



Exercice :

Soit U_n une suite définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 0,2 \\ U_0 = 5 \end{cases}$$

Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

$$P_n : \ll U_n > 0 \gg$$

INITIALISATION

P_0 est vraie car $U_0 = 5$
et $5 > 0$ donc $U_0 > 0$

HEREDITE

Supposons qu'il existe un n tel que P_n soit vraie, montrons alors P_{n+1} est aussi vraie :

$$\begin{aligned} P_n &\implies U_n > 0 \\ &\implies 3 \times U_n > 3 \times 0 \\ &\implies U_n + 0,2 > 0 + 0,2 \\ &\implies U_{n+1} > 0 \\ P_{n+1} &\implies U_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

CONCLUSION

P_n est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Supposons que pour un entier $n \geq 2$, la propriété $P(n)$: " $5^n \geq 4^n + 3^n$ " soit vraie. Montrons que $P(n+1)$: " \quad " est vraie.

Compléter les pointillés par :

- a. $5^n \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$
- b. $5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$
- c. $5^{n+1} \geq 4^n + 3^n$

2. Si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 3$ et est héréditaire à partir de $n = 6$, alors :

- a. elle est vraie pour tout $n \geq 3$,
- b. elle est vraie pour tout $n \geq 6$.
- c. on ne peut rien conclure.

3. Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété, " $n^2 + 3$ est un multiple de 3".

- a. $P(0)$ est vraie.
- b. $P(1)$ est vraie.
- c. Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie.

4. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n + 2$

Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété : " $u_n = 2 \times 3^n - 1$ "

On suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie.

- a. $P(k+1)$ est la propriété : " $u_{k+1} = 2 \times 3^k - 1$ ".
- b. $P(k+1)$ est vraie.
- c. la propriété n'est pas héréditaire.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 0,2u_n + 4$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $5 < u_n \leq 8$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.
3.
 - a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 3(0,2)^n + 5$
 - b) Écrire une fonction en python qui calcule u_N pour un N de \mathbb{N} quelconque.
 - c) Écrire le programme employant cette fonction.

Exercice 3 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Exercice 1

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ telle que $u_3 = 729$. Déterminer, en justifiant, la valeur de u_7 .
2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ telle que $v_{10} = 8$. Déterminer, en justifiant, la valeur de v_1 .

Exercice 2

Étudier les variations de la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$w_n = 2n^2 - 7n.$$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -4, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite est-elle arithmétique, géométrique? Justifier.

Exercice 4

Une association suit le nombre de bénévoles inscrits à ses activités. En 2020, il y a 80 bénévoles. Chaque année, environ 20 % des bénévoles arrêtent leur participation, et 12 nouvelles personnes s'inscrivent. On note u_n le nombre de bénévoles en $2020 + n$.

1. Déterminer le nombre de bénévoles en 2021.
2. Donner la valeur de u_0 et justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,8 u_n + 12.$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$60 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 60$. Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 4.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 12.$$

Exercice 1

On définit la suite (z_n) par $z_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = 4z_n - 5.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \frac{5 + 13 \cdot 4^n}{3}.$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n (3k + 1)^2.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{n(6n^2 + 15n + 11)}{2}.$$

Exercice 3

Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$w_{n+1} = w_n + 3n + 4.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 3.$$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = -\sqrt{3}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n - 1.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$-2 \leq u_n \leq -0,5.$$

Exercice 5

Soit (v_n) définie par

$$v_1 = 1, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{\sqrt{v_n^2 + 1}} \quad (n \geq 1).$$

1. Calculer v_2 et v_3 .
2. Conjecturer une expression simple de v_n en fonction de n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.