Nombres complexes – Fiche de cours

1. Rappels nombres complexes

a. Définition

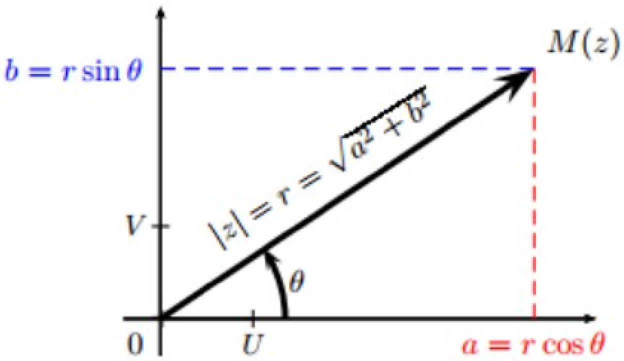
Un nombre complexe est défini par :

$z = x + iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe

x : partie réelle notée $\mathrm{Re}(z)$ y : partie imaginaire notée $\mathrm{Im}(z)$

b. Forme trigonométrique

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ ayant pour image M dans le repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$



On définit le module de z par $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $r > 0$

ou bien $|(z)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$

On définit un argument de z par $\theta = arg(z) = (\vec{u};\overrightarrow{OM}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

La forme trigonométrique est définie par : $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$

2. Forme exponentielle

a. Définition

La forme exponentielle d'un nombre complexe est définie par :

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \theta}$$

b. Propriétés

Soit θ et θ' des nombres réels et n un nombre entier

- produit : $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- quotient : $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- puissance : $(e^{i\theta})^n = e^{i \cdot n\theta}$

3. Trigonométrie

a. Formule d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

b. Formule de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\cos a \, . \, \sin a$$

c. Linéarisation et intégrales

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_T \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{T}\int_T \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}$$

4. Transformations du plan

Soit z affixe du point M du plan et z' l'affixe de son image M' dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ par une transformation du plan

- translation $M'=\vec{t}_{\vec{u}}(M)$ $z'=z+z_{\vec{u}}$
- homothétie $M'=\overrightarrow{h_{O,a}}(M)$ $z'=a\cdot z$ avec $a\in\mathbb{R}$
- rotation $M'=\overrightarrow{h_{O,\theta}}(M)$ $z'=a\cdot z$ avec $\theta=arg(a)$

Nombres complexes – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

1. Déterminer le module et l'argument des nombres :

$z_1 = 2 - 2i \qquad z_2 = \sqrt{3} - i \qquad z_3 = -3i \qquad z_4 = 2 + 2i\sqrt{3}$

2. Ecrire sous forme exponentielle les nombres suivants :

$z_1 \qquad z_2 \qquad z_3 \qquad z_4$

$z_2 z_3 \qquad z_3 z_4 \qquad (z_2)^3 \qquad \dfrac{z_4}{z_2}$

Exercice 2 **corrigé disponible**

1. Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants :

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4} \qquad z_2 = 2\, e^{i5\pi/6} \qquad z_3 = 4\, e^{-i2\pi/3} \qquad z_4 = 2\, e^{-i\pi/2}$

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, placer les points suivants :

$A(z_1) \qquad B(z_2) \qquad C(z_3) \qquad D(z_4)$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i \qquad z_B = z_A \times 2\, e^{i\pi/3} \qquad z_C = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

1. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_A, z_B et z_C.

b. Vérifier que $z_B = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$

c. En déduire que $\cos \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

d. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm.

2. a. Démontrer que le triangle OAB est un triangle rectangle.

b. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle OAB et construire ce cercle.

3. Déterminer la nature du quadrilatère OABC et prouver que le point C appartient au cercle circonscrit au triangle OAB.

Exercice 4 **corrigé disponible**

a. Calculer $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$

b. A l'aide des formules d'addition, calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

c. Vérifier les résultats de la question b.

Exercice 5 **corrigé disponible**

a. Calculer $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

b. A l'aide des formules d'addition, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

c. Calculer $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$; calculer $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 6

1. En utilisant les formules d'addition, démontrer que :

a. $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$

b. $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$

c. $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

2. Transformer les produits suivants en sommes :

a. $A = \cos 3x \cdot \cos 2x$

b. $B = \sin 4x \cdot \sin 2x$

c. $C = \sin x \cdot \cos 3x$

Exercice 7

Linéariser les expressions suivantes

a. $A = \cos^2(2x)$

b. $B = \sin^2(3x)$

Exercice 8

a. Vérifier que $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

b. En posant $a = \frac{\pi}{12}$ et en utilisant les formules de duplication, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 9

a. Vérifier que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

b. En posant $a = \frac{\pi}{8}$ et en utilisant les formules de duplication, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 10

Soit $z_A=3+4i$ l'affixe du point $A(z)$ placé dans le plan complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$

1. Calculer l'affixe du point B image de A par la translation de vecteur $\vec{u}(1,4)$
2. Calculer l'affixe du point C image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $a=4$
3. Calculer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle $\theta=\frac{\pi}{3}$
4. Soient les nombres complexes suivants : $z_E=1+i$; $z_F=\frac{1}{3}+\frac{i}{3}$; $z_G=(1+i)^2$ $z_H=5-i$; indiquer la nature et les éléments caractéristiques des transformations du plan suivantes :

F est l'image de E G est l'image de E H est l'image de E

Exercice 11

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{-1+\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}$$

1. Mettre z sous forme algébrique. Détailler les calculs.
2. Mettre z sous forme exponentielle. Détailler les calculs.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

Soit A et B les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Les points A et B sont correctement représentés sur l'une des figures ci-dessous. Laquelle ? Aucune justification n'est attendue.

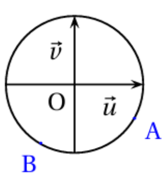


Figure 1

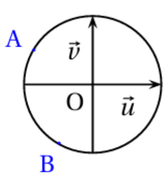


Figure 2

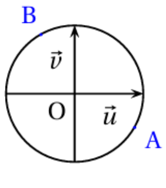


Figure 3

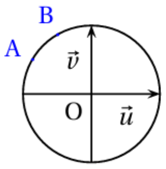


Figure 4

2. Montrer qu'un argument de $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}}$ est $\dfrac{-\pi}{2}$.

Exercice 13

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$:
On pose $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z' = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z. Détailler les calculs.
2. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z}{z'}$.

Exercice 14

Un filtre dans un circuit électrique permet de transmettre sélectivement certaines composantes du spectre en fréquence d'un signal.

On considère le filtre, composé d'une résistance R et d'un condensateur C.

On appelle fonction de transfert de ce filtre, la fonction H définie par :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + RC\omega\cdot\mathrm{i}}$$

où

— i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$;
— R est la résistance, exprimée en Ohm, ayant pour valeur $10^6\,\Omega$;
— C est la capacité du condensateur, exprimée en Farad, ayant pour valeur 10^{-6} F ;
— ω est la pulsation du signal aux bornes du circuit, exprimée en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

La pulsation de coupure du filtre est définie par $\omega_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{RC}$.

1. Calculer ω_c, puis montrer que $H(\omega_c) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
2. Écrire $H(\omega_c)$ sous forme exponentielle.

   La réponse en gain du circuit, notée G_{dB} et exprimée en décibel, vaut pour cette fréquence de coupure :

$$G_{dB} = 20\log(|H(\omega_c)|)$$

   où $|H(\omega_c)|$ est le module de $H(\omega_c)$.

3. Montrer que $G_{dB} = -10\log(2)$.

On pose en cascade un deuxième filtre identique de même pulsation de coupure qui est tel que la fonction de transfert de ces deux filtres, notée $H_T(\omega_c)$, est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des deux filtres. Ainsi :

$$H_T(\omega_c) = H(w_c) \times H(\omega_c)\,.$$

4. Déduire de la question 2 le module et un argument de $H_T(\omega_c)$.

Exercice 15

On considère les nombres complexes $z_1 = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Écrire z_2 sous forme exponentielle.
   Détailler les calculs.
2. En déduire une écriture du nombre complexe $Z = \dfrac{z_1}{z_2^3}$ sous forme exponentielle.

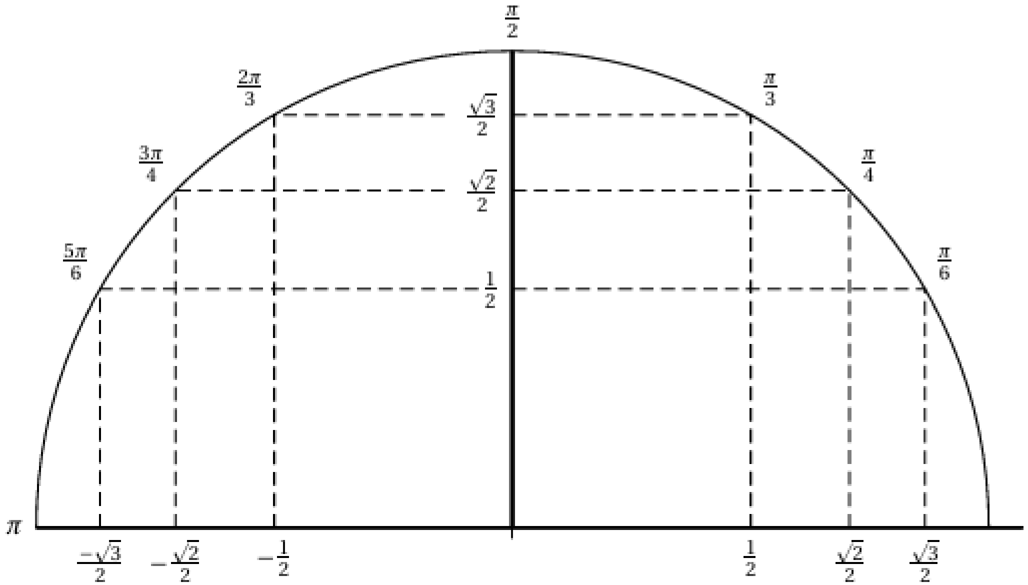
Exercice 16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

Le point M d'affixe z_M vérifie les conditions suivantes :

- M appartient au cercle de centre O et de rayon 6 ;
- la partie réelle de z_M est négative ;
- la partie imaginaire de z_M est égale à 3.

1. Soit θ la mesure dans $[0\,;\,2\pi[$ de l'argument du nombre complexe z_M.
   Déterminer $\sin(\theta)$.
2. À l'aide du demi-cercle trigonométrique ci-dessous, donner la valeur exacte de θ. Justifier.
3. En déduire l'écriture exponentielle de z_M.



Exercice 17

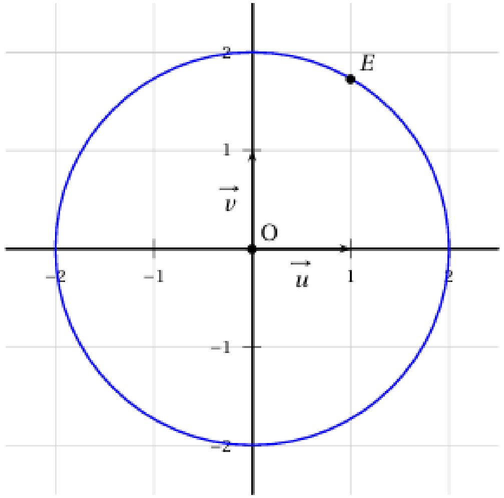
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient z_1 et z_2 les nombres complexes définis par :

$$z_1 = \sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

1. Écrire z_1 sous forme exponentielle, en détaillant les calculs.
2. Montrer que $2z_2^3 = z_1$.

Exercice 18

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
Sur le graphique suivant, on considère le point E dont l'affixe est notée : Z_E.



Par lecture graphique, donner l'écriture exponentielle de Z_E.

Exercice 19

Rappel : Pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

La tension u (exprimée en volt) aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t (exprimé en seconde) est donnée par :

$$u(t) = \frac{7\sqrt{3}}{4}\cos(100t) - \frac{7}{4}\sin(100t)$$

a. Transformer l'écriture de u sous la forme $u(t) = U_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ où :

- $U_{\max}$ représente la tension maximale (exprimée en V) ;
- ω représente la pulsation (exprimée en rad·s^{-1}) ;
- φ représente le déphasage (exprimé en rad).

b. En déduire la valeur du déphasage φ de $u(t)$.

Exercice 20

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Question 1. On considère le nombre complexe $z_1 = \frac{2-6\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$.
Déterminer la forme algébrique de z_1.

Question 2. Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = -2-2\mathrm{i}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de z_2.

b. Montrer que z_2^4 est un nombre réel que l'on déterminera.

Question 3. On considère A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 2-2\mathrm{i}, \qquad z_B = -2-2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_C = -4\mathrm{i}.$$

a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

b. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 21

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) z_1 de module 2 et dont un des arguments est $\frac{\pi}{3}$

b) z_2 de module 4 et dont un des arguments est $\frac{2\pi}{3}$

c) z_3 de module 3 et dont un des arguments est $-\frac{5\pi}{6}$

d) z_4 de module $\sqrt{3}$ et dont un des arguments est $\frac{3\pi}{4}$

Exercice 22

Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants

a) $z=\sqrt{3}+i$ b) $z=2-2i\sqrt{3}$ c) $z=8$

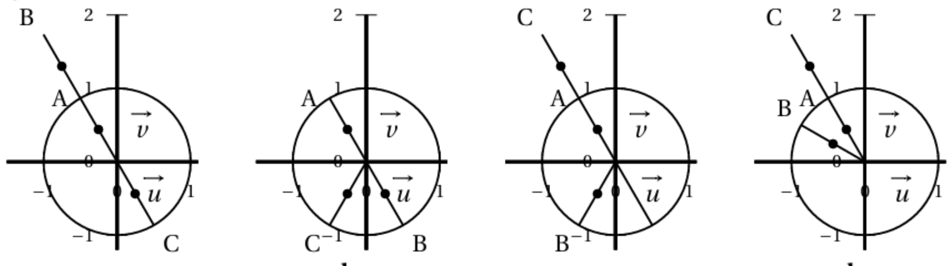
d) $z=-2i$ e) $z=-6-6i$

Exercice 23

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $z_A=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $z_B=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ et $z_C=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Le graphique correct est :



a. b. c. d.

Exercice 24

Indiquer la réponse vraie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Le point A a pour affixe $z_A=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et le point B a pour affixe $z_B=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

a. Les points A et B sont confondus.

b. Les points A et B sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

c. Les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses du repère.

d. Les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

Exercice 25

Indiquer la réponse vraie

Une forme exponentielle de $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times 2\mathrm{i}$ est :

a. $4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

b. $4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

c. $4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

d. $4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 26

Les résistances et les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres.
Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence f, exprimée en Hertz (Hz).

micro → filtre → ampli → enceinte

Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide de deux nombres complexes z_R.

Dans tout l'exercice, on suppose que $z_R=10$ et

$z_C=-\dfrac{1\,000\sqrt{3}}{f}\mathrm{i}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie A : Effet du filtre sur un son grave

On choisit un son grave de fréquence $f = 100$.

1. Montrer que $z_C = -10\sqrt{3}\mathrm{i}$.
2. **a.** Déterminer la forme exponentielle de z_C.

   b. On considère le nombre complexe $Z = z_R + z_C$. On a donc $Z = 10 - 10\sqrt{3}\mathrm{i}$.
   Déterminer la forme exponentielle de Z.

   c. On considère le nombre complexe z_G défini par : $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C}$.

   Montrer que $z_G = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   d. Le module du nombre complexe z_G est appelé gain du filtre.
   Donner la valeur exacte du gain du filtre puis une valeur approchée au centième.

Partie B : Effet du filtre sur un son aigu

On choisit un son aigu de fréquence $f = 1\,000\sqrt{3}$.

1. Montrer que le nombre complexe z_G défini par $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C}$ est égal à $\dfrac{-\mathrm{i}}{10 - \mathrm{i}}$.
2. Déterminer la forme algébrique de z_G .
3. Calculer la valeur exacte du gain du filtre $|z_G|$ et en donner une valeur approchée au centième.

Exercice 27

On considère un signal électrique dont l'expression en fonction du temps t est donné par : $u(t) = \sqrt{3}\cdot\cos(t) - \sin(t)$

1. Montrer que le signal $u(t)$ peut s'écrire pour tout t réel sous la forme : $u() = 2\cdot\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$

2. Résoudre dans $[0\,;\pi[$ $u(t) = 1$

Exercice 28

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$

Les points O, A et B sont-ils alignés ?