

Mathématiques – CCINP/E3A – DS₆

*Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).
Numérotez chaque page de votre devoir.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 : Série entière (E3A 2020 PC)

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}.$$

Q1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$.

Q2. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Q3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Q4. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

Q5. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n , une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n) .

Q6. En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

Q7. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

Q8. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Q9. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Réponse

Q1. On raisonne par **récurrence forte**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(\mathcal{H}_n) : 0 < a_n \leq 1$.

Initialisation. On a : $a_0 = 1 \in]0, 1]$, donc $(\mathcal{H}_0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\mathcal{H}_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On a $a_{n+1} > 0$ comme somme de termes strictement positifs.

De plus, par hypothèse de récurrence,

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{1}{n-k+2}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 \leq 1.$$

Donc, $a_{n+1} < 1$.

Donc, $\mathcal{H}_{n+1}$.

Ainsi, par le principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.

Q2. Par **Q1**, $a_n = O(1)$.

De plus, $\sum 1 \times x^n$ est une série entière de rayon de convergence.

Donc, par théorème de comparaison,

le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Q3. On a :

$$\frac{\left| \frac{1}{n+3} \right|}{\left| \frac{1}{n+2} \right|} = \frac{n+2}{n+3} \sim 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc, d'après le critère de d'Alembert,

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ est donc égal à 1.

Q4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par **Q3**,

- Si $|x| > 1$, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ diverge grossièrement ;
- Si $|x| < 1$, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ converge absolument, donc converge ;
- Si $x = 1$, $\frac{x^n}{n+2} \sim \frac{1}{n} \geq 0$. Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), par théorème de comparaison, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ diverge ;
- Si $x = -1$, $\frac{x^n}{n+2} = \frac{(-1)^n}{n+2}$. La suite $\left(\frac{1}{n+2} \right)_n$ est positive, décroissante de limite nulle, donc, par le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ converge.

Ainsi,

La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$ est définie sur $[-1, 1[$.

Q5. Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, donc

leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ a aussi un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

De plus, on sait que :

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+2} \times a_k = (n+1)a_{n+1}.$$

Q6. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n.$$

De plus, on peut dériver terme à terme une somme de séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence de la série :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Ainsi,

$$f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = f'(x).$$

Q7. Pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq a_0 > 0$, donc, on peut écrire :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

Donc, en primitivant sur $[0, 1[\subset]-1, 1[$,

$$\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Q8. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n+2}$ convergent (ceux sont des séries entières de rayon de convergence 1) et, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x) - \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x) \\ &= 1 + \ln(1-x) \frac{1-x}{x}. \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = \exp\left(1 + \ln(1-x) \frac{1-x}{x}\right) = e \times (1-x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} e \times (1-x)^{\frac{1-x}{x}} & x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q9. Comme $1/2 \in]-1, 1[$ est à l'intérieur du disque ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n} \text{ converge.}$$

De plus, comme $\frac{1}{2} \in [0, 1[$, on peut utiliser l'expression trouvée de f :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = e \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} = \frac{e}{2}.$$

Problème 1 : Théorème de Borel (CCINP 2019 PSI)

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt.$$

Q10. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

Q11. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p .

Q12. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p .

Q13. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Q14. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q15. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.

Q16. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $|g^{(p)}(0)| \geq p^{2p} e^{-p}$.

Q17. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

Réponse

Q10. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$ converge.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, par croissances comparées,

$$\left| t^2 e^{-t(1-itx)} \right| = t^2 e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$)

Donc, par théorème de comparaison $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est intégrable en $+\infty$.

Donc, la fonction $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par définition, cela signifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$ converge absolument, donc converge.

Ainsi,

f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q11. Soit $p \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, par croissances comparées, $t^p e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme dans la question précédente, par théorème de comparaison, $t \mapsto t^p e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$.
Donc,

Γ_p existe.

On note

$$\begin{aligned} u(t) &= t^{p+1} & u'(t) &= (p+1)t^p \\ v(t) &= -e^{-t} & v'(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

Or, $u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ et (croissances comparées) $u(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, l'intégrale Γ_{p+1} converge.

Donc, par intégration par parties,

$$\Gamma_{p+1} = [-e^{-t} t^{p+1}]_0^{+\infty} + (p+1) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^p dt = (p+1) \Gamma_p.$$

Ainsi,

$$\Gamma_{p+1} = (p+1) \Gamma_p.$$

Q12. On montre par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma_p = p!$.

Initialisation. On a

$$\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{+\infty} = 1.$$

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $\Gamma_p = p!$.

Par **Q11**, $\Gamma_{p+1} = (p+1) \Gamma_p = (p+1) \times p! = (p+1)!$

Ce qui achève la récurrence.

Q13. On note :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad g(x, t) = e^{-t(1-ix)} = e^{-t} e^{it^2 x}.$$

Alors :

► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x, t)| = e^{-t}$.

On reconnaît une fonction intégrable de référence. Donc, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

► Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t) = (it^2)^p e^{-t} e^{it^2 x}.$$

► pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

► pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t) \right| = t^{2p} e^{-t}.$$

De plus, la fonction $t \mapsto t^{2p} e^{-t}$ est continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (**Q11**).

Par théorème de dérivation sous le signe $\int$,

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t) dt = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t(1-ix)} dt.$$

Q14. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p}{p!} \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t} dt = \frac{i^p}{p!} \Gamma_{2p} = i^p \frac{(2p)!}{p!}.$$

De plus,

$$\frac{\left| i^{p+1} \frac{(2p+2)!}{(p+1)!} \right|}{\left| i^p \frac{(2p)!}{p!} \right|} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{p+1} \sim 4p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, par le critère de D'Alembert,

$$\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p \text{ est nul.}$$

Par l'absurde, si f est développable en série entière en 0, alors il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p.$$

Or, on vient de voir que la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$ a un rayon de convergence nul. Dans l'égalité précédente, la somme de la série n'est donc pas définie pour $x \neq 0$. Contradiction.

Ainsi,

$$f \text{ n'est pas développable en série entière en 0.}$$

Q15. On note :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{-k(1-ikx)}.$$

► Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2 x}.$$

► Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|g_k(x)| = (e^{-1})^k$. On reconnaît une série géométrique de raison e^{-1} avec $|e^{-1}| < 1$.

Donc, la série numérique $\sum |g_k(x)|$ converge absolument, donc, converge.

Donc, la série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

► Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a : $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p} e^{-k}$.

Donc, $\|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k} \underset{p \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ (croissances comparées).

De plus, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (car $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, $\sum \|g_k^{(p)}\|_\infty$ converge.

Donc, la série de fonction $\sum g_k^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

Par théorème,

$$g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.$$

De plus,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} e^{ik^2 x}.$$

Q16. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\left| g^{(p)}(0) \right| = \left| i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right| = p^{2p} e^{-p} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{+\infty} k^{2p} e^{-k}}_{\geq 0} \geq p^{2p} e^{-p}.$$

Donc,

$$\left| g^{(p)}(0) \right| \geq p^{2p} e^{-p}.$$

Q17. Par théorème de comparaison, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$ est inférieur au rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$.

D'autre part,

$$\frac{\left| \frac{(p+1)^{2p+2} e^{-p-1}}{(p+1)!} \right|}{\left| \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} \right|} = \frac{e^{-1}}{(p+1)} \times (p+1)^2 \times \underbrace{\left(\frac{p+1}{p} \right)^{2p}}_{\geq 1} \geq (p+1) e^{-1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$ est nul.

Donc,

$$\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p \text{ est nul.}$$

Comme pour la fonction f , on en déduit que

g n'est pas développable en série entière en 0.

Partie II – Le théorème de Borel

Q18. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Q19. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \frac{1}{x-i}$.

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Q20. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p -ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Q21. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.

En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q22. Pour tout réel α , notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1 + n! a_n^2 x^2}.$$

Q23. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!} a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, tout entier $n \geq p$ et tout réel x , on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q24. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q25. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout réel x , on a :

$$\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

Q26. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q27. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geq 1$, on a : $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$.

Q28. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX^e siècle.

Réponse

Q18. On a : $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$. On a donc la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1 + X^2} = \frac{a}{X - i} + \frac{b}{X + i},$$

où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

On multiplie l'égalité précédente et on évalue en i : on trouve $a = \frac{1}{2i}$.

De même, on multiplie l'égalité précédente et on évalue en $-i$: on trouve $b = -\frac{1}{2i}$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right).$$

Q19. La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas).

Initialisation. On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(-1)^p p!}{(x - i)^{p+1}} = \frac{1}{x - i} = \psi^{(0)}(x).$$

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x - i)^{p+1}} = (-1)^p p! (x - i)^{-(p+1)}.$$

On dérive :

$$\psi^{(p+1)}(x) = (-1)^p p! (-(p+1)) (x - i)^{-(p+1)-1} = \frac{(-1)^{p+1} (p+1)!}{(x - i)^{p+2}}.$$

Donc, par le principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x - i)^{p+1}}.$$

On a :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right) = \frac{1}{2i} (\psi(x) - \overline{\psi(x)}).$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{1}{2i} \left(\psi^{(p)}(x) - \overline{\psi^{(p)}(x)} \right).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}} \right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \times \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}.$$

Q20. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| = |2i \operatorname{Im}((x+i)^{p+1})| \leq 2|(x+i)^{p+1}| = 2|x+i|^{p+1} = 2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{p+1}.$$

Donc,

$$|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}.$$

On en déduit que :

$$\left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| = \left| \frac{(-1)^p p!}{2i} \times \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}} \right| \leq \frac{p!(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(x^2+1)^{p+1}} \leq \frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}.$$

Or, pour $x \neq 0$, on a : $x^2 + 1 \geq x^2 > 0$. Donc,

$$\left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

Q21. On a : $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$.

Cas 1 : $\alpha = 0$. Dans ce cas, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$|\alpha| \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| = 0 \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Cas 2 : $\alpha \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

En appliquant **Q21** avec x remplacé par αx , on a :

$$\left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| = \left| \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x) \right| \leq \frac{|\alpha|^p p!}{|\alpha x|^{p+1}} \leq \frac{p!}{|x|^{p+1} \times |\alpha|}.$$

Ainsi, en multipliant par $|\alpha| > 0$, on a :

$$|\alpha| \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}},$$

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$u_n(x) = a_n x^n \varphi_{a_n}(x).$$

Les fonctions $x \mapsto x^n$ est φ_{a_n} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc, D'après la formule de Leibniz : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u_n^{(p)}(x) &= a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^n) \varphi_{a_n}^{(p-k)}(x) \\ &= a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n(n-1)\dots(n-k+1) x^{n-k} \varphi_{a_n}^{(p-k)}(x) \\ &= a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{a_n}^{(p-k)}(x). \end{aligned}$$

Q23. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a :

$$u_n^{(p)}(0) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} 0^{n-k} \varphi_{a_n}^{(p-k)}(0).$$

Comme $p \leq n-1$ et $0 \leq k \leq p$, on a $n-k \geq n-p \geq 1 > 0$. Donc, $0^{n-k} = 0$ et

$$u_n^{(p)}(0) = 0.$$

On a :

$$u_n^{(n)}(0) = a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} 0^{n-k} \varphi_{a_n}^{(n-k)}(0) = a_n \frac{n!}{0!} \varphi_{a_n}^{(n-n)}(0) + a_n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} 0^{n-k} \varphi_{a_n}^{(n-k)}(0).$$

Comme précédemment, si $k \leq n-1$, alors $n-k \geq 1$ et $0^{n-k} = 0$. Donc,

$$u_n^{(n)}(0) = a_n \frac{n!}{0!} \varphi_{a_n}^{(n-n)}(0) = n! a_n \varphi_{a_n}(0) = n! a_n.$$

Q24. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}$.

Cas 1 : $x = 0$. On a bien $|u_n^{(p)}(0)| = 0 \leq \frac{|0|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n$.

Cas 2 : $x \neq 0$. Par **Q22** et **Q23**,

$$\begin{aligned} |u_n^{(p)}(x)| &\leq |a_n| \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} |\varphi_{a_n}^{(p-k)}(x)| \\ &\leq \sqrt{n!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{1}{(n-k)!} |x|^{n-k} |a_n| |\varphi_{a_n}^{(p-k)}(x)| \\ &\leq \sqrt{n!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{1}{(n-k)!} |x|^{n-k} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}} \\ &\leq \sqrt{n!} |x|^{n-p-1} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(p-k)!}{(n-k)!} \\ &\leq \sqrt{n!} |x|^{n-p-1} p! \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!(n-k)!} \\ &\leq \sqrt{n!} |x|^{n-p-1} \frac{p!}{n!} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \\ &\leq \sqrt{n!} |x|^{n-p-1} \frac{p!}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Donc, par la formule du binôme de Newton,

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

Q25. ► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

► Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|u_n(x)| = |u_n^{(0)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-1}}{\sqrt{n!}} \times 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (croissances comparées).

Or, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc, converge.

Donc, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

► Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a, a]$,

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n \leq \underbrace{\frac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

Donc,

$$\|u_n^{(p)}\|_{[-a, a]} \leq \frac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, par théorème de comparaison, $\sum \|u_n^{(p)}\|_{[-a,a]}^\infty$ converge.

Donc, $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément sur $[-a,a]$.

Par théorème, $x \mapsto \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est bien définie sur $[-a,a]$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a,a]$.

Comme $u_0 : x \mapsto \frac{a_0}{1+a_0x^2}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a,a]$.

On en déduit que U est bien définie sur $[-a,a]$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a,a]$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc,

U est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q26. On a : $U(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0)$.

$$\text{Or, } u_n(0) = \begin{cases} a_n & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Donc,

$$U(0) = a_n.$$

Soit $p \geq 1$. Par la question précédente,

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n^{(p)}(0).$$

Or, par **Q24**, pour $p \leq n-1$ (autrement dit $n \geq p+1$), $u_n^{(p)}(0) = 0$; de plus, $u_p^{(p)}(0) = p!a_p$.

Donc,

$$\sum_{n=0}^p u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p.$$

Q27. Soit $(b_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On cherche une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} b_0 &= a_0, \\ \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b_p &= \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p. \end{cases}$$

On construit la suite (a_n) par récurrence :

$$\begin{cases} a_0 &= b_0, \\ a_0 &= a_0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) &= a_0 \varphi_{a_0}(x), \end{cases} \quad \text{puis : } \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \begin{cases} a_p &= \frac{1}{p!} \left(b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) \right), \\ a_p &= \sqrt[p]{p!} a_p, \\ \forall x \in \mathbb{R}, u_p(x) &= a_p x^p \varphi_{a_p}(x). \end{cases}$$

On note f la somme de séries de fonctions $\sum u_n$.

Par **Q26** et **Q27**, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $f(0) = a_0 = b_0$ et, pour tout $p \geq 1$, $f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p = b_p$.

Problème 2 : Étude de séries de pile ou de face (CCINP 2022 PC)

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

$$\textbf{Exemple 1 : } \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \dots$$

$$\textbf{Exemple 2 : } \underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n° 3}}.$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q29. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k.$$

Q30. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Q31. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.

Q32. Montrer que $\mathbb{P}(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q33. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(L_1 = 0)$.

Q34. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Réponse

Q29. La série entière $\sum_{k \geq 0} x^k$ a

un rayon de convergence égal à 1

et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Q30. Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

Donc, le rayon de convergence de $\sum kx^k$ est 1. De plus, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence de la série :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}.$$

Donc, en multipliant par x ,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k.$$

Ainsi,

$$\text{pour tout } x \in]-1, 1[, \text{ la série } \sum_{k \geq 0} kx^k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q31. L'évènement $(L_1 = k)$ est réalisé si et seulement si la première série est de longueur k , c'est-à-dire les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$ -ième lancer donne un résultat différent. On a donc

$$(L_1 = k) = (P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1})$$

Q32. Les évènements $P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$ sont disjoints, donc,

$$\mathbb{P}(L_1 = k) = \mathbb{P}(P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}).$$

Les lancers sont indépendants et la pièce est équilibrée, donc,

$$\mathbb{P}(L_1 = k) = \mathbb{P}(P_1) \times \dots \times \mathbb{P}(P_k) \times \mathbb{P}(F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(L_1 = k) = \frac{1}{2^k}.$$

Q33. La variable aléatoire L_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donc, la famille $((L_1 = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité. Donc,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = k) = 1.$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On reconnaît une somme de série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc,

$$\mathbb{P}(L_1 = 0) = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 0.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(L_1 = 0) = 0.$$

Q34. Montrons que $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument.

On a $|k\mathbb{P}(X = k)| = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (égalité encore valable pour $k = 0$).

Par **Q30** avec $x = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$, $\sum k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge.

Donc, $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument. On en déduit que

L_1 possède une espérance.

De plus,

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Donc,

$$\mathbb{E}(L_1) = 2.$$

Ainsi, en moyenne, la première série dans la suite de lancers est de longueur 2.

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

Q35. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .

Q36. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

Q37. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ les relations :

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n),$$

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n),$$

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n).$$

Q38. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la relation :

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(N_m = k)x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

Q39. Dédurre de **Q38.** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x).$$

Q40. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Q41. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .

Q42. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .

Réponse

Q35. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer. Donc,

N_1 est constante égale à 1.

La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers. Donc,

► $N_1 = 1$ lorsque les deux premiers lancers donnent le même résultat. Donc,

$$(N_2 = 1) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2).$$

► $N_2 = 2$ lorsque les deux premiers lancers donnent des résultats différents. Donc,

$$(N_2 = 2) = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2).$$

Les événements $(P_1 \cap P_2)$ et $(F_1 \cap F_2)$ sont disjoints, donc,

$$\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2).$$

Comme les lancers sont indépendants et la pièce est équilibrée :

$$\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

De plus, $\mathbb{P}(N_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(N_2 = 1) = \frac{1}{2}$.

Donc,

N_2 suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$

Q36. Au cours des n premiers lancers, il y a au moins une série et, au maximum, n séries apparaissent (cas où il y a alternance de pile et face au cours des n lancers).

Donc,

$$N_n \text{ est à valeurs dans } \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Q37. Lorsque l'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, le $(n+1)$ -ième lancer donne le même résultat que le n -ième. Il n'y a donc pas de nouvelle série démarrée par ce $(n+1)$ -ième lancer.

Donc,

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$$

Les événements $(N_n = k)$ et P_n ne font intervenir que les n premiers lancers, donc, P_{n+1} est indépendant de $(N_n = k) \cap P_n$.

Donc,

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n).$$

Q38. Les événements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ sont deux à deux incompatibles et au moins un des événements est réalisé lors des lancers n et $n+1$.

Donc,

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1}) \text{ est un système complet d'événements.}$$

Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{n+1} = k) &= \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ &\quad + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) + \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n) + \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n) \right). \end{aligned}$$

En utilisant la formule des probabilités totales avec les systèmes complets d'événements (P_n, P_{n+1}) et (F_n, F_{n+1}) , on a :

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k-1).$$

Q39. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après **Q38**, on a

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_{n+1} = k) x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k-1) \right) x^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1) x^k. \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}(N_n = n+1) = 0$, donc, $\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k) x^k = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N_n = k) x^k = G_n(x)$.

De plus, par glissement d'indice,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1) x^k = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(N_n = j) x^{j+1} = x \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(N_n = j) x^j.$$

Comme $\mathbb{P}(N_n = 0) = 0$, on a $\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1) x^k = x G_n(x)$.

Ainsi,

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}G_n(x) + \frac{1}{2}xG_n(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x).$$

Q40. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$.
Ainsi,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, G_n(x) = x \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-1}$$

Q41. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction G_n est dérivable en 1, donc, par théorème

$$N_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(N_n) = G'_n(1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'_n(x) = \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-1} + x \times (n-1) \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-2}.$$

Donc,

$$\mathbb{E}(N_n) = G'_n(1) = \frac{n+1}{2}$$

Q42. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire N_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N_n = k) x^k.$$

D'autre part, d'après **Q40** : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}} x^{k+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}} x^k.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}.$$