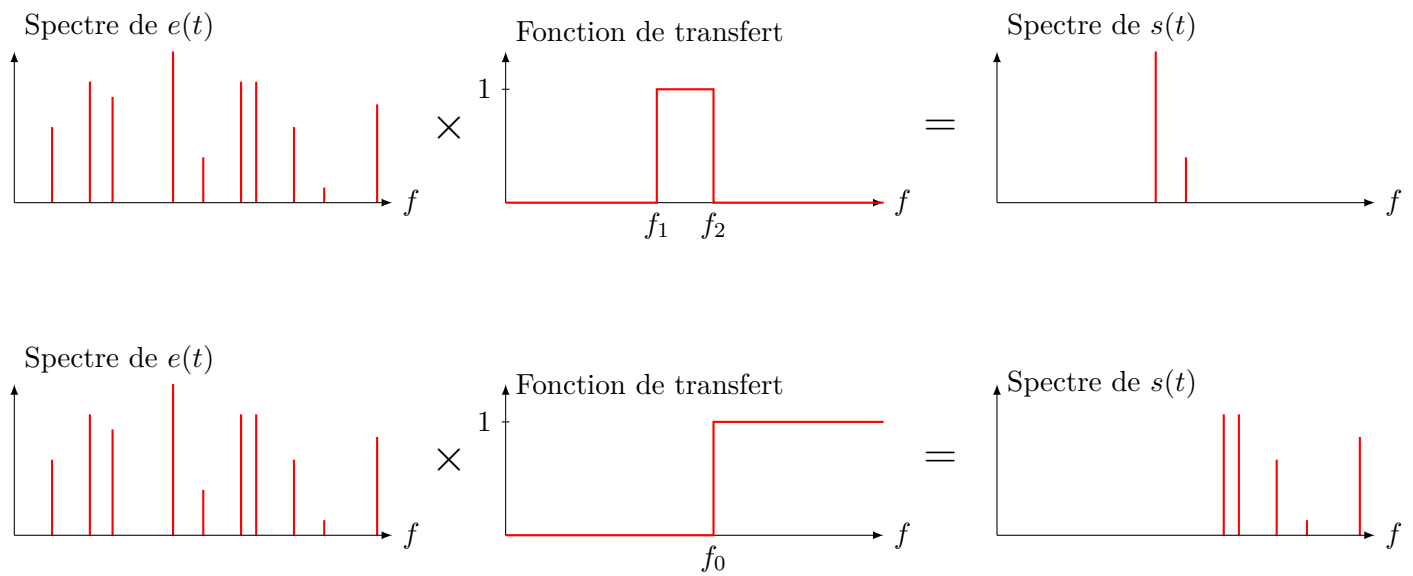
$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)| \quad \text{donc} \quad |\underline{H}(\omega)| = 10^{G_{\text{dB}}(\omega)/20}$$

3.2 Généralisation

Linéarité. Un filtre est **linéaire** : si $s_1(t)$; $s_2(t)$ sont les signaux de sortie correspondants aux signaux d'entrée respectifs $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors le signal de sortie correspondant à $\lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ sera $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$.

Visualisation. Action sur l'amplitude.





Exemple

Étude numérique du filtrage d'un signal périodique.

Dans le script Python à consulter sur le site, on simule l'action d'un filtre passe-bas RC sur un signal :

- Après avoir importé les paquets utiles, on définit le nombre de points pour le tracé du graphique (**N**) et l'intervalle de temps sur lequel on affiche le résultat (**tmax**), les paramètres physiques (la période **T**, la capacité du condensateur **C**, la résistance **R**) et le nombre de termes de la série de Fourier que l'on considère (**nb_termes** : il faut prendre un nombre aussi grand que possible pour que l'entrée soit proche d'un véritable signal créneau – on est limité ici par le temps de calcul).
- On définit le signal d'entrée ainsi. Pour chaque t (on fait une boucle sur la position dans le tableau $i : t = \text{temps}[i]$) :

$$e(t) = c_0 + \sum_{j=1}^{\text{nb_termes}} c_j \times \cos(2\pi j f t + \varphi_j)$$

- On calcule la sortie correspondante. Pour chaque t :

$$s(t) = H(0) \times c_0 + \sum_{j=1}^{\text{nb_termes}} c_j \times |H(jf)| \times \cos(2\pi j f t + \varphi_j + \varphi_h(jf))$$

avec, pour un signal de fréquence jf donc de pulsation $2\pi j f$:

$$|H(jf)| = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{1 + (2\pi j f RC)^2}$$

$$\varphi_h(jf) = -\arctan(\omega RC) = -\arctan(2\pi j f RC)$$

3.3 Bilan

Méthode.

1. Identifier les fréquences contenues dans le signal (ne pas oublier la composante continue !);
2. repérer ou calculer le gain pour les différentes fréquences présentes;
3. faire de même pour la phase;
4. conclure.

Remarque. Il peut être utile de se souvenir du comportement intégrateur ou dérivateur d'un filtre !