

Séries numériques – TD₄

Suites numériques

Exercice 1 :

Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Trouver un équivalent de u_n .

Réponse

1. La suite (u_n) est décroissante, donc par théorème de la limite monotone, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Par l'absurde, on suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Par opération sur les limites $u_n + u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Or, $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Contradiction.

On en déduit que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$.

Par opération sur les limites $u_n + u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell$.

Or, $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par unicité de la limite, $2\ell = 0$, donc, $\ell = 0$.

2. Comme la suite u_n est décroissante, on a ;

$$u_n + u_{n+1} \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n.$$

Or, $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$.

Par encadrement,

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Exercice 2 :

Déterminer la limite de $P_n = \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{\frac{1}{n}}$.

Réponse

Mettre sous forme exponentielle puis utiliser une somme de Riemann. On trouve $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{e}$.

Exercice 3 :

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$.

Réponse

On a :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right).$$

Or, par la formule de Stirling,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Donc,

$$\frac{n!}{n^n} = \sqrt{2\pi n} \times e^{-n} + o\left(\sqrt{2\pi n} \times e^{-n}\right).$$

D'où,

$$u_n = \exp\left[\frac{1}{n} \ln\left(\sqrt{2\pi n} \times e^{-n} + o\left(\sqrt{2\pi n} \times e^{-n}\right)\right)\right] = \exp\left[\frac{\ln(n)}{2n} - 1 + \frac{1}{n} \ln\left(\sqrt{2\pi} + o(1)\right)\right].$$

Or, par croissances comparées, $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, $\ln\left(\sqrt{2\pi} + o(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$.

Ainsi,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}.$$

Exercice 4 :

Soient $f : x \mapsto \frac{x(1+2x)}{1+3x}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier (u_n) .
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n}$.
3. En déduire un équivalent de u_n .

Indication : on pourra utiliser le théorème de Cesàro.

Réponse

1. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Initialisation. Par définition $u_0 = 1 > 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 0$ et on montre que $u_{n+1} > 0$.

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{u_n(1+2u_n)}{1+3u_n} > 0.$$

Ce qui achève la récurrence.

$$\text{On en déduit que } u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n}{1+3u_n} < 0.$$

Donc, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc, (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$.

On passe à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ et on trouve

$$\ell = \frac{\ell(1+2\ell)}{1+3\ell} \iff \frac{-\ell}{1+3\ell} = 0.$$

Donc, $\ell = 0$ et

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. On a :

$$\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1+3u_{n-1}}{u_{n-1}(1+2u_{n-1})} = \frac{-1}{1+2u_{n-1}}.$$

Or, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

$$\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

3. On note $v_n = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

Par le théorème de Cesàro, $\frac{v_1 + \dots + v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Or,

$$v_1 + \dots + v_n = 1 - \frac{1}{u_n}.$$

D'où,

$$\frac{v_1 + \dots + v_n}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n \times u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

Donc, $\frac{1}{n \times u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Ainsi,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Séries numériques

Exercice 5 :

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$
2. ♠ $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}.$
3. $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$
4. $\sum \frac{n^n}{n! \times e^n}.$
5. $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).$
6. $\sum \frac{1}{3\sqrt{n}}.$
7. $\sum \cos\left(n^2 \times \pi \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$
8. ♠ $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$
9. $\sum \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}.$
10. $\sum \left(n^{\frac{1}{n^2}} - 1\right).$
11. $\sum \sqrt{\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}}.$
12. $\sum \frac{n!}{n^n}.$
13. $\sum (n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - (n^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$
14. $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(\ln(n))}}.$
15. $\sum \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}.$
16. $\sum \int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} \frac{\sin(t)}{t} dt.$
17. ♠ $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$ où $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$
18. $\sum a^{\lfloor \ln(n) \rfloor}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*.$
19. $\sum \frac{(-1)^n \times (2n+1)}{n \times (n+1)}.$
20. $\sum_{n \geq 1} n^a \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ où $a \in \mathbb{R}.$
21. $\sum_{n \geq 1} n^{\frac{1}{n^2}} - 1.$
22. $\sum \frac{(-1)^n \times \ln(n)}{n - \ln(n)}.$
23. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}.$
24. $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$
25. $\sum \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$ où $x \in \mathbb{R}.$
26. $\sum \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 \times (n-k)!}\right).$

Pour les séries marquées d'un ♠, calculer la somme de la série.

Réponse

1. Diverge grossièrement.
2. Équivalent (converge).
3. Équivalent (diverge).
4. Équivalent (diverge).

5. Équivalent (converge).
6. $o(\dots)$ (converge).
7. DL (converge).
8. Équivalent (converge).
9. Équivalent (converge).
10. Équivalent et $o(\dots)$ (converge).
11. Équivalent (diverge).
12. Équivalent et $o(\dots)$ (converge).
13. Équivalent (diverge).
14. $o(\dots)$ (diverge).
15. DL (converge)
16. Converge (intégrale de Dirichlet).
17. Équivalent (converge).
18. Encadrer la partie entière et se ramener à une série de Riemann : $a^{\ln(n)} = n^{\ln(a)}$.
19. DL (converge).
20. Équivalent
21. Équivalent et $o(\dots)$ (converge).
22. DL (converge).
23. DL
24. Équivalent.
25. Produit de Cauchy (converge).

Exercice 6 : Séries de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \times (\ln(n))^\beta}$.

Réponse

► Cas 1 : $\alpha > 1$. 💡 Comparaison aux séries de Riemann.

Soit $\gamma \in]1, \alpha[$, par exemple, $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.

Par croissances comparées,

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Or, $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge (série de Riemann avec $\gamma > 1$). De plus, les séries en jeu sont à termes positifs.

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.

► Cas 2 : $\alpha < 1$. 💡 Comparaison aux séries de Riemann.

Soit $\gamma \in]\alpha, 1[$, par exemple, $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.

Par croissances comparées,

$$\frac{1}{n^\gamma} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right).$$

Or, $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ diverge (série de Riemann avec $\gamma < 1$). De plus, les séries en jeu sont à termes positifs.

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge.

► Cas 3 : $\alpha = 1$.

• Sous-cas 1 : $\beta \leq 0$. 💡 Comparaison à la série harmonique.

Pour tout $n \geq 2$, on a $\ln(n) \geq 1$, donc, comme $\beta \leq 0$, $\frac{1}{\ln(n)^\beta} = \ln(n)^{-\beta} \geq 1$.

Donc,

$$\frac{1}{n \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$

Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ diverge.

• *Sous-cas 2 : $\beta > 0$.*  Comparaison série-intégrale.

On note $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^\beta}$. La fonction f est dérivable (donc continue) et positive sur $[2, +\infty[$.

De plus, pour tout $t \geq 2$,

$$f'(t) = \frac{\ln(t)^\beta + \beta \ln(t)^{\beta-1}}{\ln(t)^{2\beta}} \geq 0,$$

car $\beta \geq 0$.

De plus, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

En sommant cette inégalité pour k allant de 2 à $n \geq 3$, on a (relation de Chasles) :

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k).$$

De même, pour tout $k \geq 3$,

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

En sommant cette inégalité pour k allant de 3 à n , on a (relation de Chasles) :

$$\sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_2^n f(t) dt.$$

Ainsi,

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq f(2) + \int_2^n f(t) dt$$

D'autre part,

$$\int_2^{n+1} f(t) dt = \int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt = \begin{cases} [\ln(|\ln(t)|)]_2^{n+1} & \text{si } \beta = 1 \\ \left[\frac{\ln(t)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \right]_2^{n+1} & \text{si } \beta \neq 1. \end{cases} = \begin{cases} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{\ln(n+1)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{\ln(2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} & \text{si } \beta \neq 1. \end{cases}$$

• Lorsque $\beta \leq 1$, on remarque que $\int_2^{n+1} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, par théorème de minoration, $\sum_{k=2}^n f(k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, $\sum_{n \geq 2} f(n)$ diverge.

• Dans la suite, on suppose que $\beta > 1$. On a :

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq f(2) + \int_2^n f(t) dt \leq f(2) + \frac{\ln(n+1)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{\ln(2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \leq f(2) - \underbrace{\frac{\ln(n+1)^{-\beta+1}}{\beta-1}}_{\geq 0} + \frac{\ln(2)^{\beta-1}}{1-\beta} \leq f(2) + \underbrace{\frac{\ln(2)^{\beta-1}}{1-\beta}}_{\text{ne dépend pas de } n}.$$

On en déduit que la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n \geq 2} f(n)$ est majorée.

Par théorème, $\sum_{n \geq 2} f(n)$ converge.

► On a montré que :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Exercice 7 :

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right)^n$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{u_n - 1}{n}$.

Indication : on pourra utiliser le résultat sur les séries de Bertrand.

Réponse

On a :

$$u_n = \exp \left(n \times \ln \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right) \right) = \exp \left(n \times \ln \left(1 + \frac{1}{\ln(n)} \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right).$$

Or,

$$\frac{1}{\ln(n)} \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

D'où,

$$n \times \ln \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right) \sim \frac{n}{\ln(n)} \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or, $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Donc,

$$u_n \sim \frac{n \times \ln \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right)}{n} \sim \frac{1}{n \times \ln(n)} \geq 0.$$

Or, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \times \ln(n)}$ diverge (il faut savoir le démontrer : c'est une comparaison série intégrale).
Par théorème de comparaison,

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

Exercice 8 :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} e^{-1/u_n}$ convergent.

Réponse

► En développant, $(x-y)^2 > 0$, on peut montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.

Donc,

$$0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \times \left(u_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

Or, $\sum u_n$ converge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n} \text{ converge}$$

► On sait que $\sum u_n$ converge, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus, $u_n > 0$, donc,

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par croissances comparées, $x \times e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc,

$$\frac{1}{u_n} \times e^{-\frac{1}{u_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Autrement dit, $e^{-\frac{1}{u_n}} = o(u_n)$.

Or, les séries $\sum e^{-\frac{1}{u_n}}$ et $\sum u_n$ sont à termes positifs et $\sum u_n$ converge.
Par théorème de comparaison,

$$\sum e^{-\frac{1}{u_n}} \text{ converge.}$$

Exercice 9 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n .

Réponse

1. On applique le changement de variable $u = t - n$, $du = dt$ et $\frac{t}{u} \Big|_0^1 = \frac{n}{0} - \frac{n+1}{1}$. On a :

$$u_n = \int_0^1 \frac{f(u+n)}{u+n} du.$$

Comme f est 1-périodique,

$$u_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u+n} du.$$

On a :

$$u_n - \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{u+n} \right) \times f(u) du = \int_0^1 \left(\frac{u}{n \times (u+n)} \right) \times f(u) du.$$

Or, f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc, par le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur $[0, 1]$: il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in [0, 1]$, $|f(u)| \leq 1$ (*Remarque* : comme f est 1-périodique, f est en fait bornée sur $\mathbb{R}$).

De plus, pour tout $u \in [0, 1]$, $\frac{u}{n \times (u+n)} \leq \frac{1}{n^2}$.

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\left| u_n - \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 \left(\frac{u}{n \times (u+n)} \right) \times |f(u)| du \leq \frac{M}{n^2} \times \int_0^1 1 du \leq \frac{M}{n^2}.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. **Cas 1** : $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

$$\text{On a : } u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc, $\sum u_n$ converge absolument, donc,

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

Cas 2 : $\int_0^1 f(t) dt \neq 0$. On a alors $\int_0^1 \operatorname{Re}(f(t)) dt \neq 0$ ou $\int_0^1 \operatorname{Im}(f(t)) dt \neq 0$.

Pour fixer les idées, on suppose que $\int_0^1 \operatorname{Re}(f(t)) dt \neq 0$. On note $v_n = \operatorname{Re}(u_n) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{Re}(f(t))}{t} dt$.

La fonction $\operatorname{Re}(f)$ est continue et 1-périodique, en appliquant **Q1** avec f remplacée par $\operatorname{Re}(f)$, on a :

$$v_n = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{Re}(f(t))}{t} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \operatorname{Re}(f(t)) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Donc,

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \operatorname{Re}(f(t)) dt.$$

L'équivalent trouvé est du signe de $\int_0^1 \operatorname{Re}(f(t)) dt$, donc, on peut appliquer les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs. De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Donc, $\sum v_n$ diverge.

Or, $v_n = \operatorname{Re}(u_n)$.

Donc,

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

Exercice 10 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1 + b^n}$.

Réponse

Cas 1 : $|b| < 1$. On a $b^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^n.$$

Donc,

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } |a| < 1.$$

Cas 2 : $b = 1$. On a :

$$u_n = \frac{a^n}{2}.$$

Donc,

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } |a| < 1.$$

Cas 3 : $b = -1$.

Les termes u_{2n+1} ne sont pas définis.

Cas 4 : $|b| > 1$ et $a \neq 0$.

On a :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Si $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Si $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 1$, alors la suite (u_n) ne tend pas vers 0, donc, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

$$\text{La série } \sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \left|\frac{a}{b}\right| < 1.$$

Cas 5 : $|b| > 1$ et $a = 0$. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0$.

Donc,

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

Exercice 11 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(n \times \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ .
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - \ell)$.

Réponse

1. On a :

$$u_n = \exp\left(n^2 \times \ln\left(n \times \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

Or, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'où,

$$u_n = \exp\left(n^2 \times \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{5! \times n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right).$$

De plus,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{6n^2} + \frac{1}{5! \times n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque : le terme $o\left(\frac{1}{n^5}\right)$ signifie que les DL sont à l'ordre 5. Or, j'ai utilisé un DL à l'ordre 3 pour $\ln(1+x)$. Pourquoi aller à l'ordre 5 n'était-il pas utile ici ?

Donc,

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{5! \times n^2} - \frac{1}{2 \times 6^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{180 \times n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{6}} = \ell.$$

2. On a :

$$u_n - \ell = e^{-\frac{1}{6}} \times \left(\exp\left(-\frac{1}{180 \times n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right).$$

Or, $e^x = 1 + x + o(x)$ et $\exp\left(-\frac{1}{180 \times n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque : le terme $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ signifie que les DL sont à l'ordre 2. Or, j'ai utilisé un DL à l'ordre 1 pour e^x . Pourquoi aller à l'ordre 2 n'était-il pas utile ici ?

Donc,

$$u_n - \ell = -\frac{1}{180 \times n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc,

$$u_n - \ell \sim -\frac{1}{180 \times n^2} \leq 0$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série divergente. Donc, par théorème de comparaison,

$$\sum u_n - \ell \text{ converge.}$$

Exercice 12 :

Soit, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$: $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

1. Si $p = 0$ ou $p = 1$, montrer que la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans la suite que $p \geq 2$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $(n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire que $S_n = \frac{1}{p-1}(1 - (n+1)u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Soit $v_n = (n+1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. En déduire que la série de terme général u_n converge.

5. Déterminer la somme de la série de terme général u_n .

Réponse

1. Pour $p = 0$, on a $u_n = 1$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc,

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

Pour $p = 1$, on a $u_n = \frac{1}{n}$ et on reconnaît la série harmonique.

Donc,

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

2. On a :

$$(n+p+1)u_{n+1} = (n+p+1) \times \frac{(n+1)! \times p!}{(n+p+1)!} = \frac{(n+1)! \times p!}{(n+p)!} = (n+1) \times u_n$$

3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. $n = 1$: $S_1 = u_1 = \frac{1}{p+1}$ et

$$\frac{1}{p-1} \left(1 - 2 \times \frac{1}{p+1} \right) = \dots = \frac{1}{p+1} = S_1.$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que : $S_n = \frac{1}{p-1}(1 - (n+1)u_n)$.

Montrons que $S_{n+1} = \frac{1}{p-1}(1 - (n+2)u_{n+1})$.

On a :

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \frac{1}{p-1}(1 - (n+1)u_n) + u_{n+1} = \frac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \dots = \frac{1}{p-1}(1 - (n+2)u_{n+1}).$$

Ce qui achève la récurrence.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+2) \times u_{n+1}}{(n+1) \times u_n} = \frac{(n+2) \times \frac{(n+1) \times u_n}{n+p+1}}{(n+1) \times u_n} = \frac{n+2}{n+p+1}.$$

Comme $p \geq 2$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$.

Donc,

$$(v_n) \text{ est une suite décroissante.}$$

De plus, (v_n) est minorée par 0, par le théorème de la limite monotone, (v_n) converge vers $\ell \geq 0$.

Donc,

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p-1} \times (1 - \ell) \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

5. Par l'absurde, on suppose que $\ell \neq 0$. On sait alors que $v_n \sim \ell$ et $u_n \sim \frac{\ell}{n}$.

Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par théorème de comparaison, $\sum u_n$ diverge. Contradiction avec la question précédente.

Donc, $\ell = 0$ et, par la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{p-1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}.$$

Exercice 13 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $u_n = \sqrt{n} + a \times \sqrt{n+1} + b \times \sqrt{n+2}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la série $\sum u_n$ converge. Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée.
2. Calculer la somme de la série $\sum u_n$.
3. Déterminer un équivalent du reste d'indice n de la série $\sum u_n$.

Réponse

1. On a :

$$u_n = \sqrt{n} \times \left(1 + a \times \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + b \times \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right).$$

En utilisant le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 3, on a :

$$u_n = (a+b+1) \times \sqrt{n} + \frac{2b+a}{2\sqrt{n}} - \frac{4b+a}{8n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Cas 1 : $a+b+1 \neq 0$.

Dans ce cas, u_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc,

$$\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}$$

Cas 2 : $a+b+1 = 0$ et $a+2b \neq 0$.

Dans ce cas :

$$u_n \sim \frac{a+2b}{2\sqrt{n}}.$$

Or, $\frac{a+2b}{2\sqrt{n}}$ ne change pas de signe et est le terme général d'une série divergente (série de Riemann avec $\frac{1}{2} \leq 1$).

Donc, par théorème de comparaison,

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

Cas 3 : $a+b+1 = 0$ et $a+2b = 0$.

Ces deux équations donnent $a = -2$ et $b = 1$, puis

Dans ce cas :

$$u_n \sim \frac{1}{4 \times n^{\frac{3}{2}}} \geq 0.$$

Or, $\frac{1}{4 \times n^{\frac{3}{2}}}$ est le terme général d'une série convergente (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$).

Donc, par théorème de comparaison,

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

Ainsi,

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } a = -2 \text{ et } b = 1.$$

2. En faisant apparaître deux télescopage, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \sqrt{k} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2} = \sum_{k=0}^n \sqrt{k} - \sqrt{k+1} + \sum_{k=0}^n -\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2} = 0 - \sqrt{n+1} - 1 + \sqrt{n+2}.$$

En utilisant la méthode de la quantité conjuguée :

$$S_n = -1 + \frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = -1.$$

3. On utilise une comparaison série-intégrale. La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}$ est continue croissante négative. Utilisons plutôt $g = -f$ qui est alors continue décroissante positive sur $[0, +\infty[$. On a :

$$\int_k^{k+1} g(t) dt \leq g(k) \leq \int_{k-1}^k g(t) dt.$$

D'où, en sommant pour $k = n+1$ à N , on a :

$$\int_{n+1}^{N+1} g(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^N g(k) \leq \int_n^N g(t) dt.$$

Or,

$$\int_n^N g(t) dt = - \left[\frac{2}{3} \times t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} \times (t+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \times (t+2)^{\frac{3}{2}} \right]_n^N.$$

Or, en utilisant le DL de $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ à l'ordre 2, on a :

$$\frac{2}{3} \times t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} \times (t+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \times (t+2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \times t^{\frac{3}{2}} \times \left(1 - 2 \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(1 + \frac{2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Donc, en faisant tendre $N \rightarrow +\infty$:

$$\frac{2}{3} \times n + 1^{\frac{3}{2}} \times \left(1 - 2 \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(1 + \frac{2}{n+2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} g(k) \leq \frac{2}{3} \times n^{\frac{3}{2}} \times \left(1 - 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

En multipliant par -1 pour revenir à f :

$$\underbrace{-\frac{2}{3} \times n + 1^{\frac{3}{2}} \times \left(1 - 2 \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(1 + \frac{2}{n+2} \right)^{\frac{3}{2}} \right)}_{\sim -\frac{1}{2\sqrt{n}}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \underbrace{-\frac{2}{3} \times n^{\frac{3}{2}} \times \left(1 - 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{3}{2}} \right)}_{\sim -\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \sim -\frac{1}{2\sqrt{n}}}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \sim -\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice 14 :

Déterminer un équivalent de la suite des restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)$.

Réponse

On utilise une comparaison série/intégrale.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, pour tout $k \geq n+1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} dt \leq \frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^3} dt.$$

En sommant pour k allant de $n+1$ à $N \geq n+1$, on a :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^3} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^3} \leq \int_n^N \frac{1}{t^3} dt.$$

Or,

$$\int_n^N \frac{1}{t^3} dt = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_n^N = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2}.$$

De même,

$$\int_n^N \frac{1}{t^3} dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

D'autre part, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (car $3 > 1$), donc, on peut faire tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités précédentes :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Or, $\frac{1}{2(n+1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}$.

Donc, par théorème d'encadrement,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 15 :

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ converge et, en utilisant Python, donner une valeur approchée de sa somme à 10^{-3} près.

Réponse

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ est alternée (à vous de le vérifier). Donc,

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^4} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^4}.$$

Pour obtenir une valeur approchée de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4}$ à 10^{-3} près, il suffit de déterminer n tel que

$$\frac{1}{(n+1)^4} \leq 10^{-3} \iff (n+1)^4 \geq 10^3.$$

On trouve $S = 1,946$ à 10^{-3} près.

Exercice 16 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la série $\sum_{k \geq n+1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge. Dans la suite, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $R_n + R_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \times (k-1)}$.
3. Déterminer un équivalent simple de R_n .
4. Déterminer la nature de $\sum R_n$.

Réponse

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée (à vous de le vérifier).

Donc, R_n son reste d'ordre n est bien défini.

Autrement dit,

$$\text{la série } \sum_{k \geq n+1} \frac{(-1)^k}{k} \text{ converge.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par glissement d'indice, on a :

$$\begin{aligned} R_n + R_{n-1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \times (k-1)} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \times (k-1)} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \times \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \times \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \times (k-1)}. \end{aligned}$$

3. On remarque que $R_{n-1} = R_n + \frac{(-1)^n}{n}$.

Donc,

$$2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \times (k-1)}.$$

Or, la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k \times (k-1)}$ est alternée (à vous de le vérifier), donc, par majoration du reste d'une série alternée

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \times (k-1)} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1) \times n} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \times (k-1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Donc,

$$2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Donc,

$$R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.$$

4. **Attention!** on ne peut pas utiliser l'équivalent précédent, les séries ne sont pas à termes positifs.
Cependant,

$$R_n = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $n \geq 2$).

Donc, par théorème de comparaison, $\sum R_n$ converge.

Exercice 17 :

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge et calculer sa somme.

Réponse

Méthode 1 : on note $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

La suite (u_n) est positive, décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.
Par le critère spécial des séries alternées,

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Méthode 2 : On a $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a :

$$(-1)^n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est la série harmonique alternée et donc converge.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument (série de Riemann avec $2 > 1$) donc converge.

Par théorème de comparaison,

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Calcul de la somme. On a :

$$S_N = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{(2n+1)(2n+1)}{2n}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^N \frac{(2n+1)(2n+1)}{2n}\right).$$

En faisant apparaître des factorielles :

$$S_N = \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{2^{4N}(N!)^4}\right).$$

Par la formule de Stirling :

$$\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{2^{4N}(N!)^4} \sim \frac{2N \times \left(\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N} \times \sqrt{4\pi N}\right)^2}{2^{4N} \left(\left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}\right)^4} \sim \frac{2}{\pi} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}.$$

Donc,

$$S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 18 :

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k \times \theta)$.

1. Montrer que la suite (S_n) est bornée.

2. Soit un entier $N \geq 2$. Montrer que : $\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n \times \theta)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n \times (n+1)} + \frac{S_N}{N}$.

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n \times \theta)}{n}$.

Réponse

1. On a :

$$S_n = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k \right) = \begin{cases} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \right) & \text{si } x \neq 0[2\pi] \\ \operatorname{Im}(n+1) & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{n\theta}{2}} \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) & \text{si } x \neq 0[2\pi] \\ 0 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

Donc, par la formule d'Euler

$$S_n = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{si } x \neq 0[2\pi] \\ 0 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

D'où,

$$|S_n| \leq \begin{cases} \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} & \text{si } x \neq 0[2\pi] \\ 0 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

La majoration trouvée dans les deux cas ne dépend pas de n . Ainsi,

La suite (S_n) est bornée

2. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n\theta)}{n} &= \sum_{n=1}^N \frac{S_n - S_{n-1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{S_{n-1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} \quad (\text{changement d'indice dans la deuxième somme}) \\ &= \frac{S_N}{N} - \frac{S_0}{1} + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_n}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $S_0 = 0$, on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n(n+1)}.$$

3. On sait que $\frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et que la suite (S_n) est bornée, donc,

$$\frac{S_N}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, $\left| \frac{S_n}{n(n+1)} \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergentes (série de Riemann avec $2 > 1$), par théorème de comparaison,

$\sum \frac{S_n}{n(n+1)}$ converge absolument, donc converge.

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n\theta)}{n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{n(n+1)} \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit,

$$\sum \frac{\sin(n\theta)}{n} \text{ converge.}$$

Exercice 19 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. En déduire que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \times \binom{2n}{n}$.

Réponse

1. Par la formule du binôme de Newton :

$$(1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k.$$

De plus, en développant :

$$(1+X)^{2n} = (1+X)^n \times (1+X)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{n-j}\right) X^k.$$

En identifiant les coefficients de X^n dans les deux expressions trouvées dans le développement de $(1+X)^{2n}$, on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{j}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. On remarque que $\frac{1}{(n!)^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{(n!)^2}$ converge absolument.

Par produit de Cauchy de séries absolument convergente :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k!)^2} \frac{1}{(n-k!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} \binom{2n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \binom{2n}{n}$$

Exercice 20 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (\ln(k))^2}$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Réponse

La fonction $f : t \mapsto \ln(t)^2$ est croissante positive et continue sur $[1, +\infty[$.

Par comparaison série-intégrale : pour tout $k \geq 2$

$$\int_{k-1}^k (\ln(t))^2 dt \leq (\ln(k))^2 \leq \int_k^{k+1} (\ln(t))^2 dt.$$

En sommant de $k = 2$ et $k = n$:

$$\int_1^n (\ln(t))^2 dt \leq \sum_{k=2}^n (\ln(k))^2 \leq \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 dt.$$

Or, par intégration par parties

$$\int_1^n (\ln(t))^2 dt = \dots = n(\ln(n))^2 - 2n \ln(n) + 2n - 2 \sim n(\ln(n))^2.$$

De même,

$$\int_2^{n+1} (\ln(t))^2 dt = \dots = (n+1)(\ln(n+1))^2 - 2(n+1) \ln(n+1) + 2(n+1) - 2(\ln(2))^2 + 2 \ln(2) - 2 \sim n(\ln(n+1))^2.$$

Or, $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(\ln(n))$.

Donc,

$$\int_2^{n+1} (\ln(t))^2 dt = \dots = (n+1)(\ln(n+1))^2 - 2(n+1) \ln(n+1) + 2(n+1) - 2(\ln(2))^2 + 2 \ln(2) - 2 \sim n(\ln(n))^2.$$

Par encadrement :

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k))^2 = \sum_{k=2}^n (\ln(k))^2 \sim n(\ln(n))^2.$$

Donc,

$$u_n \sim \frac{1}{n \ln(n)^2} \geq 0.$$

On reconnaît une série de Bertrand convergente (à savoir faire). Par théorème de comparaison,

$$\sum u_n \text{ convergente.}$$

Exercice 21 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

1. Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$.
3. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.
4. Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante.
5. En déduire un équivalent de a_n et la nature de la série de terme général a_n .

Réponse

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n \times (t-1) \times \sqrt{1-t^2} dt.$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, $t^n \times (t-1) \times \sqrt{1-t^2} \leq 0$. D'où par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon ordre : $0 \leq 1$), $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

Donc,

$$(a_n) \text{ est décroissante.}$$

Pour calculer a_0 , on utilise le changement de variable $t = \sin(u)$:

$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\sin(u))^2} \cos(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u)| \cos(u) du.$$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le cosinus est positif et

$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^2 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \left[\frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc,

$$a_0 = \frac{\pi}{4}.$$

On a :

$$a_1 = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt = \left[-\frac{1}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1.$$

Donc,

$$a_1 = \frac{1}{3}.$$

2. Par intégration par parties :

$$a_{n+2} = \int_0^1 t^{n+1} \times t \sqrt{1-t^2} dt = \left[-\frac{1}{3} \times t^{n+1} \times (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{n+1}{3} \int_0^1 t^n (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{n+1}{3} \times (a_n - a_{n+2}).$$

Donc, $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

Ainsi,

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n.$$

3. Comme (a_n) est décroissante : $a_{n+1} \leq a_n$

De plus, par la question précédente

$$a_n = \frac{n+4}{n+1} a_{n+2} \leq \frac{n+4}{n+1} a_{n+1}$$

Donc,

$$a_{n+1} \leq a_n \leq \frac{n+4}{n+1} a_{n+1} \sim a_{n+1}.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement,

$$a_{n+1} \sim a_n.$$

4. On note $u_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$. Par la question 2 :

$$u_{n+1} = (n+2)(n+3)(n+4)a_{n+1}a_{n+2} = (n+2)(n+3)(n+4)a_{n+1} \frac{n+1}{n+4} a_n = u_n.$$

Donc,

$$\text{La suite } (u_n) \text{ est constante égale à } u_0 = 6a_0 \times a_1 = \frac{\pi}{2}.$$

5. Par Q4 et Q3 :

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1} \sim n^3 a_n^2.$$

Donc,

$$a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \geq 0.$$

La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$). Donc, par théorème de comparaison,

$$\sum a_n \text{ converge.}$$

Exercice 22 :

On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Établir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$ montrer que $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ montrer que $\sum u_n^2$ diverge.

Réponse

1. Voir le DL7. On montre que la suite est décroissante et que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. On a $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n$.

On a $\sin(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$. D'où $\sin(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{3!}$.

Or, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, $u_n^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -3! \times (\sin(u_n) - u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -3! \times (u_{n+1} - u_n) \geq 0$.

Or, la suite (u_n) converge, donc par le lien suite-série, la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

Donc, par théorème de comparaison,

$$\sum u_n^3 \text{ converge.}$$

3. On a :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(u_n - \frac{u_n^3}{3!} + o((u_n)^3)\right) - \ln(u_n) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{3!} + o((u_n)^2)\right).$$

Or, $\ln(1-x) = -x + o(x)$. Donc,

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{u_n^2}{3!} + o((u_n)^2).$$

Donc, $u_n^2 \sim -3! (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \geq 0$.

Or, $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Donc, par le lien suite-série, $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ diverge.

Ainsi, par théorème de comparaison,

$$\sum u_n^2 \text{ diverge.}$$

Remarque : Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et (u_n) est décroissante, pour n assez grand : $0 \leq u_n^2 \leq u_n$.

Donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 23 :

Soit $u = (u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$.

1. Étudier la convergence de la suite u . On ne demande pas de déterminer la limite de la suite.

2. On pose $v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Déterminer $a > 0$ tel que $\ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \ln(v_n)$ converge-t-elle ?
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^{3/2}}$ et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Réponse

1. Réflexions :

On s'intéresse à la monotonie de (u_n) . On remarque : $0 \leq \frac{2n+2}{2n+5} \leq 1$.

De l'égalité $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times u_n$, on déduit que u_{n+1} et u_n sont de même signes. Comme $u_0 \geq 0$, on va pouvoir montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. En multipliant l'encadrement précédent par u_n , on aura alors $u_{n+1} \leq u_n$.

Maintenant, on rédige.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Initialisation. On a $u_0 = 1 \geq 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \geq 0$.

On a $u_{n+1} = \underbrace{\frac{2n+2}{2n+5}}_{\geq 0} \times u_n \geq 0$.

Donc, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+2}{2n+5} \leq 1$, donc, en multipliant par $u_n \geq 0$, on a : $u_{n+1} \leq u_n$.

Donc, la suite (u_n) est décroissante minorée par 0.

Ainsi, par théorème de la limite monotone,

la suite (u_n) converge.

2. On a :

$$\ln(v_n) = \frac{3}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) = \frac{5}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right).$$

Or, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{5}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

$$\ln(v_n) = \frac{5}{2n} - \frac{5}{4n^2} - \frac{5}{2n} + \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{5}{2n} - \frac{5}{4n^2} - \frac{5}{2n} + \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{15}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc,

$$\text{avec } a = \frac{15}{8} > 0, \text{ on a } \ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est à terme positif et converge, donc par théorème de comparaison,

$\sum \ln(v_n)$ converge.

3. On note $w_n = n^{3/2} \times u_n$. On remarque que $v_n = \frac{w_{n+1}}{w_n}$, donc, $\ln(v_n) = \ln(w_{n+1}) - \ln(w_n)$.

Or, $\sum \ln(v_n)$ converge, donc par le lien suite série, la suite $(\ln(w_n))$ converge. On note ℓ la limite de cette suite.

Donc, $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$. On note $C = e^\ell > 0$.

Donc, $w_n = n^{3/2} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C$.

Ainsi,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{3/2}} \geq 0.$$

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$),

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

Remarque : en particulier, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Séries numériques – Exercices supplémentaires

Exercice 24 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$.

1. Avec Python, tracer la courbe polygonale reliant les points (k, u_k) pour $k \in \llbracket 0, 50 \rrbracket$.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) . Justifier que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. Déterminer un équivalent de u_n .
4. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Justifier que la série $\sum \varepsilon_n \times u_n$ converge.

$$\text{On note } S(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \times u_n.$$

Montrer que, pour tout $S(\varepsilon) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = S(\varepsilon)$.
6. Écrire une procédure qui prend $(x, N) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{N}$ comme argument et qui renvoie le $(N+1)$ -uplet $(\varepsilon_k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$.