

Corrigé du TD TH4 : Machines thermiques.

Table des matières

1 Pompe à chaleur	1
1.1 Diagramme de principe	1
1.2 Efficacité thermique maximale théorique	1
1.3 Interprétation et efficacité thermique réelle	2
1.4 Puissance mécanique reçue	2
2 Climatiseur de voiture	3
2.1 Diagramme de principe	3
2.2 Puissance thermique échangée par le climatiseur avec l'habitacle	3
2.3 Puissance mécanique reçue par le climatiseur	3
2.4 Surconsommation due à la climatisation	3
3 Cogénération	4
3.1 Principe de l'innovation	4
3.2 Étude du moteur Stirling	4
4 Étude de machines thermiques	7
4.1 Étude préliminaire	7
4.2 Moteur à explosion	8

1 Pompe à chaleur

1.1 Diagramme de principe

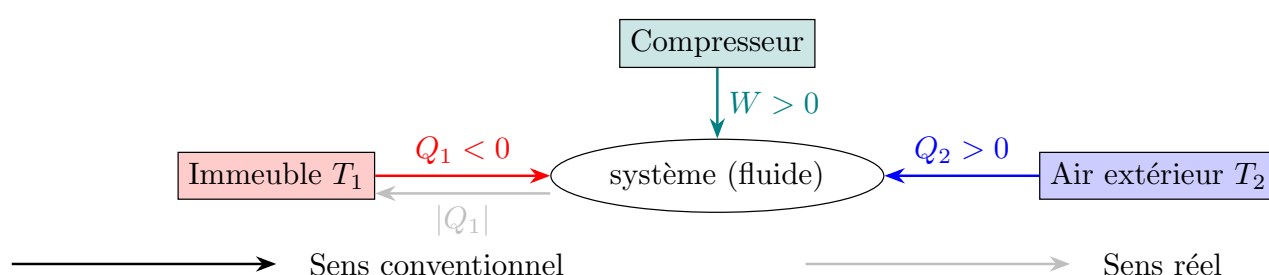


FIGURE 1 – Schéma de principe des échanges de la pompe à chaleur

1.2 Efficacité thermique maximale théorique

Pour un cycle complet de la machine, comme U est une fonction d'état on a $\Delta U = 0$, l'application du **premier principe** nous donne donc :

$$W + \sum_i Q_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W + Q_1 + Q_2 = 0$$

Appliquons le **deuxième principe** au fluide de la machine thermique au cours d'un cycle :

$$\Delta S = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} + S_c \Leftrightarrow \Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + S_c$$

Or $\Delta S = 0$ puisque le fonctionnement de la machine est cyclique et l'entropie créée vérifie $S_c \geq 0$. On en déduit l'inégalité de CLAUSIUS :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -S_c \leq 0$$

Une pompe à chaleur est un récepteur ($W > 0$) destiné à fournir de la chaleur à la source chaude ($Q_1 < 0$). Le signe des échanges est le même que pour machine frigorifique ($Q_2 > 0$) mais cette fois-ci l'énergie utile est $|Q_1|$, la chaleur reçue par la source chaude. Son **efficacité thermique** e_T est égale au rapport entre l'énergie utile et l'énergie dépensée :

$$e_T = \frac{|Q_1|}{W} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{1}{1 + \frac{Q_2}{Q_1}}$$

L'efficacité thermique maximale théorique est obtenue dans le cas d'une machine réversible pour laquelle $S_c = 0$, dans ce cas $e_T = e_{T_{\max}}$ et le second principe s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{Q_2}{T_2} &= -\frac{Q_1}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{Q_2}{Q_1} &= 1 - \frac{T_2}{T_1} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{Q_2}{Q_1}} = \frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_1}} \\ \Rightarrow e_{T_{\max}} &= \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 14,7 \end{aligned}$$

L'efficacité thermique maximale théorique de la machine pompe à chaleur dépend donc de la température des sources de chaleur.

1.3 Interprétation et efficacité thermique réelle

L'efficacité thermique est maximale pour le cas limite de la machine réversible. On remarque que la source froide T_2 étant donnée (milieu extérieur dans la plupart des cas), l'efficacité thermique maximale théorique est une fonction décroissante de la température de la source chaude T_1 .

La machine réelle a une efficacité inférieure à $e_{T_{\max}} = 14,7$, car elle n'est pas réversible (elle ne fonctionne pas suivant un cycle de CARNOT), on a en effet $e_T = 5$.

1.4 Puissance mécanique reçue

En Δt de une heure, le transfert thermique reçu par la source chaude est $-Q_1 = 10^8$ J, le fluide de la machine lui cède donc un transfert $Q_1 = -10^8$ J.

Ce qui correspond à une puissance thermique cédée par le fluide : $P_1 = \frac{-10^8}{3600} = -28$ kW

Au travail W correspond une puissance mécanique P_m reçue par le fluide telle que : $W = P_m \cdot \Delta t$
 Connaissant l'efficacité thermique, on obtient :

$$e_T = \frac{|Q_1|}{W} = \frac{-P_1 \Delta t}{P_m \Delta t}$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{-P_1}{e_T} = \frac{28}{5} = 5,6 \text{ kW}$$

2 Climatiseur de voiture

2.1 Diagramme de principe

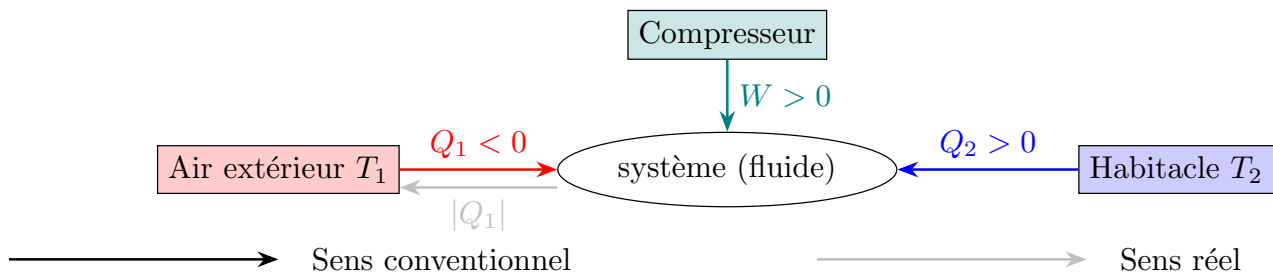


FIGURE 2 – Schéma de principe des échanges du climatiseur

2.2 Puissance thermique échangée par le climatiseur avec l'habitacle

Le fluide de la climatisation reçoit une puissance thermique $P_2 > 0$ de l'habitacle, donc l'habitacle cède donc une puissance thermique $-P_2 < 0$ au fluide de la climatisation. L'habitacle étant maintenu à température constante, son énergie interne ne varie pas et la somme des puissances thermiques qu'il échange est donc nulle :

$$-P_2 + P_{th} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_{th} = K(T_1 - T_2) = 170 \cdot 15 = 2,55 \text{ kW}$$

2.3 Puissance mécanique reçue par le climatiseur

La climatisation (machine frigorifique) est un récepteur ($W > 0$ dépensé) qui reçoit de la chaleur ($Q_2 > 0$ utile) de la source froide (l'habitacle) dans le but de la refroidir. On a donc $Q_1 = -W - Q_2 < 0$: la climatisation cède de la chaleur à la source chaude. La puissance thermique P_2 peut se déduire de l'efficacité frigorifique e_F qui est le rapport entre l'énergie utile et l'énergie dépensée :

$$e_F = \frac{Q_2}{W} = \frac{P_2}{P} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{P_2}{e_F} = 850 \text{ W}$$

2.4 Surconsommation due à la climatisation

La puissance thermique dégagée par la combustion de $V = 7 \text{ L}$ d'essence aux 100 km sur un parcours d'une heure vaut :

$$P_{comb} = \frac{35 \cdot 10^9}{3600} \times 7 = 68 \cdot 10^3 \text{ W} = 68 \text{ kW}$$

Le moteur de rendement η fournit alors une puissance mécanique utile P_m qui s'écrit :

$$P_m = \eta P_{comb} = 6,8 \text{ kW} \quad \text{pour 7L d'essence consommés}$$

La puissance mécanique P de la climatisation correspond donc à une surconsommation V' aux 100 km de :

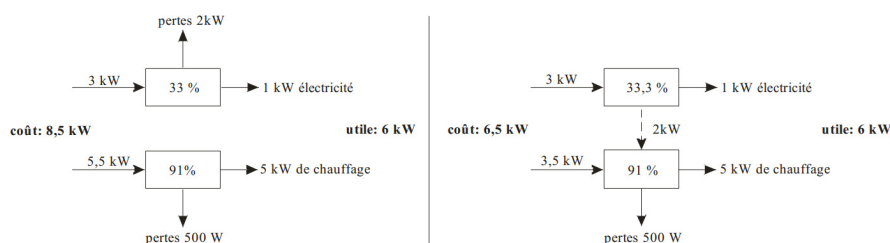
$$V' = \frac{V}{P_m} \cdot P = \frac{7}{6,8 \cdot 10^3} \cdot 850 = 0,87 \text{ L}$$

C'est-à-dire une surconsommation de 12% qui est loin d'être négligeable.

3 Cogénération

3.1 Principe de l'innovation

3.1.1. Déterminons les coûts en énergie de chaque par chaque système de production pour chaque configuration :



Pour la configuration 1, la puissance consommée est de 8,5 kW. Pour la configuration 2, la puissance consommée est de 6,5 kW.

3.1.2. Le rendement est donnée par le rapport de la puissance utile sur la puissance consommée :

- configuration 1 : rendement de 71%
- configuration 2 : rendement de 92%

La cogénération augmente l'efficacité du système.

3.2 Étude du moteur Stirling

3.2.1. On nous donne les valeurs $V_A = 1 \text{ L}$. Dans l'état A , le système est en contact avec la source froide, soit $T_A = T_f = 330 \text{ K}$. On détermine la pression à partir de la relation des gaz parfaits.

Pour l'état B , la température est toujours de 330 K car l'évolution est isotherme. Le volume est donné par $V_B = V_A/4$ et on détermine la pression P_B avec la relation des gaz parfaits.

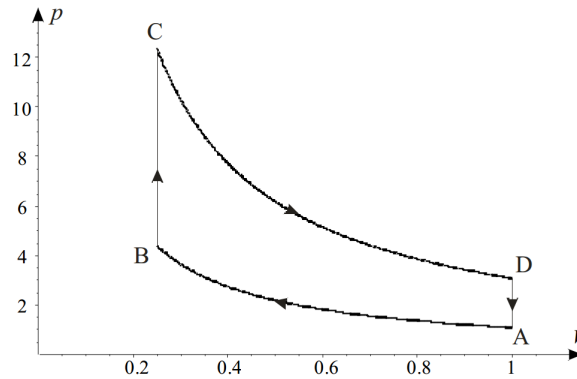
Pour l'état C , le volume reste le même, soit $V_C = V_B$. La température finale est celle de la source chaude, soit $T_C = T_c$ et on détermine la pression P_C avec la relation des gaz parfaits.

Pour l'état D , la température reste celle de la source chaude $T_D = T_c$, le volume est le même que celui de l'état A , soit $V_D = V_A$ et on détermine la pression avec la relation des gaz parfaits.

On résume les résultats dans un tableau (pas besoin de toutes les explications au dessus le jour du concours) :

	A	B	C	D
V (L)	1	0,25	0,25	1
T (K)	330	330	930	930
P (bar)	1,1	4,4	12,4	3,1

3.2.2. Le diagramme donne :



3.2.3. Le cycle est parcouru dans le sens horaire, le cycle est **moteur**, ce qui signifie que le moteur fournit effectivement du travail au milieu extérieur ($W < 0$).

3.2.4. On rappelle la **relation de Mayer** :

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{d(nRT)}{dT} \Rightarrow \boxed{C_P - C_V = nR}$$

et en faisant apparaître le **coefficient de Laplace** $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, on obtient :

$$\gamma C_V - C_V = nR \Rightarrow C_V (\gamma - 1) = nR$$

$$\Rightarrow \boxed{C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}}$$

3.2.5. On applique le premier principe : on calcule la variation d'énergie interne, le travail échangé puis on en déduit la chaleur échangée.

Le premier principe donne :

$$\Delta_{AB}U = W_{AB} + Q_{AB}$$

La transformation $A \rightarrow B$ est une compression isotherme, or d'après la **première loi de Joule**, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, si la température est constante alors :

$$\Delta_{AB}U = 0 \Leftrightarrow \boxed{Q_{AB} = -W_{AB}}$$

Le travail des forces de pression sachant la transformation est isotherme donc quasi-statique ($P_{ext} = P$) :

$$\begin{aligned} \delta W &= -P_{ext} dV = -P dV \\ W_{AB} &= - \int_{V_A}^{V_B} nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) = nRT_f \ln(4) \end{aligned}$$

Le travail échangé est positif, cela signifie que le système (gaz) reçoit effectivement du travail, ce qui était prévisible car le gaz est comprimé. Pour le transfert thermique échangé, on a directement :

$$Q_{AB} = -W_{AB} = -nRT_f \ln(4)$$

3.2.6. On procède à l'identique, le premier principe donne :

$$\Delta_{BC}U = Q_{BC} + W_{BC}$$

Le système évoluant de la température T_f à T_c , la variation d'énergie interne s'écrit :

$$\Delta_{BC}U = C_V(T_c - T_f)$$

La transformation étant isochore, les forces de pressions ne travaillent pas, on a directement :

$$W_{BC} = 0$$

Le premier principe nous donne :

$$\Delta_{BC}U = Q_{BC} = C_V(T_c - T_f) > 0$$

La chaleur échangée est positive, le système reçoit de la chaleur, ce qui est normal car le système voit sa température augmenter.

3.2.7. Le système étant en contact avec un thermostat, l'entropie échangée est donnée par :

$$S_e = \frac{Q_{BC}}{T_c} = \frac{C_V(T_c - T_f)}{T_c}$$

3.2.8. La variation d'entropie est, dans le cas d'une transformation isochore :

$$\Delta_{BC}S = C_V \ln\left(\frac{T_c}{T_f}\right)$$

3.2.9. Le calcul donne $S_{eBC} = 325 \text{ mJ.K}^{-1}$ et $\Delta_{BC}S = 522 \text{ mJ.K}^{-1}$.

La variation d'entropie n'étant pas égale à l'entropie échangée, cela signifie que l'entropie créée est non nulle : **la transformation est irréversible.**

3.2.10. Le premier principe donne :

$$\Delta_{CD}U = Q_{CD} + W_{CD}$$

La détente étant isotherme, on a :

$$\Delta_{CD}U = 0$$

Le travail est donné par :

$$W_{CD} = -nRT_c \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = -nRT_c \ln(4) < 0$$

Pour le calcul de la chaleur, on a directement :

$$Q_{CD} = -W_{CD} = nRT_c \ln(4) > 0$$

3.2.11. Comme précédemment, le premier principe donne :

$$\Delta_{DA}U = Q_{DA} + W_{DA}$$

La variation d'énergie interne est :

$$\Delta_{DA}U = C_V(T_f - T_c)$$

On a un travail nul car la transformation est isochore :

$$W_{DA} = 0$$

On en déduit :

$$Q_{DA} = \Delta_{DA}U = C_V(T_f - T_c)$$

3.2.12. Le travail total fourni par le moteur correspond à la somme de tous les travaux :

$$W_t = W_{AB} + W_{CD} = nR(T_f - T_c) \ln(4) < 0$$

3.2.13. Le rendement correspond à l'énergie utile sur l'énergie utilisée pour le système. L'énergie utilisée est Q_{CD} , on a donc :

$$\eta_m = \frac{|W_t|}{Q_{CD}} = \frac{nR(T_c - T_f) \ln(4)}{nRT_c \ln(4)}$$

$$\Rightarrow \eta_m = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 64,5\%$$

3.2.14. On a $|W_t| = 276 \text{ J}$.

Si on note n le nombre de cycles par unité de temps, $\mathcal{P} = W_t \cdot n$, d'où

$$n = \frac{\mathcal{P}}{W_t} = 7,2 \text{ cycles/s}$$

4 Étude de machines thermiques

4.1 Étude préliminaire

4.1.1. Si le système décrit un cycle complet, on a :

$$\Delta U = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S = 0$$

4.1.2.

— Le premier principe donne :

$$\Delta U = 0 = W_1 + Q_1 \Rightarrow W_1 = -Q_1$$

— Le second principe donne :

$$\Delta S = S_e + S_c = 0 \Rightarrow S_e = -S_c < 0$$

Or l'entropie échangée est :

$$S_e = \frac{Q_1}{T_1} < 0 \Rightarrow Q_1 < 0$$

— Au final :

$$Q_1 < 0 \quad \text{et} \quad W_1 > 0$$

Donc une machine monotherme peut uniquement recevoir du travail et fournir de la chaleur à la source : **on ne peut avoir de moteur**. Cela nous permet de chauffer une source de chaleur de façon contrôlée.

4.1.3. Si la transformation est réversible, alors on a $S_c = 0$ d'où $Q_1 = 0$ car dans ce cas là l'entropie échangée est égale à la variation d'entropie qui est nulle sur un cycle. Enfin, d'après le premier principe $W = 0$.

4.1.4. On utilise les deux premiers principes de la thermodynamique :

— Le premier principe indique que :

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 + W = 0 \Leftrightarrow Q_2 = -Q_1 - W \text{ soit } \alpha_1 = -1$$

— Le second principe donne :

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + S_c = 0 \Leftrightarrow Q_2 = -\frac{T_2}{T_1}Q_1 - T_2 S_c$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = -\frac{T_2}{T_1} \text{ et } \alpha_3 = -T_2$$

4.1.5. Dans ce cas là, le travail est négatif, on a un **moteur**.

4.1.6. On résout le système d'équation et on obtient :

$$Q_1 = \frac{W + \alpha_3 S_c}{\alpha_1 - \alpha_2} = -1,5 \text{ J et } Q_2 = -Q_1 - W = 2 \text{ J}$$

4.1.7. Le rendement correspond au rapport du travail fourni par le moteur sur la chaleur fourni à ce moteur :

$$\eta = -\frac{W}{Q_2} = 0,25$$

4.1.8. On a :

$$\eta = -\frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 - \alpha_1 Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$$

or $\frac{Q_1}{T_1} = -S_c - \frac{Q_2}{T_2}$, d'où :

$$\eta = 1 + \frac{1}{Q_2} \left(-S_c T_1 - Q_2 \frac{T_1}{T_2} \right)$$

Si l'évolution est réversible, $S_c = 0$ et on retrouve le théorème de CARNOT.

4.2 Moteur à explosion

4.2.1. Le système étant constitué d'un gaz parfait, on a directement :

$$\Delta U_{23} = C_V(T_3 - T_2) \text{ et } \Delta U_{41} = C_V(T_1 - T_4)$$

4.2.2. Lors d'une transformation isochore, le travail échangé est **nul** et :

$$Q_{23} = \Delta U_{23} > 0 \text{ et } Q_{41} = \Delta U_{41} < 0$$

De 2 à 3 le système reçoit de l'énergie de la source chaude, de 4 à 1 le système cède de l'énergie à la source froide.

4.2.3. Le rendement s'écrit :

$$\eta = -\frac{W}{Q_{23}} = \frac{Q_{41} + Q_{23}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

4.2.4. Entre les points 2 et 1, l'évolution est adiabatique et réversible, les lois de LAPLACE s'applique :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \text{ d'où } \frac{T_2}{T_1} = K^{\gamma-1}$$

De même :

$$\frac{T_3}{T_4} = K^{\gamma-1} \text{ car } V_4 = V_1 \text{ et } V_3 = V_2$$

4.2.5. On déduit de la question précédente :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$$

On a donc :

$$\frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1 - \frac{T_4}{T_1}}{1 - \frac{T_3}{T_2}} = \frac{T_2}{T_1} = K^{\gamma-1}$$

On en déduit :

$$\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 1 - K^{1-\gamma}$$

4.2.6. L'application numérique donne : $\eta \simeq 67\%$