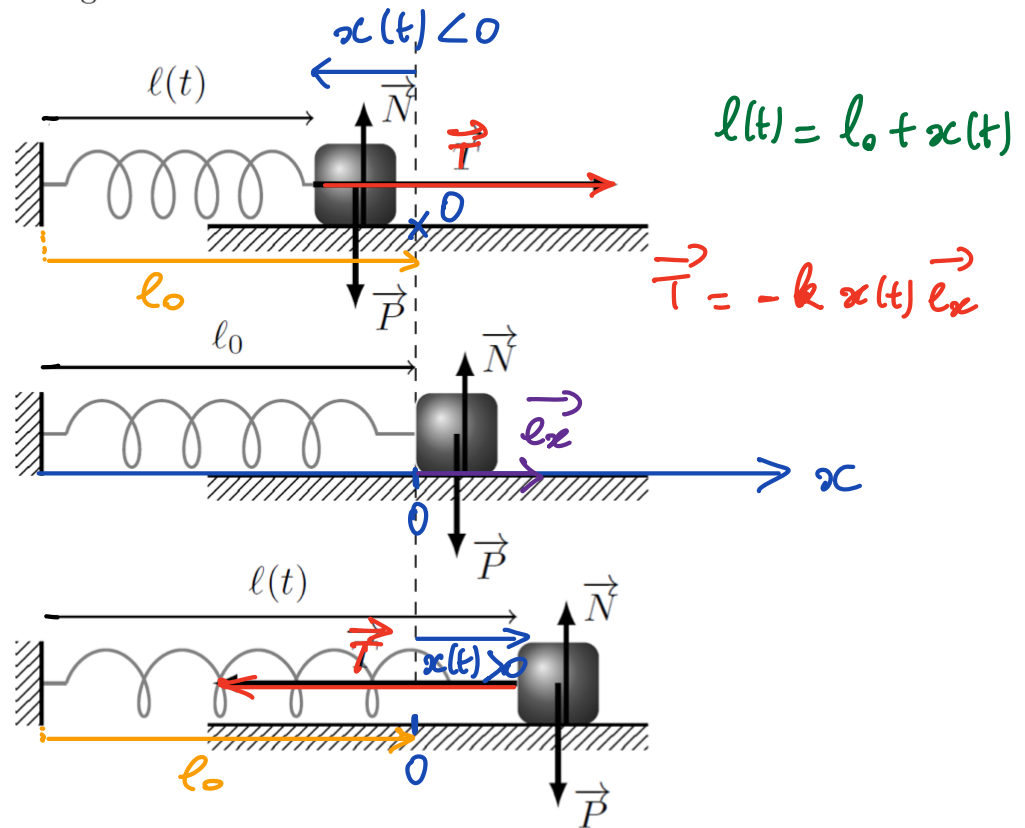


1 Oscillateur mécanique horizontal non amorti

Considérons un oscillateur harmonique horizontal¹, constitué d'un mobile de masse $m = 1 \text{ kg}$ attaché à un ressort de constante de raideur $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0 , qui oscille sans frottements le long d'un axe horizontal sur une table à coussin d'air :



L'origine de l'axe (Ox) est pris à la position d'équilibre de la masse et on note $\ell(t)$ la longueur instantanée du ressort.

1.1 Exprimer $\ell(t)$ en fonction de $x(t)$ et ℓ_0 puis en déduire l'expression de la force de rappel élastique $\vec{T}$.

Gm a
$$\vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{e}_x = -k x(t) \vec{e}_x$$

1.2 Trouver l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

en donnant la signification physique, l'expression puis la valeur numérique de ω_0 .

le PFD en projection sur l'axe (Ox) :

$$m \ddot{x} = -kx \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (ED).$$

ω_0^2 : où ω_0 est la pulsation propre.

$$AN: \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad Rq: [k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{N \cdot L \cdot T^{-2}}{L} = N \cdot T^{-2}$$

$$\text{puis } [\omega_0] = \left(\frac{[k]}{[m]} \right)^{1/2} = \left(\frac{N \cdot T^{-2}}{N} \right)^{1/2} = T^{-1}$$

1.3 Exprimer puis calculer la période propre T_0 de cet oscillateur.

$$\text{On sait que } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6,3 \text{ s}.$$

On écarte le mobile de sa position d'équilibre puis on le lâche sans vitesse initiale à l'abscisse $a = 5 \text{ cm}$.

1.4 Trouver l'expression de $x(t)$ puis tracer sa courbe.

la solution générale de (ED) est :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

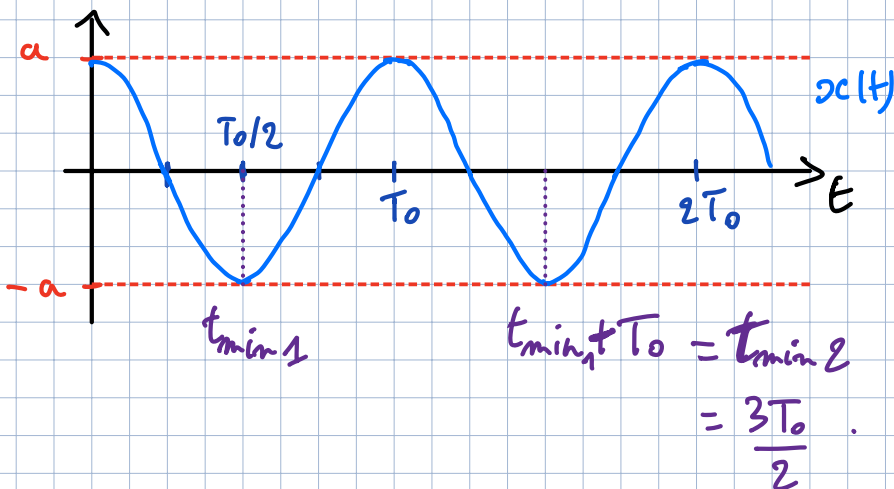
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

les C.I. sont $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$:

$$x(0) = a \Leftrightarrow a = A \underbrace{\cos(\omega_0 \times 0)}_1 + B \underbrace{\sin(\omega_0 \times 0)}_0 \Leftrightarrow A = a$$

$$\text{et } \dot{x}(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = -A\omega_0 \underbrace{\sin(\omega_0 \times 0)}_0 + B\omega_0 \underbrace{\cos(\omega_0 \times 0)}_1 \Leftrightarrow B = 0$$

$$\text{Au final : } x(t) = a \cos(\omega_0 t)$$



$$\{t_{\min}\} = \left\{ \frac{T_0}{2} + nT_0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

1.5 Quelle est la valeur minimale $x_{\min}$ de $x(t)$ et à quels instants est-elle atteinte ?

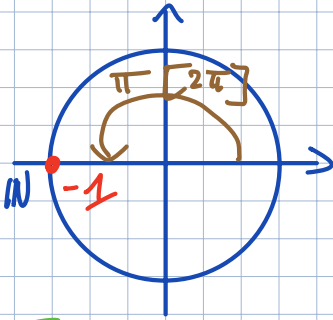
On a $x_{\min} = -a$.

Les instants $t_{\min}$ tq $x(t_{\min}) = -a$ sont tels que :

$$a \cos(\omega_0 t_{\min}) = -a \Leftrightarrow \omega_0 t_{\min} = \frac{\pi}{\omega_0} \left[\frac{2\pi}{\omega_0} \right] = \frac{\pi}{\omega_0} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow t_{\min} = \frac{\pi}{\omega_0} \left[\frac{2\pi}{\omega_0} \right] = \frac{T_0}{2} \left[T_0 \right]$$

car $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
 $\Leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T_0}{2}$



1.6 Exprimer puis calculer l'énergie mécanique E_m de cet oscillateur.

On rappelle $E_{pe}(t) = \frac{1}{2} k (l(t) - l_0)^2 = \frac{1}{2} k x^2(t)$

et $E_c(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$; $E_m(t) = E_c(t) + E_{pe}(t)$.

On calcule : $E_{pe}(t) = \frac{1}{2} k (a \cos(\omega_0 t))^2 = \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega_0 t)$

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m (-a \omega_0 \sin(\omega_0 t))^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2} k a^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

d'où $E_m(t) = \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k a^2 \sin^2(\omega_0 t)$

$$= \frac{1}{2} k a^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))$$

$$= \frac{1}{2} k a^2 \times 1 = \frac{1}{2} \times 1 \times (5 \cdot 10^{-2})^2 = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

◇ Désormais on écarte le mobile de sa position d'équilibre puis on le lâche avec une vitesse initiale algébrique v_0 à l'abscisse $a = 5 \text{ cm}$. On cherche une solution de la forme : $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

avec $x_m > 0$ et $\varphi \in]-\pi; \pi]$.

1.7 Montrer que
$$\begin{cases} x_m = \sqrt{a^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \cos \varphi = \frac{a}{x_m} \text{ et } \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_m} \end{cases}$$

2 ctes qui dépendent des C.I. connues.

$$\dot{x}(t) = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

C.I. 1: $x(0) = a$
 C.I. 2: $\dot{x}(0) = v_0$

C.I.
$$\begin{cases} x(0) = a \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi = a \\ -x_m \omega_0 \sin \varphi = v_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi = a & (1) \\ x_m \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0} & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{x_m} \\ \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_m} \end{cases}$$

Alors $(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow x_m^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) = a^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$

$$\Rightarrow x_m = \sqrt{a^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

1.8 En déduire l'expression analytique de $x(t)$ pour $v_0 = 5 \text{ cm.s}^{-1}$ ^{ou} et pour $v_0 = -5 \text{ cm.s}^{-1}$.

Dans les 2 cas : $x_m = \sqrt{5^2 + \left(\pm \frac{5}{1}\right)^2} = 7,07 \text{ cm}$

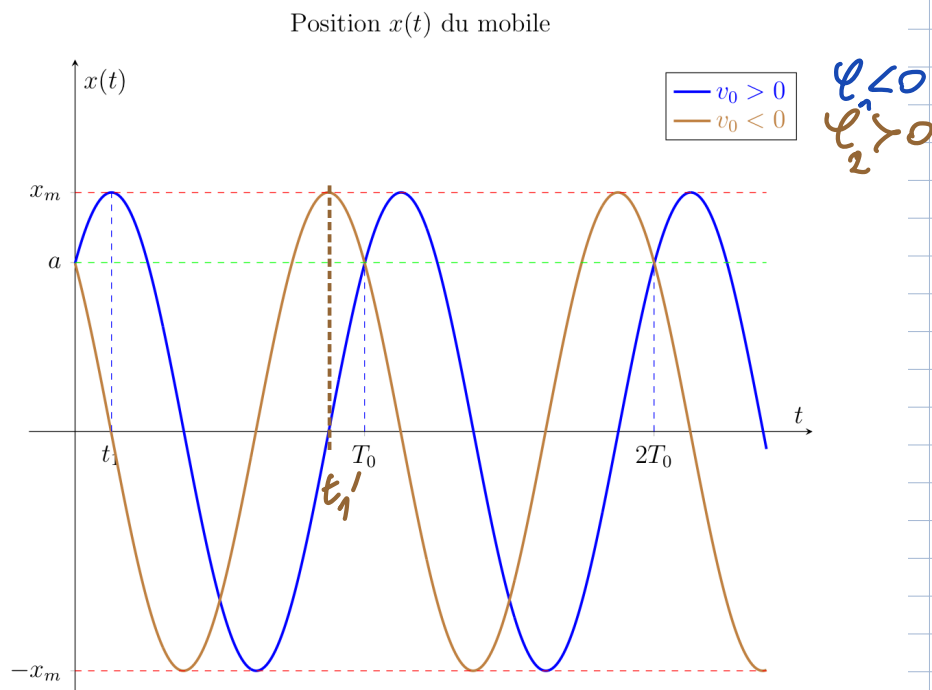
Cas où $v_0 > 0$: $\cos \varphi = \frac{a}{x_m}$ et $\sin \varphi < 0$

$$\Rightarrow \varphi = -\text{Arccos}\left(\frac{a}{x_m}\right) = -0,78 \text{ rad} = \varphi_1$$

Cas où $v_0 < 0$: $\cos \varphi = \frac{a}{x_m}$ et $\sin \varphi > 0$

$$\Rightarrow \varphi = \text{Arccos}\left(\frac{a}{x_m}\right) = +0,78 \text{ rad} = \varphi_2$$

1.9 Tracer les deux cas correspondants à l'aide de votre calculatrice préférée pour obtenir :



1.10 Dans le cas où $v_0 > 0$, déterminer le premier instant t_1 pour lequel $x(t)$ atteint sa valeur maximale.

l'instant t_1 est t_q : $x_m \Leftrightarrow (\omega_0 t_1 + \varphi_1) = x_m$

$\Leftrightarrow \omega_0 t_1 + \varphi_1 = 0 [2\pi]$ avec $\varphi_1 < 0$

$\Leftrightarrow t_1 = -\frac{\varphi_1}{\omega_0} [T_0]$

$\Leftrightarrow t_1 = 0,78 \text{ s}$

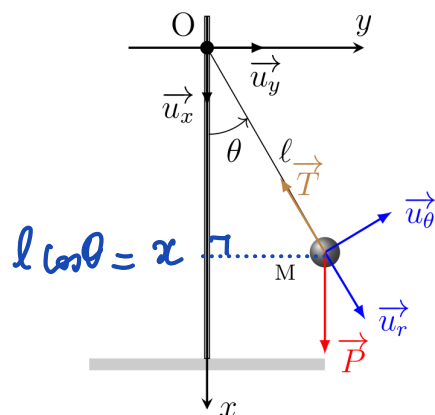
1.11 Dans le cas où $v_0 < 0$, déterminer le premier instant t'_1 pour lequel $x(t)$ atteint sa valeur maximale.

De même $t'_1 = -\frac{\varphi_2}{\omega_0} [T_0]$ avec $\varphi_2 > 0$

$\Rightarrow t'_1 = -\frac{\varphi_2}{\omega_0} + T_0 = 5,5 \text{ s}$

En effet je ne dois garder que la première solution positive parmi l'infinité de solutions possibles

2 Pendule simple



On considère un pendule simple de longueur $\ell = 80 \text{ cm}$ auquel on a accroché un mobile M de masse $m = 100 \text{ g}$. Le module de la vitesse du mobile est $v(t) = \ell \dot{\theta}(t)$ et son énergie potentielle de pesanteur vaut $E_{pp}(t) = -mgx(t)$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. On lâche M sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 = 10^\circ$. En l'absence de frottements, l'énergie mécanique du mobile se conserve.

2.1 Exprimer l'énergie mécanique E_m du mobile en fonction de $\theta(t)$ et des paramètres du système.

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 - mgx$$

$$= \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg \ell \cos \theta$$

2.2 En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ est de la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

L'énergie mécanique se conserve en conséquence : peut écrire que sa dérivée par rapport au temps est nulle:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2} m l^2} \times \cancel{\ddot{\theta}} \ddot{\theta} - \cancel{m g l} (-\cancel{\dot{\theta}} \sin \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Rappel : $\frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2) = \underbrace{2\dot{\theta}}_{f' \circ g} \times \underbrace{\ddot{\theta}}_{g'}$

car $(f \circ g)' = f' \circ g \times g'$ avec $f: x \rightarrow x^2$
 $g: t \rightarrow \dot{\theta}(t).$

2.3 Résoudre cette ED dans l'approximation des petits angles ($\sin \theta \approx \theta$).

Solution générale : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

donc $\dot{\theta}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

Les C.I sont : $\theta(0) = \theta_0$ connu.

$\dot{\theta}(0) = 0$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

C.I. 1 : $\theta(0) = \theta_0$

$\Leftrightarrow \underbrace{A \cos(\omega_0 \times 0)}_1 + \underbrace{B \sin(\omega_0 \times 0)}_0 = \theta_0$

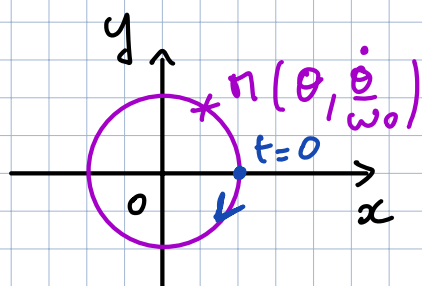
$\Leftrightarrow A = \theta_0$

C.I. 2 $\dot{\theta}(0) = 0$

$\Leftrightarrow -A \omega_0 \underbrace{\sin(\omega_0 \times 0)}_0 + B \omega_0 \underbrace{\cos(\omega_0 \times 0)}_1 = 0 \Rightarrow B = 0$

Au final on a : $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$

2.4 Montrer que le portrait de phase ² (courbe paramétrique telle que $x = \theta$ et $y = \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$) est un cercle.



$$\text{On a } OM^2 = \theta^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow OM^2 = \theta_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \left(\frac{-\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right)^2$$

$$= \theta_0^2 \underbrace{(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))}_1 = \theta_0^2.$$

2.5 A quel instant t_1 le pendule est-il à la position $\theta(t_1) = -\theta_0$?

$$\text{On a } \theta(t_1) = -\theta_0 \Leftrightarrow \theta_0 \cos(\omega_0 t_1) = -\theta_0$$

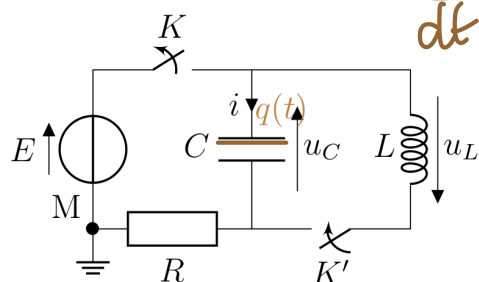
$$\Rightarrow \omega_0 t_1 = \pi \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 0,90 \text{ s.}$$

3 Circuit LC

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$q = C u_C.$$



On considère le circuit ci-contre où l'interrupteur K est fermé depuis suffisamment longtemps pour que la charge du condensateur soit terminée. On donne $E = 5 \text{ V}$, $C = 1 \mu\text{F}$ et $L = 1 \text{ mH}$. A $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K et on ferme K' .

On néglige toute résistance de la bobine

3.1 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ est :

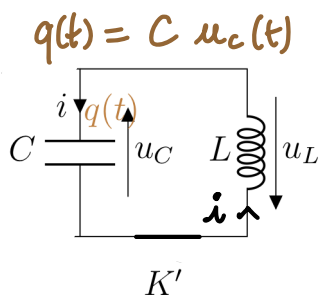
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$= C \frac{du_C}{dt}$$

$$= L \frac{di}{dt}$$

$$= L \ddot{q}$$



Loi des mailles :

$$u_C + u_L = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{LC}\right)}_{\omega_0^2} q = 0 \quad \times \frac{1}{L}$$

3.2 Quelle est la période T_0 des oscillations?

$$\text{On a } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{d'où} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \\ = 2 \times 10^{-4} \text{ s.}$$

3.3 Trouver l'expression analytique de $q(t)$ et tracer sa courbe représentative.

$$\text{C.I. : } q(0) = C u_c(0) = CE \quad (1)$$

$$i(0) = \frac{dq}{dt}(0) = 0 \quad (2)$$

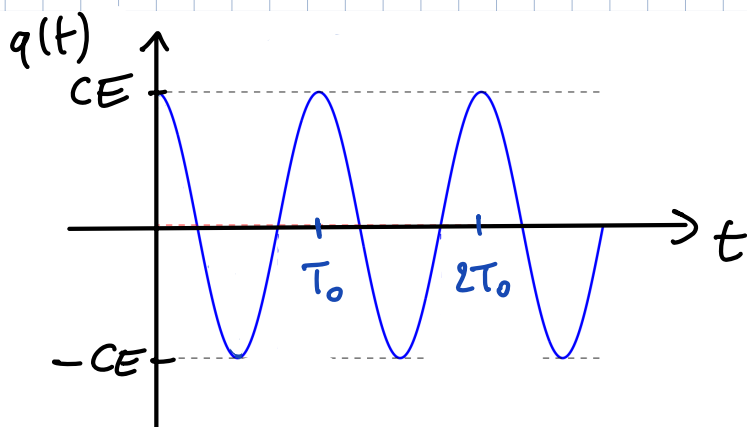
$$q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{et } \frac{d}{dt} q(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$(1) \text{ donne : } A \cos(0) + B \sin(0) = CE \\ \Rightarrow A = CE.$$

$$(2) \text{ donne : } -\omega_0 A \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = 0 \\ \Rightarrow B\omega_0 = 0 \\ \Rightarrow B = 0$$

$$\text{Au final, } q(t) = CE \cos(\omega_0 t).$$



3.4 Comparer les ED de $q(t)$ et de $x(t)$ pour l'oscillateur mécanique de l'exercice 1 pour dresser un tableau des grandeurs analogues.

$$\ddot{x} + k \times \frac{1}{m} x = 0$$

$$v = \dot{x}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{c} \times \frac{1}{L} q = 0$$

$$i = \dot{q}$$

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L i^2$$

$$E_{elec} = \frac{1}{2} C u_c^2 \quad \text{avec } u_c = \frac{q}{C}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{C} q^2 = \frac{1}{2C} (C u_c)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{C} \times C^2 u_c^2 = \frac{1}{2} C u_c^2$$

3.5 Exprimer puis calculer $\mathcal{E}_{tot}(t)$, l'énergie électromagnétique totale emmagasinée par le circuit à un instant t . Ce résultat vous paraît-il plausible d'un point de vue pratique? Justifier votre réponse.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathcal{E}_{tot} &= \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u_c^2 && \text{avec } q = C u_c \Leftrightarrow u_c = \frac{q}{C} \\ &= \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} && \text{avec } i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 C E \sin(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} L \left(-\omega_0 C E \sin(\omega_0 t) \right)^2 + \frac{1}{2C} \left(C E \cos(\omega_0 t) \right)^2 \\ &= \frac{L C E^2}{2} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{C E^2}{2} \cos^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} C E^2 = 1,25 \times 10^{-5} \text{ J} \end{aligned}$$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

L'énergie totale est égale à l'énergie initiale et est constante au cours du temps.

